Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία – Παράρτημα Άρτας
Άρτα 17 Μαΐου 2003

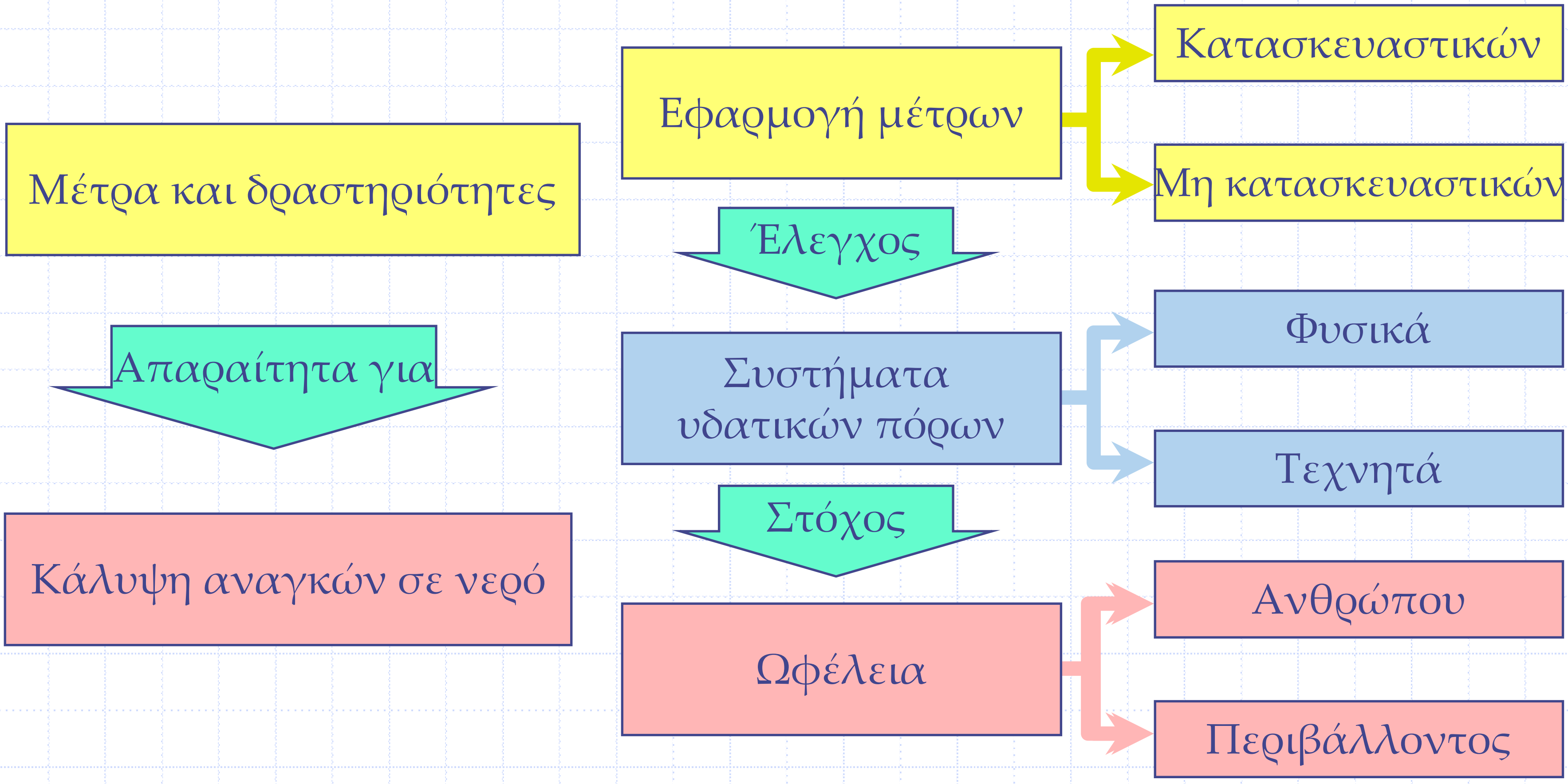
Μαθηματικά εργαλεία στη διαχείριση των υδατικών πόρων

Δημήτρης Κουτσογιάννης
Τομέας Υδατικών Πόρων, Σχολή Πολιτικών Μηχανικών,
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Εισαγωγή
Ορισμός της διαχείρισης υδατικών πόρων/συστημάτων

ΥΒΕΤ, Ν. 1739/1987

N. S. Grigg, 1996



Πλήρης υποδομή αστικού υδατικού συστήματος

Αποχέτευση ομβρίων

Αποχέτευση λυμάτων

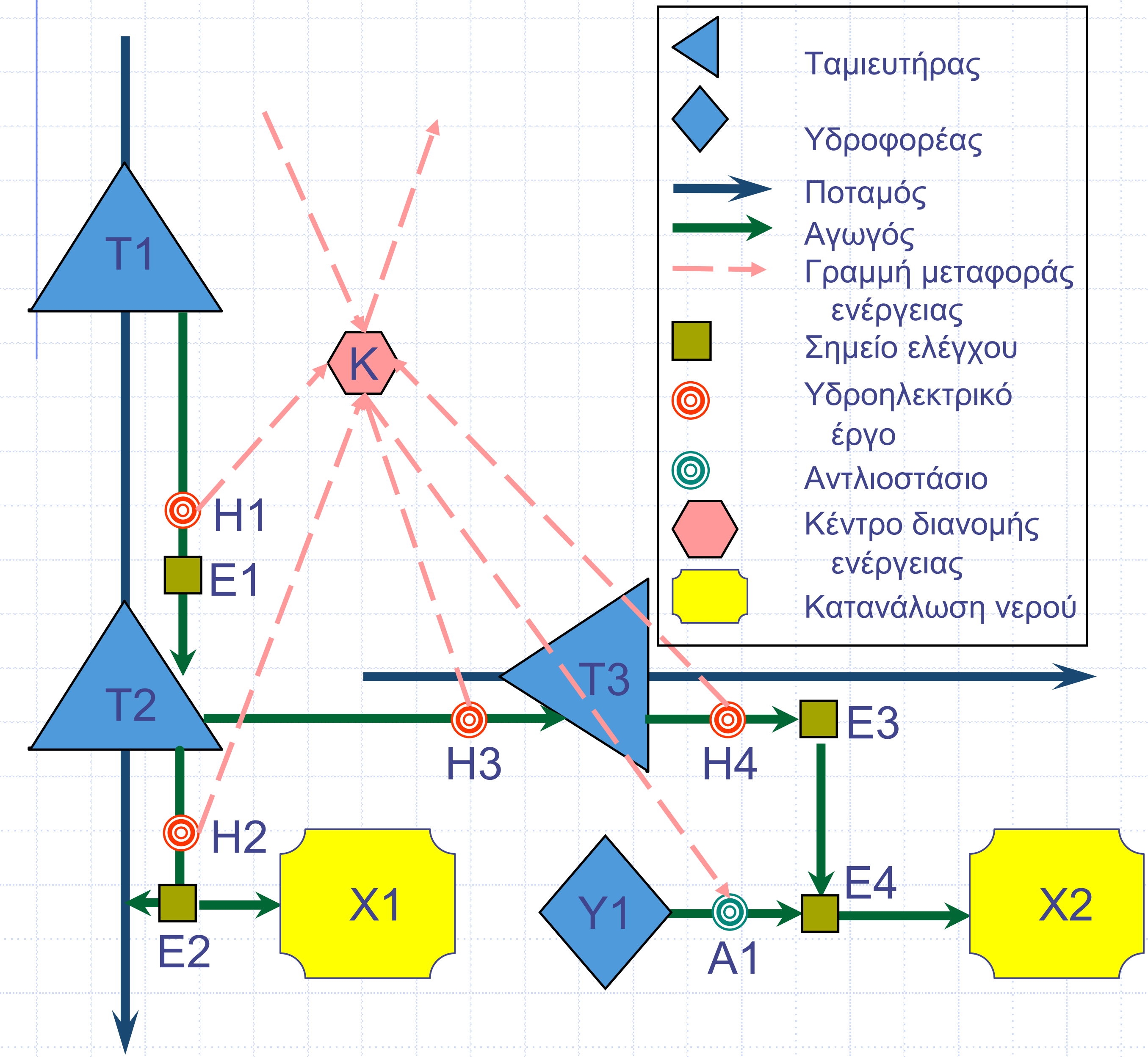
Αντιπλημμυρική θωράκιση
(ασφαλής στάθμη)

Διάθεση στερεών
αποβλήτων

Υδροδότηση

Αστικό υδατόρευμα

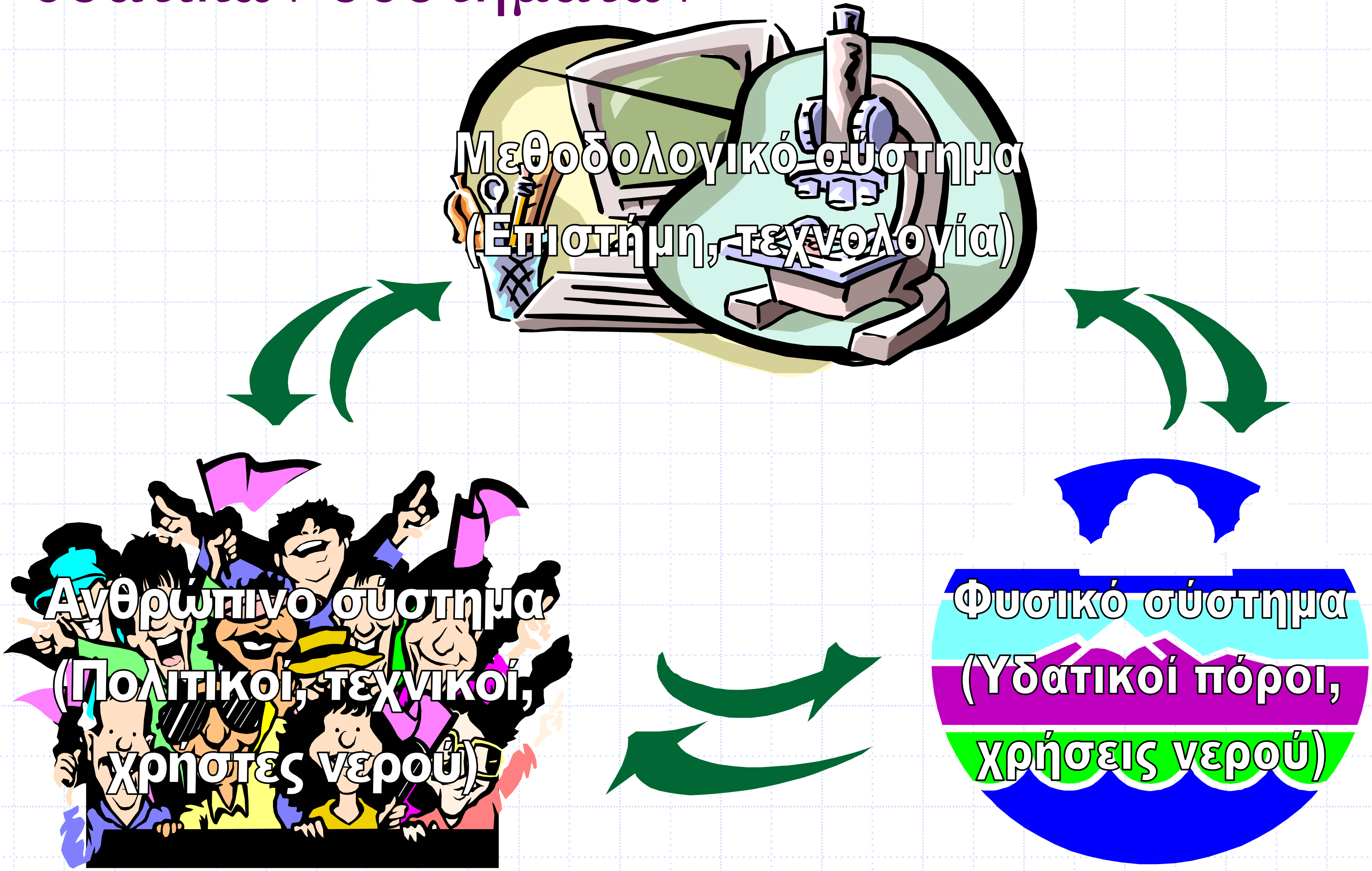
Προσαρμογή από: Maksimovic, 2000



Γενική περίπτωση διαχείρισης υδατικού συστήματος

- Στόχοι ή/και δεσμεύσεις
  - Καταναλωτικές χρήσεις
  - Ενέργεια
  - Προστασία από πλημμύρες
  - Οικονομική ωφέλεια
  - Περιβαλλοντική διατήρηση
- Περιορισμοί
  - Φυσικοί
  - Λειτουργικοί
- Σε καθεστώς υδρολογικής αβεβαιότητας

