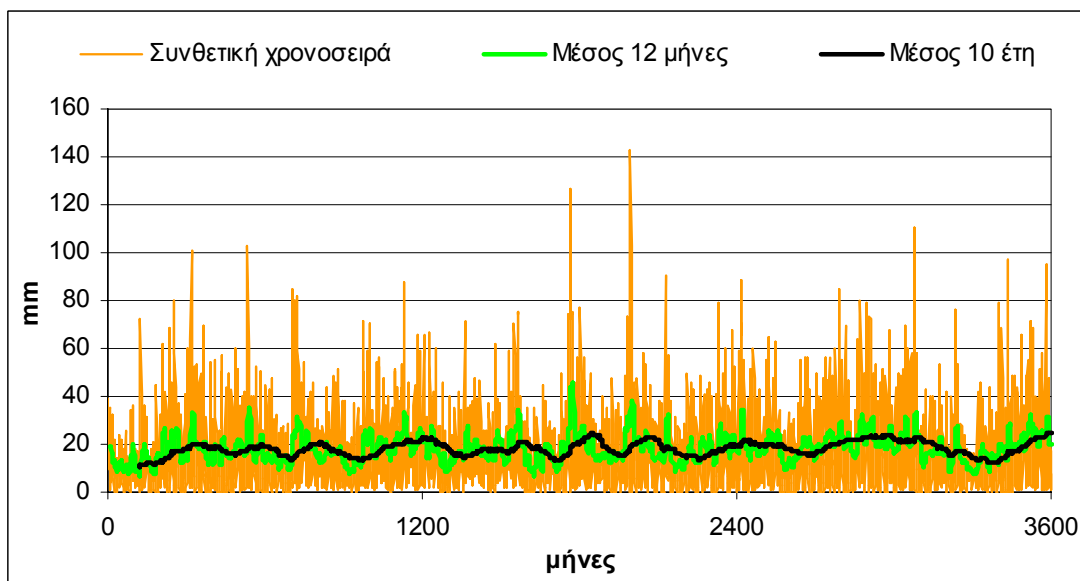




ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΥΔΑΤΙΚΩΝ ΠΟΡΩΝ, ΥΔΡΑΥΛΙΚΩΝ & ΘΑΛΑΣΣΙΩΝ ΕΡΓΩΝ

ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΚΥΚΛΟΣΤΑΣΙΜΩΝ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ
ΥΔΡΟΛΟΓΙΚΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΜΕ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΗΣ
ΒΡΑΧΥΠΡΟΘΕΣΜΗΣ ΜΝΗΜΗΣ ΚΑΙ ΤΗΣ
ΜΑΚΡΟΠΡΟΘΕΣΜΗΣ ΕΜΜΟΝΗΣ



Ανδρέας Λαγγούσης

Αθήνα, Ιούλιος 2003

Επιβλέπων: Δ. Κουτσογιάννης, Αναπληρωτής Καθηγητής

στην μνήμη του φίλου μου Τζάκ

Ευχαριστίες

Έχοντας πλέον φθάσει στο τέλος μίας αρκετά δύσκολης αλλά και ιδιαίτερα ενδιαφέρουσας προσπάθειας, θέλω να ευχαριστήσω όλους όσους άμεσα και έμμεσα με βοήθησαν στο εγχείρημά μου αυτό.

Ένα ιδιαίτερα μεγάλο ευχαριστώ θέλω να απευθύνω στον Καθηγητή μου και πάνω από όλα εγκάρδιο φίλο Δημήτρη Κουτσογιάννη για τις τόσο χρήσιμες συμβουλές του, την ψυχολογική υποστήριξη που μου παρείχε καθ' όλη τη διάρκεια αυτής μου της προσπάθειας, και τις ατελείωτες ώρες που πέρασε τόσο στο γραφείο του όσο και στο τηλέφωνο ακούγοντας τα ανακύπτοντα κάθε φορά προβλήματα αλλά και τις επιτυχίες της εφαρμογής του κάθε μοντέλου.