Επίπεδα πολυπλοκότητας στη διαχείριση υδατικών συστημάτων



Επιστημονικές και τεχνολογικές περιοχές της διαχείρισης υδατικών συστημάτων

- Υδρολογία
- Υδραυλική
- Γεωλογία
- Υδρογεωλογία
- Εδαφολογία
- Μετεωρολογία
- Περιβαλλοντική τεχνολογία
- Ενεργειακή τεχνολογία
- Αγροτική τεχνολογία
- Δασοτεχνολογία
- Οικολογία

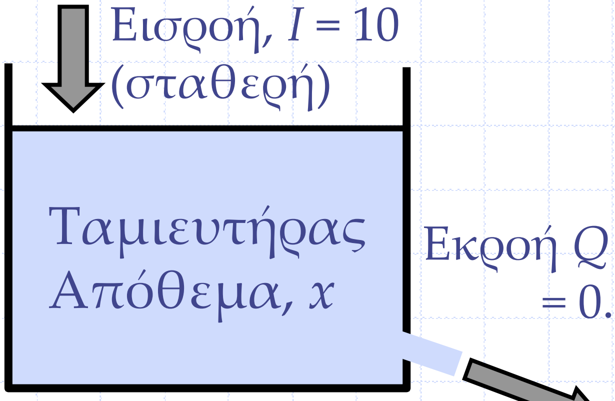
- Κοινωνιολογία
- Πολιτική επιστήμη
- Οικονομική
- Νομική
- Επιστήμη διεθνών σχέσεων

- Θεωρία πιθανοτήτων, στατιστική, θεωρία στοχαστικών ανελίξεων
- Επιχειρησιακή έρευνα, Ανάλυση συστημάτων
- Θεωρία ελέγχου
- Πληροφορική

Η σημασία της πρόβλεψης στη διαχείριση υδατικών συστημάτων

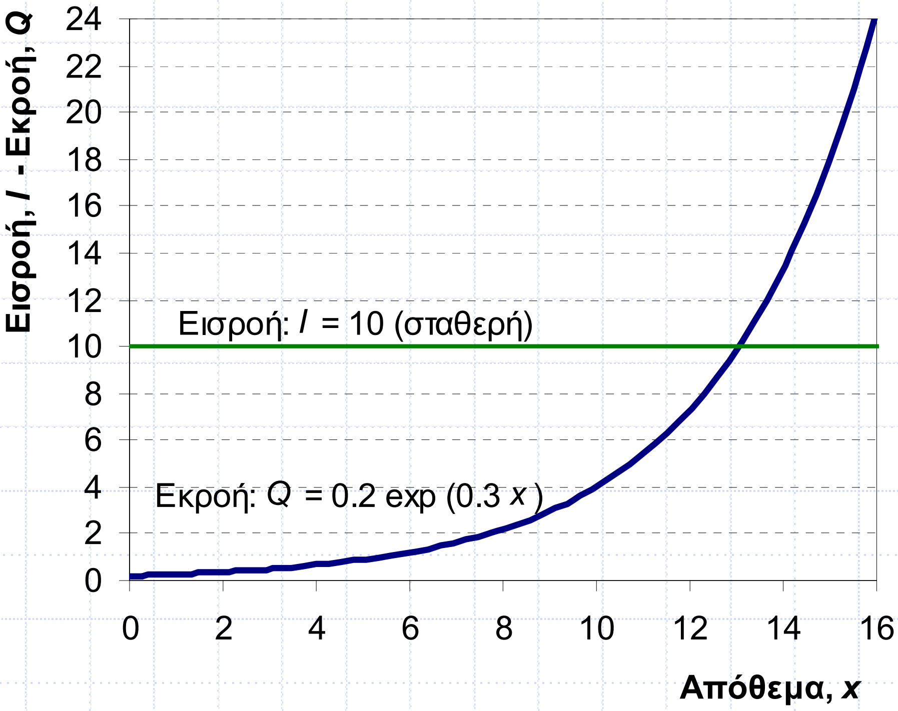
- Θα έχουμε νερό στους Ολυμπιακούς αγώνες;
- Αν φτιάξουμε έναν ταμιευτήρα με άλφα διαστάσεις, πόσο νερό θα μας δίνει κάθε χρόνο;
- Ποιες πρέπει να είναι οι διαστάσεις ενός ταμιευτήρα για να μπορεί να μας δίνει βήτα ποσότητα νερού κάθε χρόνο;
- Αν σήμερα εφαρμόσουμε μια γάμα πολιτική απολήψεων από έναν ταμιευτήρα, ποιες θα είναι οι επιπτώσεις σε πέντε χρόνια;

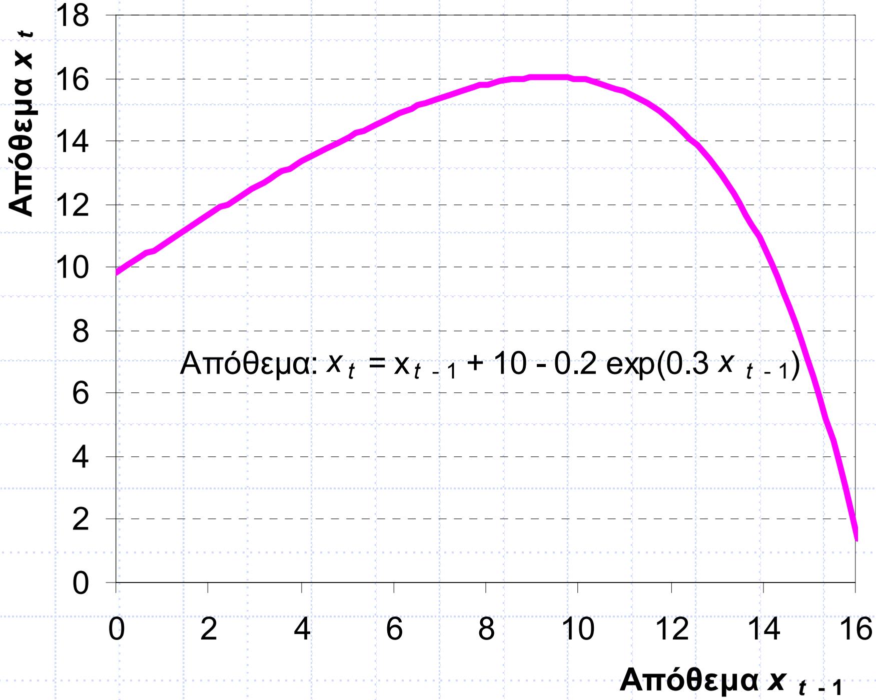
Δυνατότητες πρόβλεψης – Ένα απλό παράδειγμα



Εξίσωση εξέλιξης συστήματος

$$x_t = x_{t-1} + 10 - 0.2\, e^{0.3\, x_{t-1}}$$



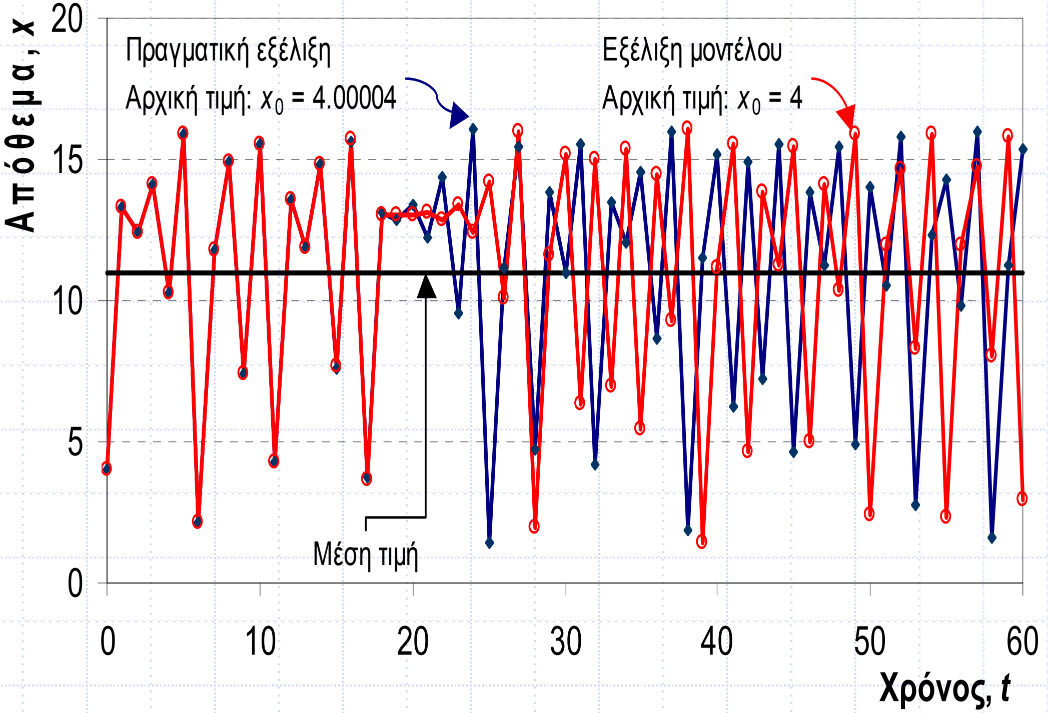


Απλοί αριθμητικοί υπολογισμοί του παραδείγματος

Εξίσωση εξέλιξης συστήματος

$$x_t = x_{t-1} + 10 - 0.2\, e^{0.3\, x_{t-1}}$$

Χρόνος	Απόθεμα	Απόθεμα
0	4.00004	4.00000
1	13.33601	13.33598
2	12.40761	12.40768
3	14.13587	14.13576
⋮	⋮	⋮
22	14.33236	12.87899
23	9.59670	13.35076
24	16.03737	12.37389
25	1.46130	14.18540



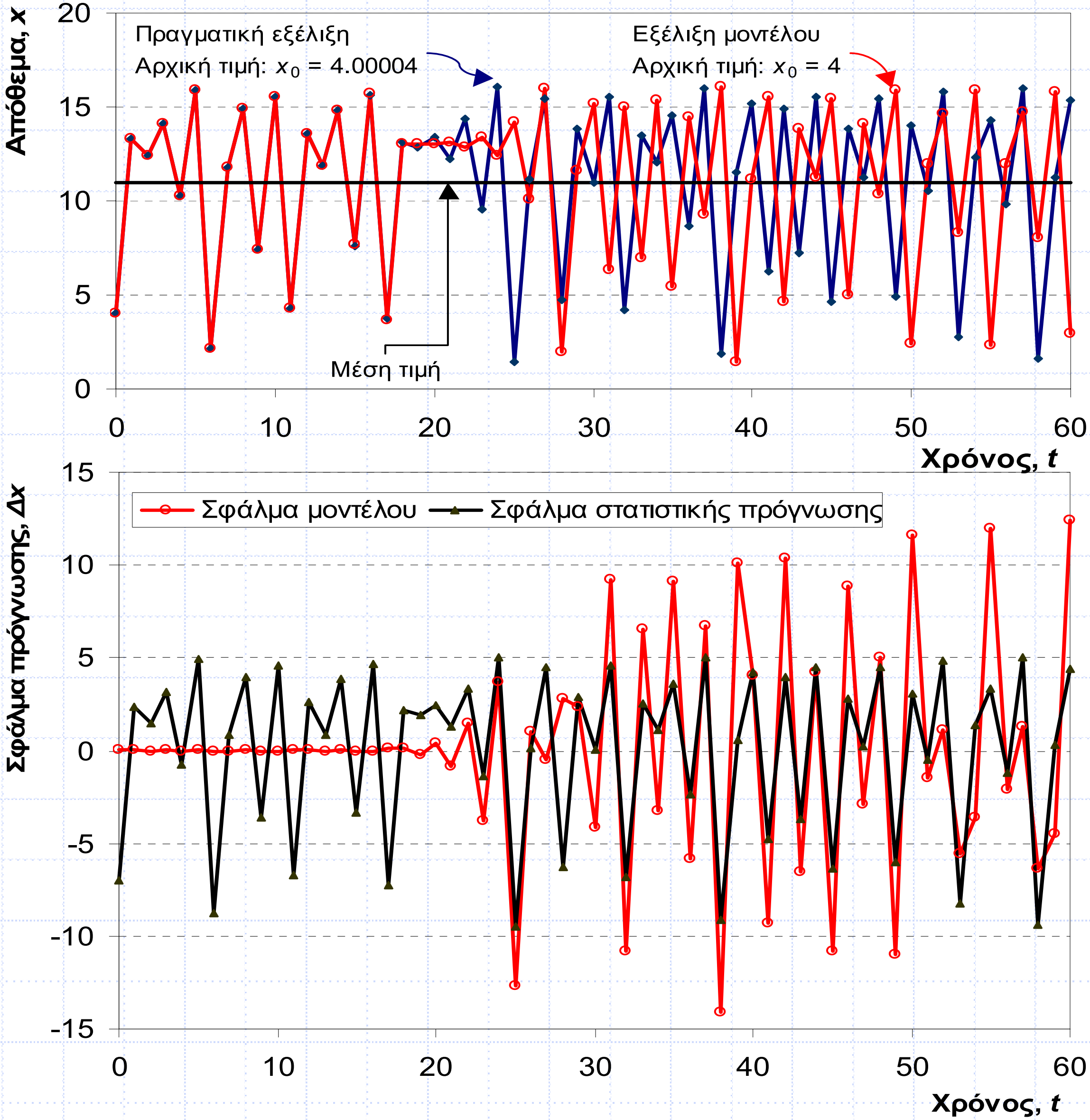
Συνέχεια και τέλος παραδείγματος

Ποιά είναι η καλύτερη πρόγνωση;

(α) του μοντέλου, με αρχική τιμή $x_0 = 4$ (αντί της πραγματικής αλλά άγνωστης τιμής $x_0 = 4.00004$)

ή

(β) η στατιστική, π.χ. χρησιμοποιώντας τη μέση τιμή $\bar{x} = 11$



Συμπέρασμα

Όπως διατυπώθηκε από το γάλλο μαθηματικό Henri Poincare (≈1900)

"Ακόμα και αν οι φυσικοί νόμοι δεν είχαν άλλα μυστικά από εμάς, θα μπορούσαμε να ξέρουμε την αρχική κατάσταση μόνο κατά προσέγγιση. Αν αυτό μας επιτρέπει να προβλέψουμε τη μεταγενέστερη κατάσταση με τον ίδιο βαθμό προσέγγισης, αυτό αρκεί να πούμε ότι το φαινόμενο είχε προβλεφθεί, ότι υπόκειται σε νόμους. Όμως, το ζήτημα δεν είναι πάντοτε έτσι: υπάρχει περίπτωση οι πολύ λεπτές διαφορές στις αρχικές συνθήκες να παράγουν πολύ μεγαλύτερες διαφορές στα τελικά φαινόμενα, ένα ελάχιστο σφάλμα στην αρχή να προκαλεί ένα τεράστιο σφάλμα στο τέλος. Η πρόβλεψη τότε γίνεται αδύνατη κι έτσι έχουμε το φαινόμενο της τύχης."

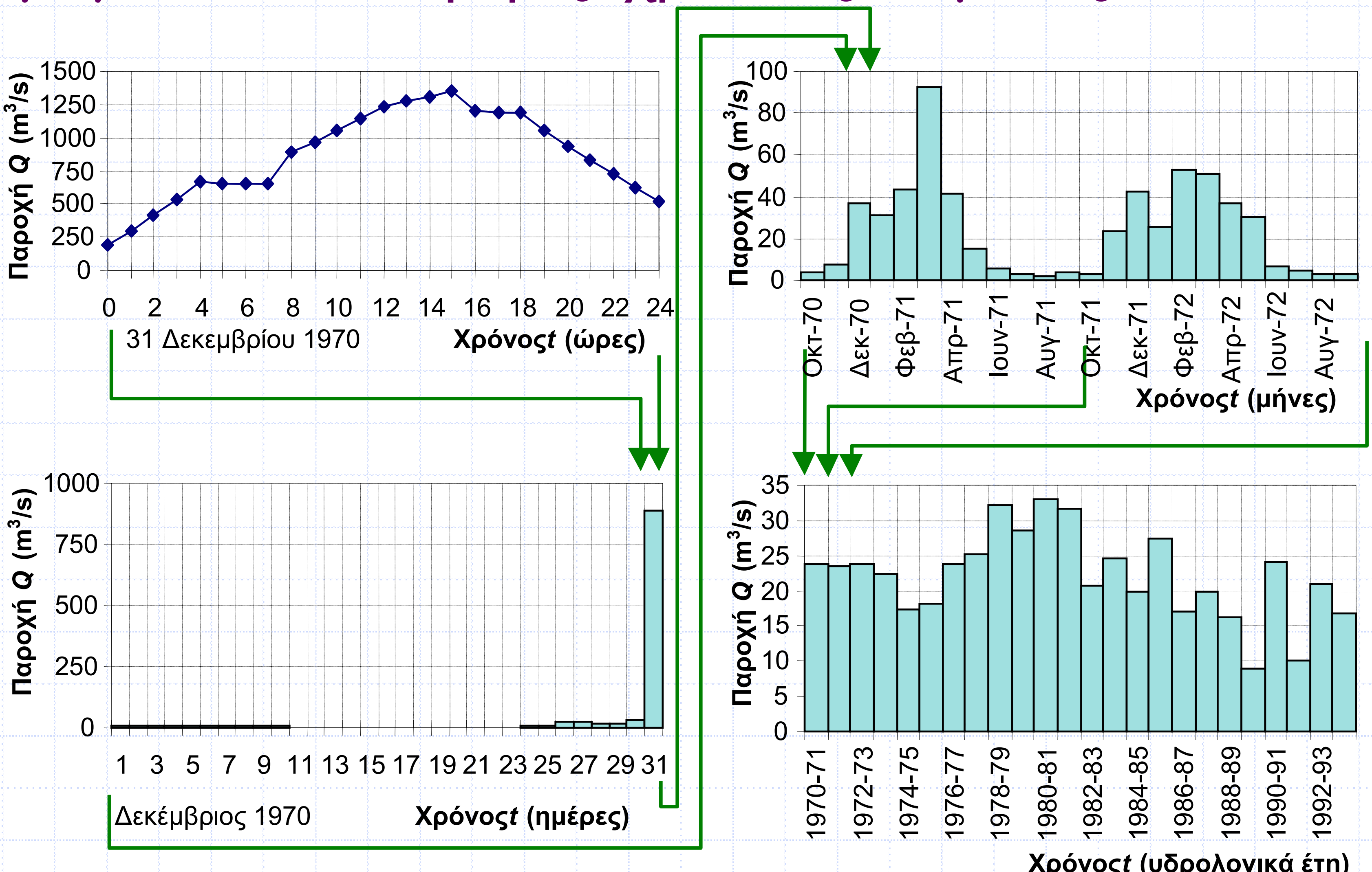
Χάος

Γενικές αρχές στην αντιμετώπιση της διαχείρισης υδατικών πόρων

... και όχι μόνο

1. Αποδοχή της αβεβαιότητας
   - Αδυναμία μακροπρόθεσμης ακριβούς πρόγνωσης
   - Χρήση προγνώσεων πιθανοτικού – στατιστικού τύπου (ποσοτικοποίηση της αβεβαιότητας)
2. Αποδοχή της διακινδύνευσης (του ρίσκου)
   - Αδυναμία εξασφάλισης πλήρους ασφάλειας (δεν μπορούμε να βάλουμε όρια στη φύση)
   - Ποσοτικοποίηση με βάση τη θεωρία πιθανοτήτων
   - Υιοθέτηση ανεκτού επιπέδου διακινδύνευσης, σε όρους πιθανότητας (π.χ. 1%)

Η πραγματική διακύμανση των υδρολογικών μεγεθών σε διάφορες χρονικές κλίμακες



Δεδομένα: Παροχή Ευήνου στη θέση Πόρος Ρηγανίου

Η συμπεριφορά των υδρολογικών μεγεθών (διακύμανση στο χρόνο)

- Τυχαία συμπεριφορά, αλλά σύνθετη
- Κανονικοί κύκλοι στην κλίμακα των εποχών του έτους (εποχιακή διακύμανση)
- Τυχαίες διακυμάνσεις (ακανόνιστοι κύκλοι) σε όλες τις χρονικές κλίμακες
- Χρονική και χωρική εξάρτηση
- Εμμονή σε όλες τις κλίμακες

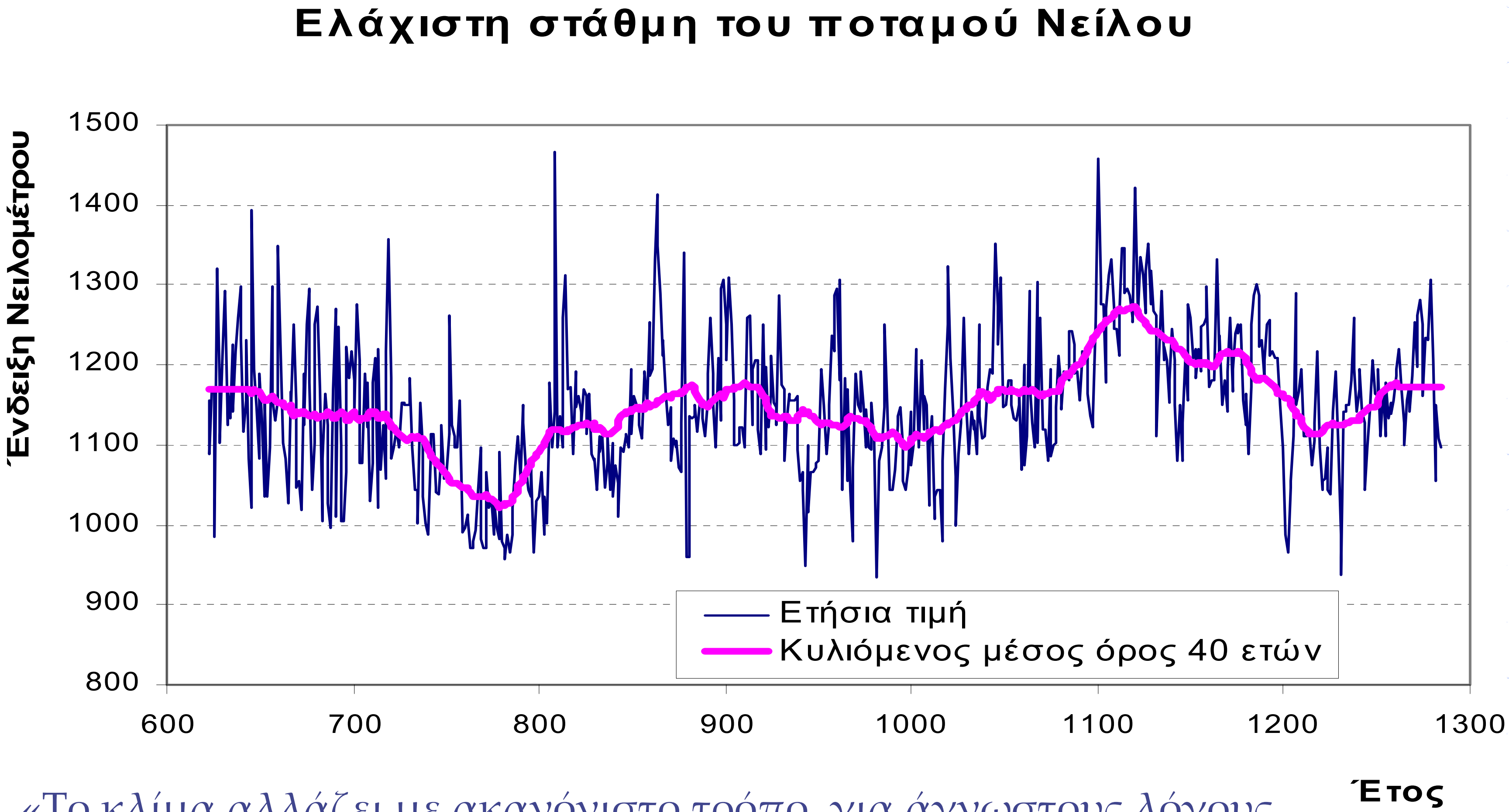
Διαφοροποίηση της συμπεριφοράς των υδρολογικών μεταβλητών από απλά τυχαία φαινόμενα

Ρουλέτα	**Παροχή ποταμού**
Διακριτό και πεπερασμένο σύνολο δυνατών τιμών (0, 1, ..., 36)	Συνεχές και άπειρο σύνολο δυνατών τιμών (από 0 μέχρι +∞) (Φαινόμενο Νώε)
Σταθερή συμπεριφορά στο χρόνο	Μεταβαλλόμενη συμπεριφορά (κανονική μεταβολή με τις εποχές – ακανόνιστη σε άλλες κλίμακες)
Γνωστή *a priori* πιθανότητα εμφάνισης κάθε τιμής (1/37)	Κατανομή πιθανοτήτων εμπειρικά διαπιστωμένη από μετρήσεις
Το αποτέλεσμα κάθε ρίψης δεν εξαρτάται από την ιστορία των προηγούμενων ρίψεων	Κάθε τιμή εξαρτάται από όλη την ιστορία των προηγούμενων τιμών (Εμμονή: Βραχυπρόθεσμη, μακροπρόθεσμη)

Υδρολογική (γεωφυσική) εμμονή

- Ανακάλυψη από τον E. H. Hurst (1951) στα πλαίσια της μελέτης του Υψηλού Φράγματος Aswan στο Νείλο ⇒ Φαινόμενο Hurst
- Πρώτη μαθηματική μοντελοποίηση από τον Mandelbrot (1965-1971) ⇒ Φαινόμενο Ιωσήφ
- Σχετίζεται με μεταβολές στο κλίμα
- Δυσμενείς συνέπειες στην αξιοποίηση υδατικών πόρων (αύξηση αβεβαιότητας)

Υδρολογική εμμονή: Διαπίστωση με βάση τη χρονοσειρά του Νειλομέτρου



«Το κλίμα αλλάζει με ακανόνιστο τρόπο, για άγνωστους λόγους, σε όλες τις χρονικές κλίμακες» (National Research Council, 1991)

Δυσκολία στον τρόπο εκτίμησης πιθανοτήτων σύνθετων γεγονότων

- Παράδειγμα: Αν (α) χαρακτηρίσουμε ως ξηρό έτος κάθε έτος στο οποίο ο ετήσιος όγκος απορροής ενός ποταμού είναι μικρότερος ή ίσος των 3 εκατομμυρίων m^3, και (β) γνωρίζουμε ότι η πιθανότητα ενός ξηρού έτους είναι 1/10, ποιά είναι η πιθανότητα δύο διαδοχικά χρόνια να είναι ξηρά;
- Αντίστοιχο παράδειγμα στη ρουλέτα: ποια είναι η πιθανότητα σε δύο διαδοχικές ρίψεις να έχουμε αποτέλεσμα μικρότερο ή ίσο του 3;

Απάντηση: Δεν είναι εύκολο να δοθεί με κλασικές μαθηματικές μεθόδους

Απάντηση: $(4/37)^2$

Επιστημονικοί κλάδοι που επιστρατεύονται για την απάντηση στο προηγούμενο ερώτημα

1. **Θεωρία πιθανοτήτων**: Θεμέλιο των υπολογισμών
2. **Στατιστική**: Εκτίμηση της κατανομής πιθανότητας με βάση ένα δείγμα μετρήσεων της παροχής
3. **Θεωρία στοχαστικών ανελίξεων**: Μαθηματική περιγραφή της εξάρτησης των μεγεθών στο χρόνο
4. **Προσομοίωση**: Υπολογιστική μαθηματική τεχνική – Βασίζεται στον πειραματισμό πάνω σε συνθετικές σειρές

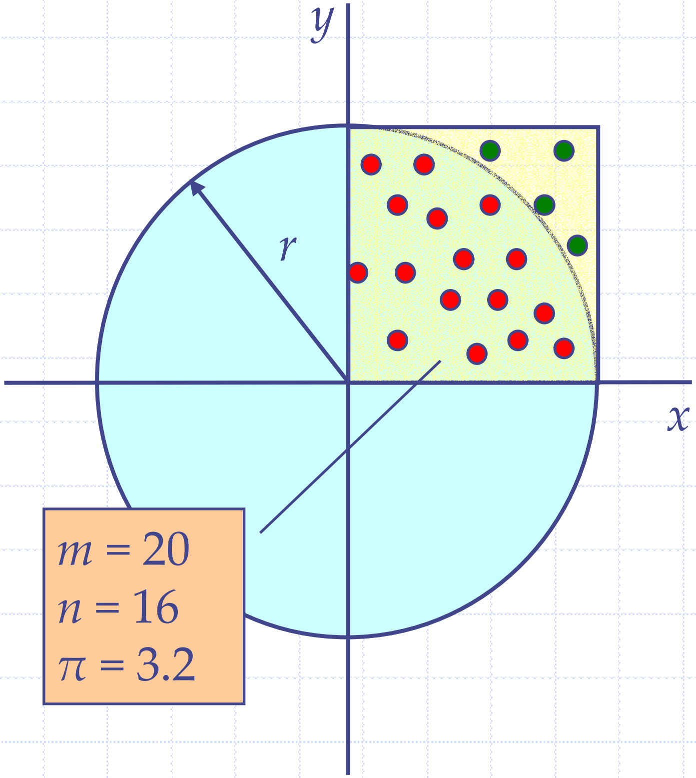
Ιστορία της στοχαστικής προσομοίωσης (ή μεθόδου Monte Carlo)

- Συνδυάζεται με την ανάπτυξη των των μαθηματικών και της φυσικής στα μέσα του 20ου αιώνα αλλά και των υπολογιστών
- Ανακαλύφθηκε από τον Πολωνό μαθηματικό Stanislaw Ulam το 1946 (Ο Ulam εργαζόταν στην ομάδα του Los Alamos)
- Ο Ulam συνέλαβε τη μέθοδο ενώ έπαιζε έριχνε πασιέντζες όταν αρρώστησε και προσπαθούσε να εκτιμήσει την πιθανότητα να του «βγει» η πασιέντζα
- Ο ίδιος περιγράφει την ιστορία ως εξής:
  «Αφού έχασα πολύ χρόνο να εκτιμήσω την πιθανότητα με καθαρά συνδυαστικά μαθηματικά, διερωτήθηκα γιατί να μη χρησιμοποιήσω μια πιο πρακτική μέθοδο, αντί της αφαιρετικής σκέψης, δηλαδή να τη ρίξω ας πούμε εκατό φορές και να μετρήσω πόσες φορές βγήκε»

Ιστορία της στοχαστικής προσομοίωσης (ή μεθόδου Monte Carlo) (2)

- Αμέσως μετά, η μέθοδος χρησιμοποιήθηκε για την επίλυση προβλημάτων συγκρούσεων ουδετερονίων από τους φυσικούς και μαθηματικούς του Los Alamos (John von Neumann, Nicholas Metropolis, Enrico Fermi), αφού κωδικοποιήθηκε στον πρώτο υπολογιστή ENIAC
- Η «επίσημη» ιστορία της μεθόδου ξεκινά το 1949 με μια δημοσίευση των Metropolis και Ulam
- Από τη δεκαετία του 1970 η προσομοίωση χρησιμοποιείται σε προβλήματα υδατικών πόρων
- Η έρευνα για τις στοχαστικές μεθόδους στους υδατικούς πόρους εξακολουθεί και εντείνεται

Ένα απλό παράδειγμα για την έκταση των εφαρμογών της προσομοίωσης



$m = 20$
$n = 16$
$\pi = 3.2$

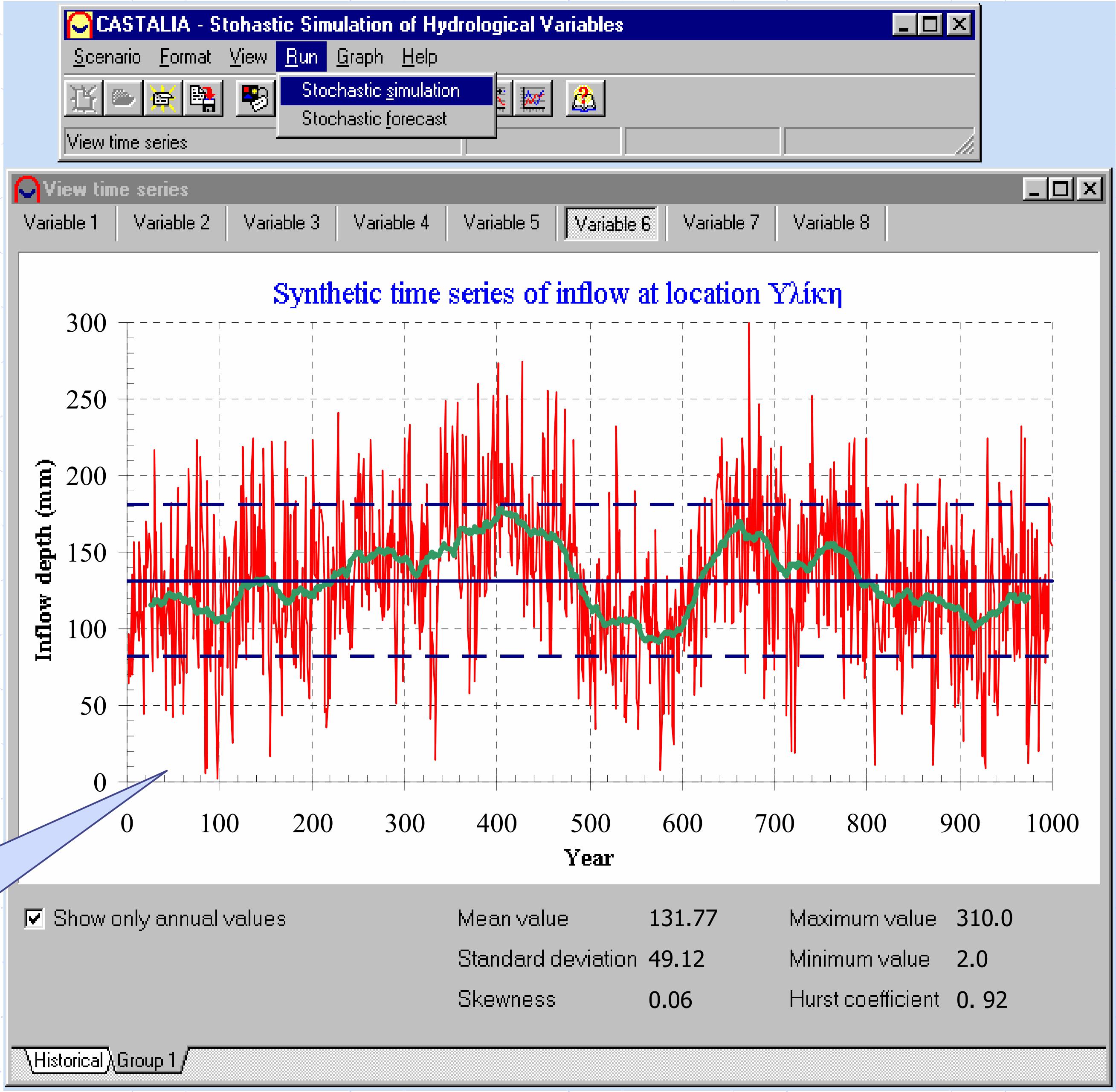
Υπολογισμός του αριθμού π

1. Μέσω μιας γεννήτριας τυχαίων ομοιόμορφων αριθμών παράγονται m ζεύγη (x, y) στο διάστημα [0, 1]
2. Μετριούνται τα σημεία εκείνα τα οποία βρίσκονται μέσα στο τεταρτοκύκλιο, ήτοι τα σημεία για τα οποία ισχύει $x^2 + y^2 \leq 1$
3. Αν n το πλήθος των σημείων αυτών, τότε ο λόγος n / m αποτελεί μέτρο εκτίμησης του αριθμού $\pi / 4$ (λόγος των εμβαδών του τεταρτοκυκλίου προς το τετράγωνο)
4. Η ακρίβεια εκτίμησης του π εξαρτάται από το πλήθος m

Στοχαστική προσομοίωση φυσικών υδρολογικών διεργασιών

Κατασκευή συνθετικών εισροών 1000 ετών στην Υλίκη με τον υδρολογικό προσομοιωτή «Κασταλία»

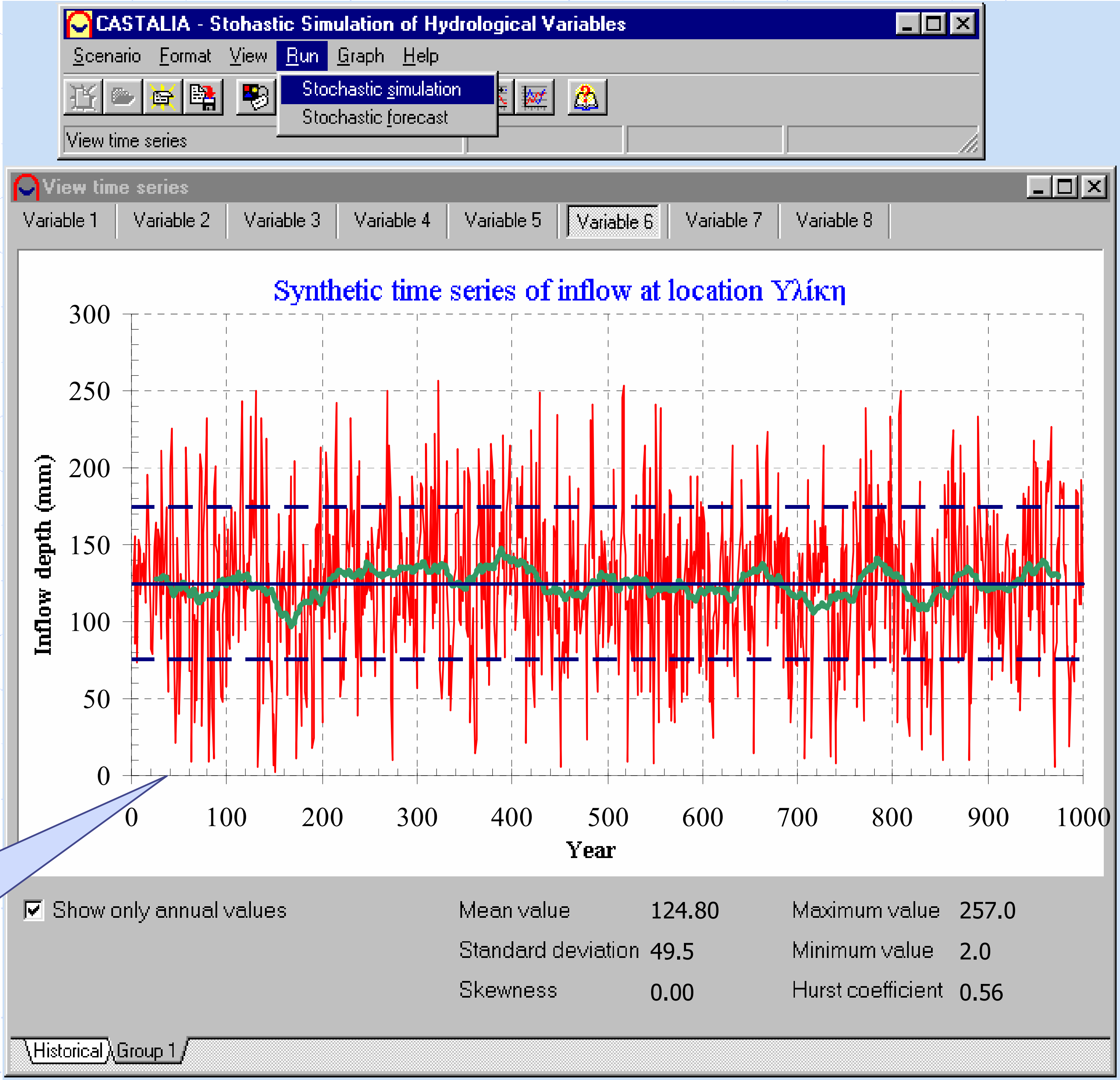
Περίπτωση 1: Με αναπαραγωγή της μακροπρόθεσμης εμμονής



Στοχαστική προσομοίωση φυσικών υδρολογικών διεργασιών (2)

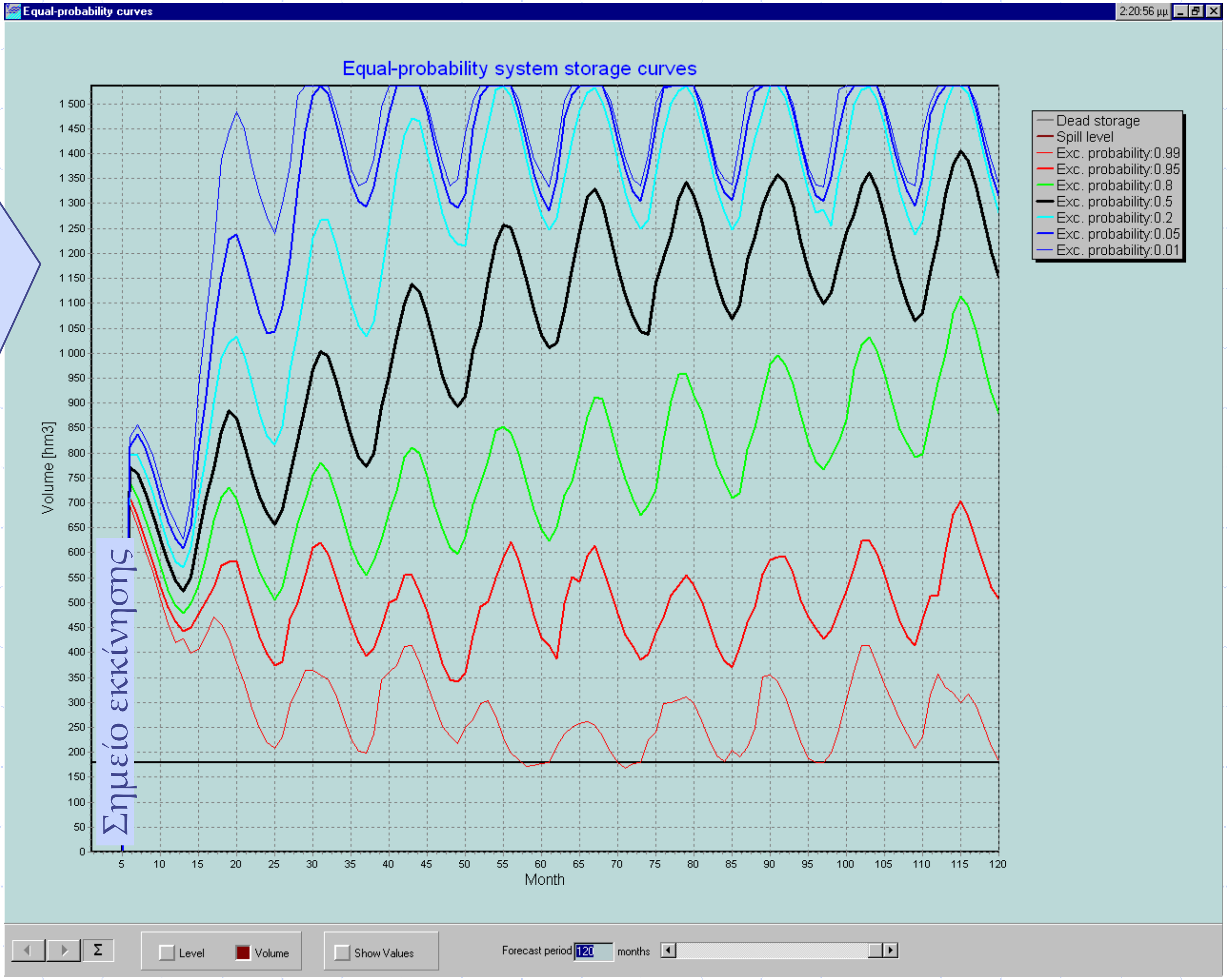
Κατασκευή συνθετικών εισροών 1000 ετών στην Υλίκη με τον υδρολογικό προσομοιωτή «Κασταλία»

Περίπτωση 2: Χωρίς αναπα-ραγωγή της μακροπρόθε-σμης εμμονής



Στοχαστική προσομοίωση ολοκληρωμένου υδροσυστήματος – Εφαρμογή στη στοχαστική πρόγνωση

Εξέλιξη των αποθεμάτων του υδροδοτικού συστήματος της Αθήνας για τα επόμενα 10 χρόνια και για διάφορα επίπεδα πιθανότητας (Εκτίμηση με βάση τα αποτελέσματα 200 προσομοιώσεων με ισάριθμα σενάρια εισροών και με αναπαραγωγή της μακροπρόθεσμης εμμονής)

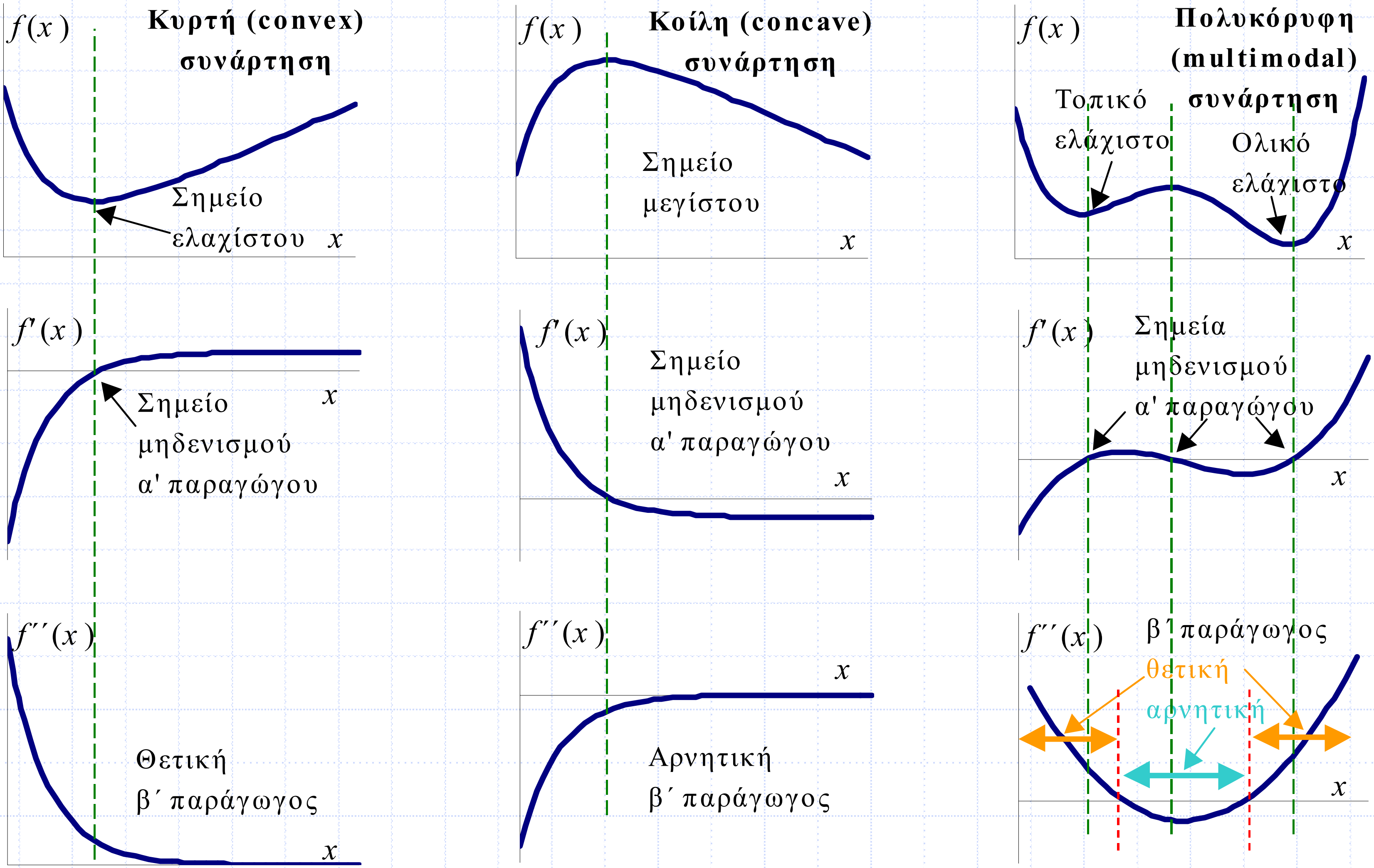


Βασική διαφοροποίηση στην προσομοίωση των φυσικών και τεχνητών συνιστωσών ενός υδροσυστήματος

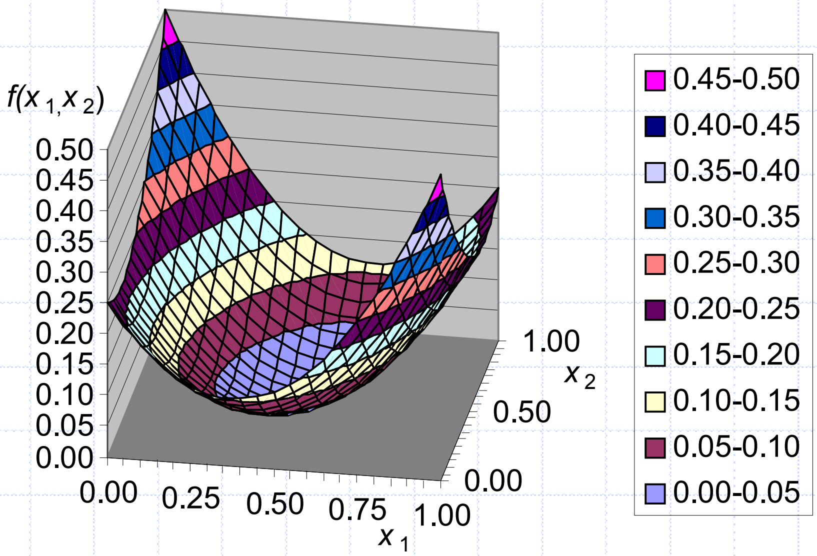
- Στις φυσικές συνιστώσες (βροχή, φυσική απορροή) δεν έχουμε δυνατότητα παρέμβασης
- Στις τεχνητές συνιστώσες (φράγματα, υδραγωγεία, αντλιοστάσια) έχουμε δυνατότητα παρέμβασης
- Ασκούμε αυτή τη δυνατότητα σε τρόπο ώστε να έχουμε την **καλύτερη δυνατή επίδοση**

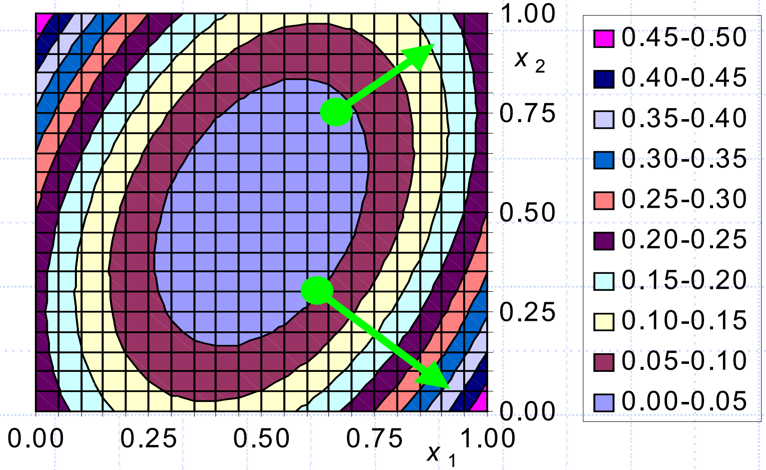
1. Εντοπισμός και ποσοτική έκφραση των τρόπων παρέμβασης $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ ← **Μεταβλητές ελέγχου**
2. Ποσοτικοποίηση της επίδοσης συναρτήσει των παρεμβάσεων $f(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ ← **Μέτρο επίδοσης ή αντικειμενική συνάρτηση**
3. Εύρεση των τιμών των μεταβλητών ελέγχου που δίνουν την **ακρότατη** (κατά περίπτωση ελάχιστη ή μέγιστη δυνατή) τιμή της $f(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ ← **Αλγόριθμος βελτιστοποίησης**

Η βελτιστοποίηση για απλή πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής



Η βελτιστοποίηση για απλή πραγματική συνάρτηση διανυσματικής μεταβλητής





Διανυσματική μεταβλητή: $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$ (χώρος δύο διαστάσεων)

Πραγματική συνάρτηση:

$$f(\mathbf{x}) = (x_1 - 0.5)^2 + 0.5(x_2 - 0.5)^2 - 0.5(x_1 - 0.5)(x_2 - 0.5)$$

Το γράφημα της συνάρτησης στο πεδίο ($0 \le x_1 \le 1$, $0 \le x_2 \le 1$) φαίνεται στα διπλανά σχήματα (πάνω τριδιάστατη προοπτική απεικόνιση, κάτω διδιάστατη απεικόνιση με μορφή ισοτιμικών καμπυλών).

Κλίση:

$$\mathrm{grad}(f) = \nabla f = \left(\frac{df}{d\mathbf{x}}\right)^T = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}\right]^T =$$

$$[2(x_1 - 0.5) - 0.5\,(x_2 - 0.5),\ (x_2 - 0.5) - 0.5\,(x_1 - 0.5)]^T$$

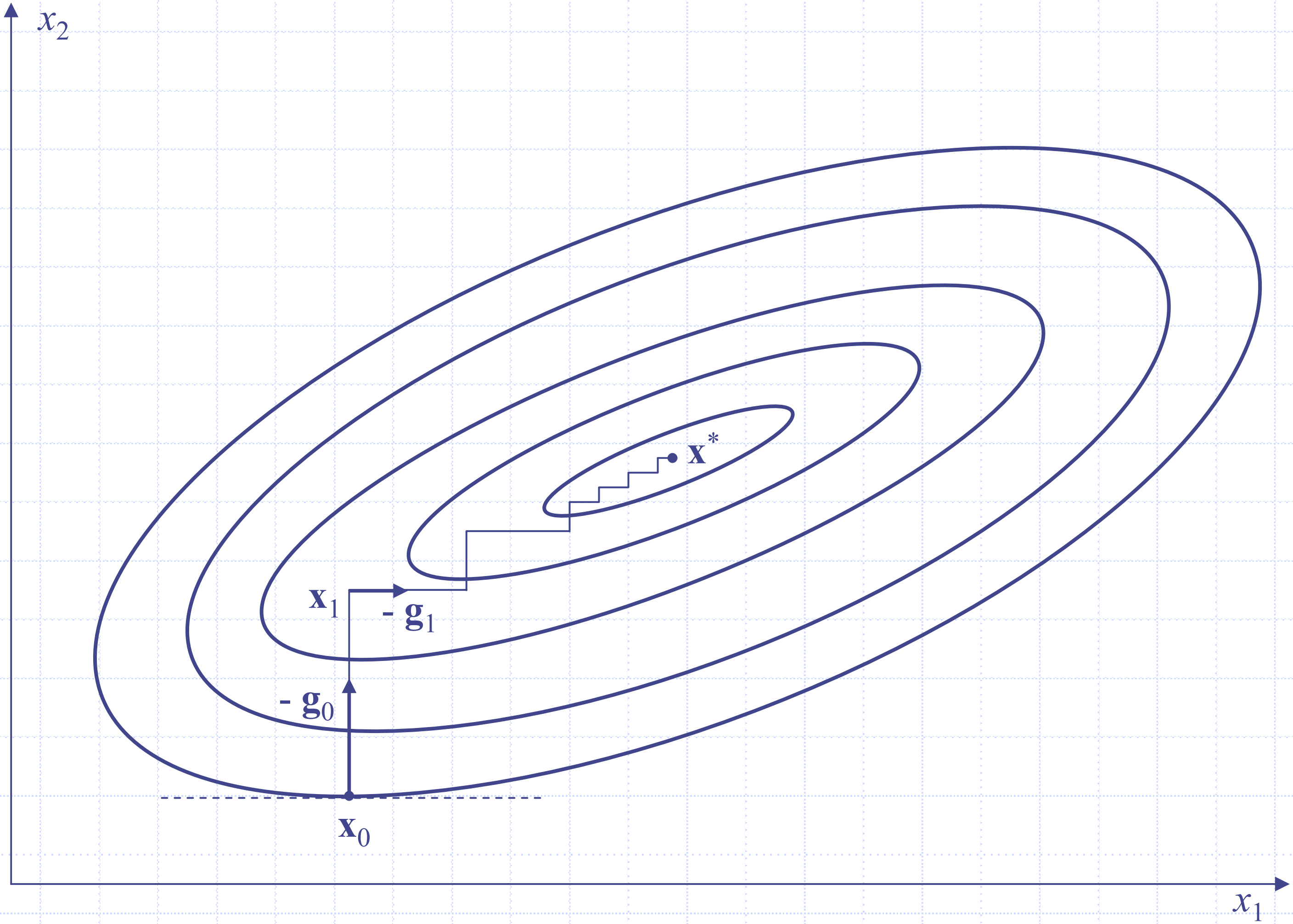
Παραδείγματα τιμών κλίσης:

Για $\mathbf{x} = [0.6, 0.3]^T$, $\mathrm{grad}(f) = [0.3, -0.25]^T$

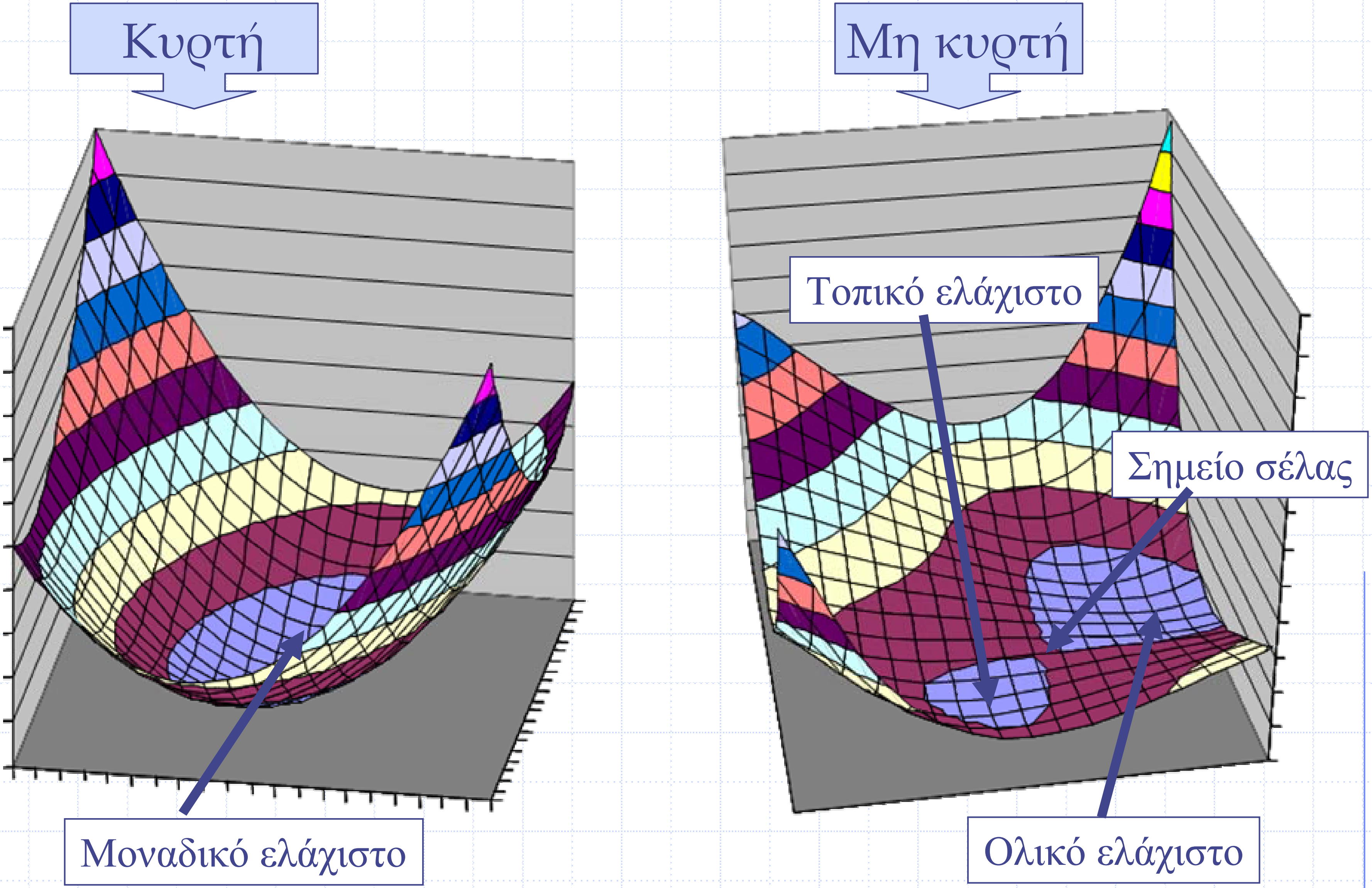
Για $\mathbf{x} = [0.65, 0.75]^T$, $\mathrm{grad}(f) = [0.175, 0.175]^T$

Συνθήκη ακροτάτου: $\mathrm{grad}(f) = \mathbf{0}$

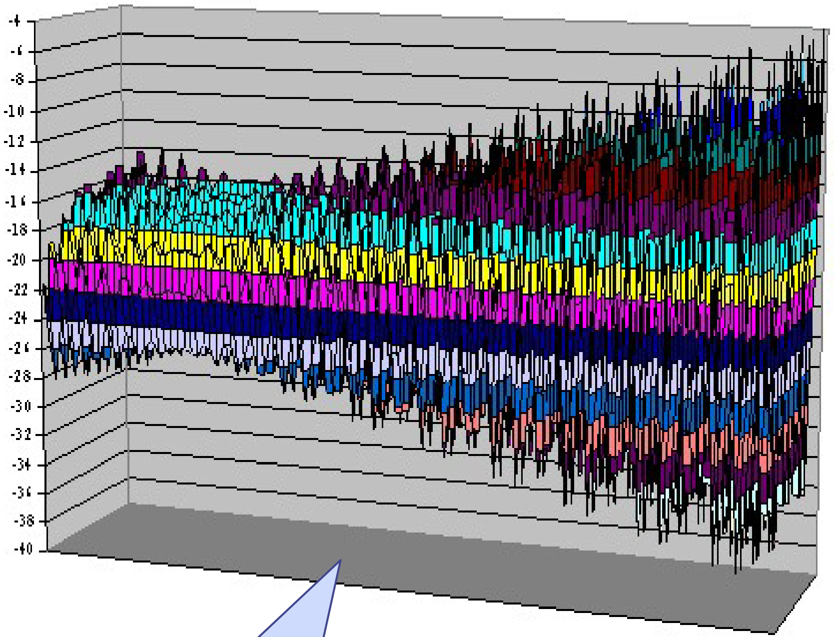
Εντοπισμός ελαχίστου με τη μέθοδο της πιο απότομης κατάβασης

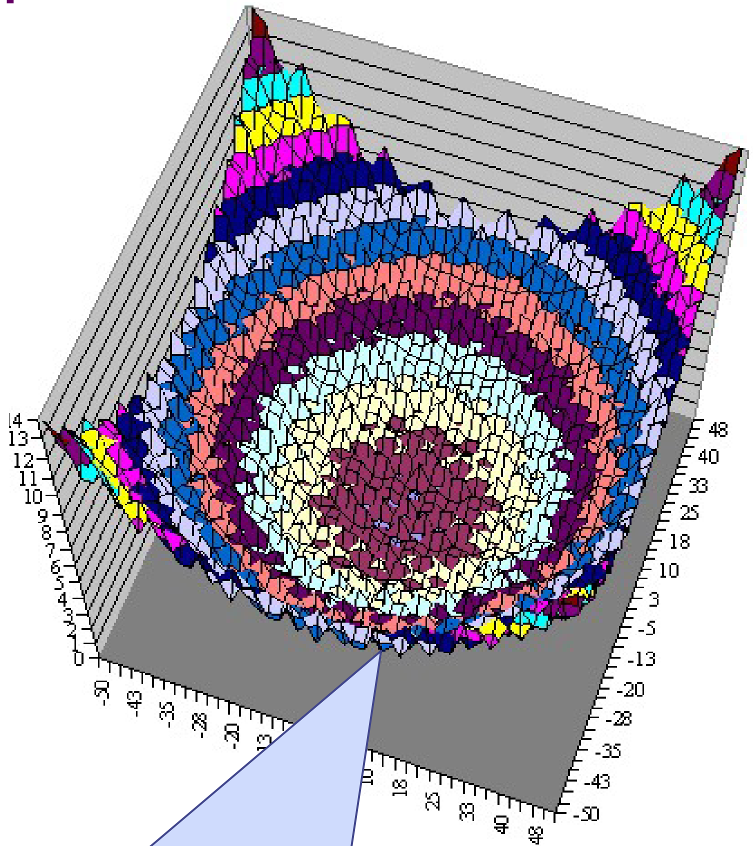


Κυρτές και μη κυρτές διανυσματικές συναρτήσεις



Παραδείγματα έντονα μη κυρτών (πολυκόρυφων) διανυσματικών συναρτήσεων



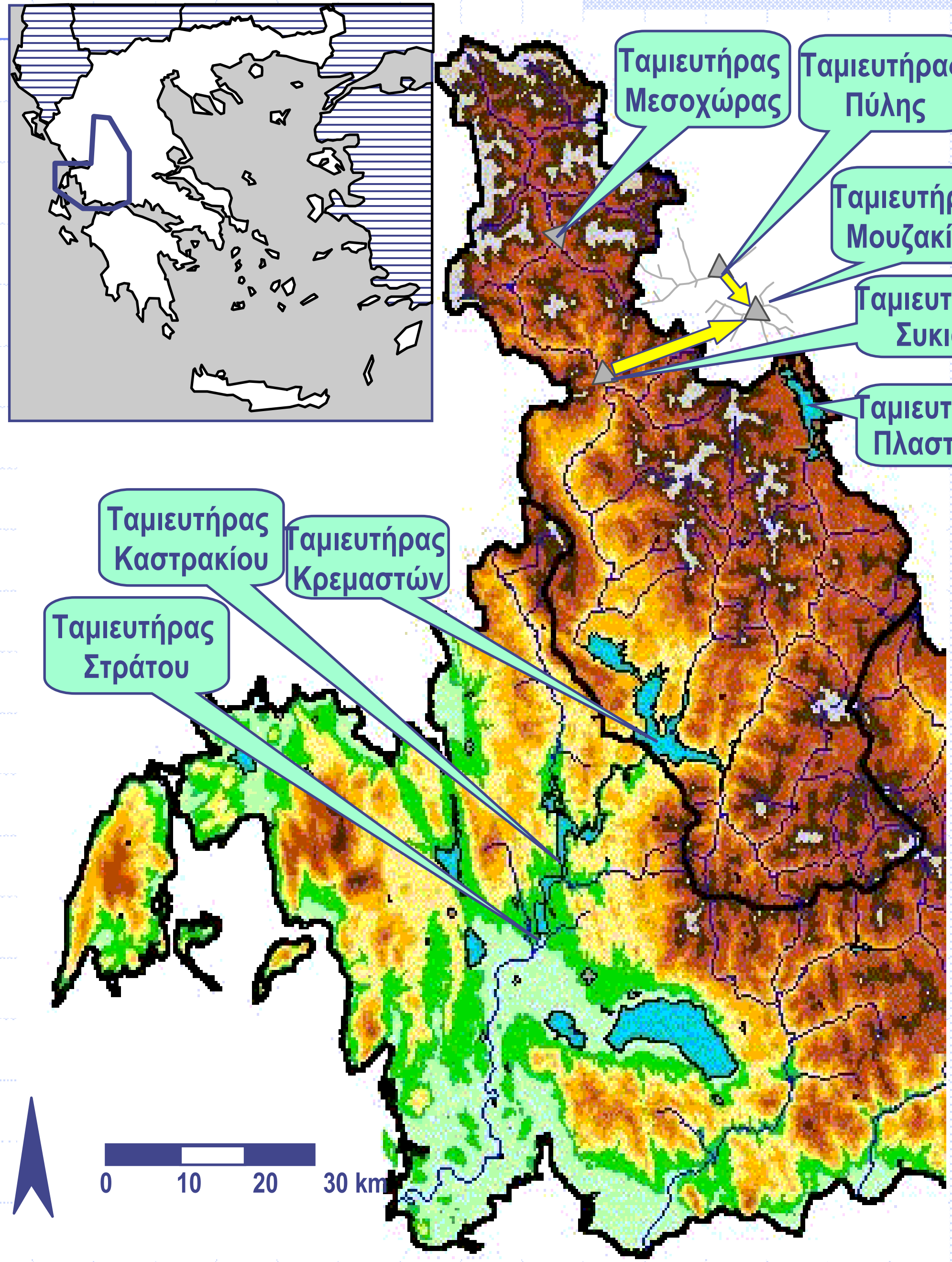


Συνάρτηση Michalewicz
$f(x_1, x_2) = -21.5 + x_1 \sin(4\pi x_1) + x_2 \sin(20\pi x_2)$

Συνάρτηση Griewank (για $n = 2$)
$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_{12} + x_2^2 + \ldots + x_n^2)/400 - \cos(x_1/\sqrt{1}) \cos(x_2/\sqrt{2}) \ldots \cos(x_n/\sqrt{n}) + 1$

Εντοπισμός ολικού ακροτάτου σε πολυκόρυφες διανυσματικές συναρτήσεις

- Δεν υπάρχει *εγγυημένη* μεθοδολογία εντοπισμού του ολικού ακροτάτου
- Μέθοδοι κλασικών μαθηματικών (π.χ. της πιο απότομης κατάβασης) ➔ εγκλωβισμός σε τοπικά ακρότατα
- Μέθοδοι διακριτοποίησης και απαριθμητικής αναζήτησης ➔ «κατάρα» της διαστατικότητας
- Μέθοδοι τυχαίας αναζήτησης ➔ αργή & μη αντικειμενική διαδικασία
- Μέθοδοι συνδυασμού κλασικών μαθηματικών και τυχαίας αναζήτησης ➔ η πιο πρόσφορη μέθοδος αλλά δεν εγγυάται τον εντοπισμό της βέλτιστης λύσης
- Παράδειγμα: Προσομοιωμένη ανόπτηση ➔ προσδιορίζουμε την κατεύθυνση κατάβασης αλλά επιτρέπουμε να κινηθούμε και ανάποδα (με δεδομένη πιθανότητα) για να αποφύγουμε τον εγκλωβισμό



Τελικό παράδειγμα: Μελέτη του υδροσυστήματος Αχελώου-Θεσσαλίας

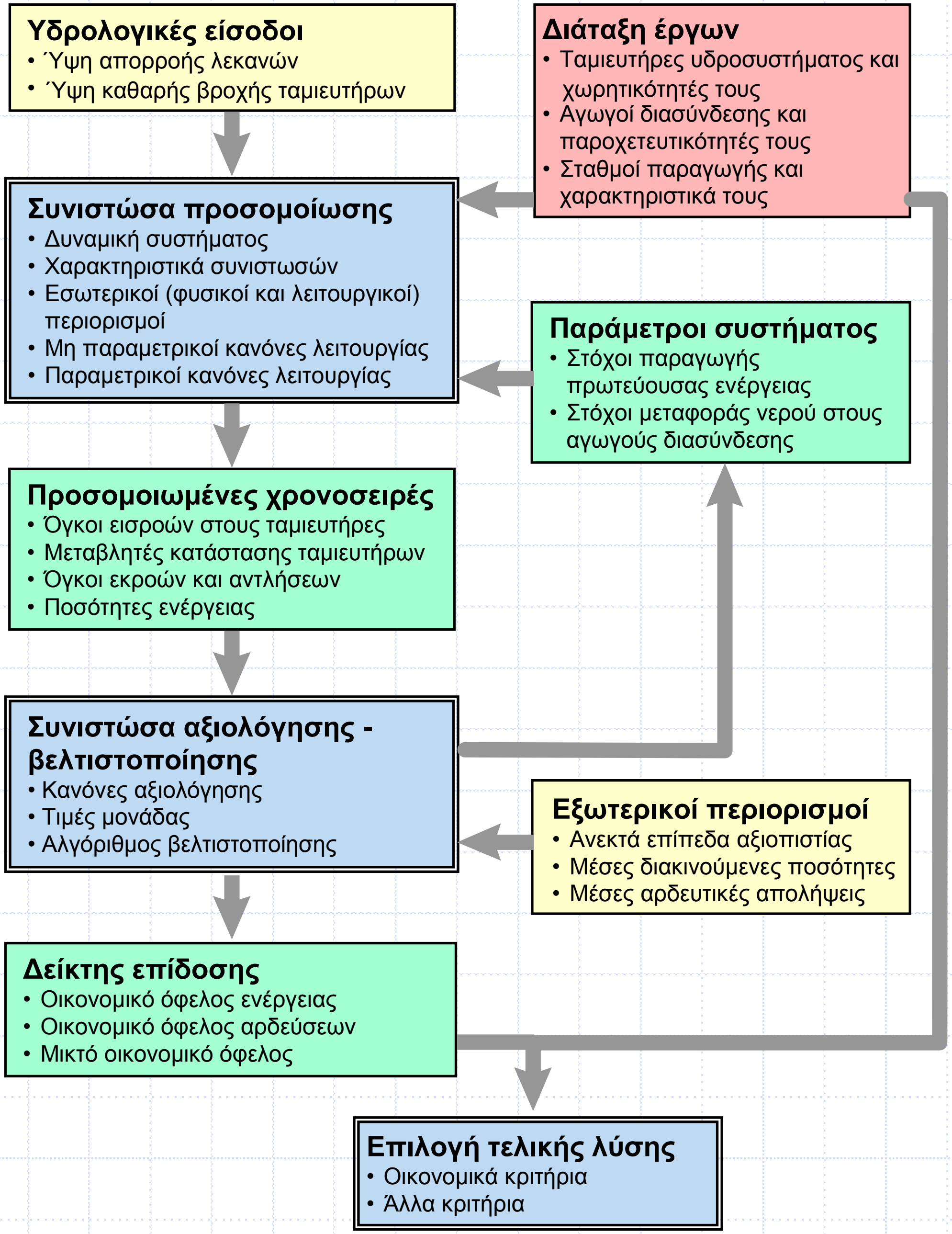
- 5 ταμιευτήρες στον Αχελώο (+Πλαστήρα)
- Σενάριο εκτροπής στη Θεσσαλία με 2 επιπλέον ταμιευτήρες
- 7 υδροηλεκτρικοί σταθμοί (κατά μέγιστο)
- Σύστημα αγωγών εκτροπής
- Κύρια χρήση: Υδροηλεκτρική ενέργεια
- Δευτερεύουσα χρήση: άρδευση
- Περιβαλλοντικές δεσμεύσεις

Σχηματοποίηση του υδροσυστήματος Αχελώου - Θεσσαλίας

Η σχηματοποίηση βοηθά:

- Στην κατανόηση της λειτουργίας του συστήματος
- Στην οργάνωση των πληροφοριών
- Στην αναγνώριση των ουσιωδών στοιχείων
- Στην κατασκευή του μαθηματικού μοντέλου

Διάρθρωση του συνολικού μαθηματικού μοντέλου του υδροσυστήματος Αχελώου-Θεσσαλίας



Στόχος του μοντέλου: Επαναθεώρηση της Γενικής Διάταξης των Έργων Εκτροπής του Αχελώου προς τη Θεσσαλία (Ρυθμιστικοί όγκοι, υδροηλεκτρικοί σταθμοί)

Καταληκτικά σχόλια

- Το θεμέλιο της τεχνολογίας είναι τα μαθηματικά
- Όσο πιο υψηλή είναι η τεχνολογία τόσο πιο βαθιά είναι τα μαθηματικά της θεμέλια
- Στη διαχείριση των υδατικών πόρων έχουν ιδιαίτερη σημασία τα μαθηματικά της αβεβαιότητας
- Στα φυσικά συστήματα η φυσική αβεβαιότητα και το ρίσκο δεν μπορεί να μειωθούν – μπορεί όμως να ποσοτικοποιηθούν
- Η τεχνολογία, με την κατασκευή έργων και τη λήψη τεκμηριωμένων αποφάσεων (βασισμένων σε μαθηματικές μεθόδους), επιτρέπει τη μείωση – όχι όμως την εξάλειψη – της αβεβαιότητας και του ρίσκου

ΕΠΙΛΟΓΟΣ: Τα μαθηματικά εργαλεία δεν είναι πανάκεια