Σε καμία όμως περίπτωση δεν μπορώ να ξεχάσω και μία καινούργια φίλια που δημιούργησα μέσα στα πλαίσια της παρούσας εργασίας. Ο Ανδρέας Ευστρατιάδης, υποψήφιος Διδάκτωρ και ο νέος μου φίλος, στάθηκε στο πλευρό μου από την αρχή αυτής της προσπάθειάς μέχρι και το τέλος της, φθάνοντας μάλιστα στο σημείο να διαβάσει εξονυχιστικά αυτήν την εργασία με σκοπό να με συμβουλευσει κυρίως πάνω σε θέματα διατύπωσης.

Δεν μπορώ, όμως, να παραλείψω να αναφερθώ και σε κάποια πρόσωπα που κυριολεκτικά σημάδευσαν τη ζωή μου παρέχοντάς μου τις απαραίτητες βάσεις τόσο στην επιστήμη των Μαθηματικών, όσο και στην επιστήμη του Υδραυλικού Μηχανικού. Ο Σταύρος Δροσάκης, Καθηγητής δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, ήταν αυτός που πρώτος με δίδαξε ότι τα Μαθηματικά εκτός από ένα συναρπαστικό παιχνίδι είναι και ένα εξαιρετικά χρήσιμο εργαλείο για την κατανόηση της φυσικής πραγματικότητας. Ο Νικόλαος Ιωακειμίδης, Καθηγητής Μαθηματικών στην Πολυτεχνική Σχολή του Πανεπιστημίου Πατρών, ήταν ο άνθρωπος που με στήριξε στο 1^ο έτος των σπουδών μου, παρέχοντας μου πλούσια βιβλιογραφία σε θέματα εφαρμοσμένων μαθηματικών στην επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού αλλά και ατελείωτες συμβουλές γύρω από την υγεία μου και στο *διάβασμα με μέτρο* (δυστυχώς μέχρι στιγμής δεν έχω ακολουθήσει τις συμβουλές του). Ο Γεώργιος Χριστοδούλου, Καθηγητής Εφαρμοσμένης Υδραυλικής του Ε.Μ.Π., είναι ο άνθρωπος στον οποίο οφείλω το ότι ακολούθησα την κατεύθυνση του Υδραυλικού Μηχανικού, αφού με το μάθημα της *Μηχανικής των Ρευστών* με εισήγαγε στον μαγευτικό κόσμο του νερού. Η Μαρία Μιμίκου, Καθηγήτρια Επιφανειακής Υδρολογίας του Ε.Μ.Π, είναι ο άνθρωπος στον οποίο οφείλω την μεγάλη μου αγάπη για την

Υδρολογία, διότι με το μάθημα της *Τεχνικής Υδρολογίας* με δίδαξε τους νόμους που περιγράφουν τις φυσικές διεργασίες, οι οποίες διέπουν τον υδρολογικό κύκλο.

Ένα μεγάλο ευχαριστώ θέλω επίσης να απευθύνω σε όλα ανεξαιρέτως τα μέλη του τομέα Υδατικών Πόρων Υδραυλικών & Θαλασσίων Έργων της σχολής των Πολιτικών Μηχανικών του Ε.Μ.Π., που μου παρείχαν ανιδιοτελώς όλα τα εφόδια της γνώσης που σήμερα με κάνουν περήφανο που φοίτησα σε ένα τόσο αξιόλογο ίδρυμα.

Ακόμη θέλω να ευχαριστήσω όλους όσους διαβάσουν την παρούσα εργασία, αλλά και να τους ζητήσω συγγνώμη για τον τρόπο παραθέσεως της εξισώσεως (6.28) του κεφαλαίου 6, το *μέγεθος* της οποίας δεν κατάφερα να μειώσω όσο και αν προσπάθησα.

Τελειώνοντας, θέλω να πω ένα τεράστιο ευχαριστώ στους γονείς μου και στον αδελφό μου, οι οποίοι με ανέχονται καθημερινά και μου συμπαραστέκονται συνεχώς σε κάθε νέα μου προσπάθεια.

Ανδρέας Λαγγούσης

Ιούλιος 2003

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες	i
Περίληψη	vi
Abstract	vii
1 Εισαγωγή	1
1.1 Γενικά.....	1
1.2 Αντικείμενο της εργασίας.....	3
1.3 Ενδιαφέροντα σημεία.....	4
1.4 Διάρθρωση της εργασίας.....	5
2 Επισκόπηση στοχαστικών μοντέλων	8
2.1 Η ιστορική εξέλιξη της στοχαστικής υδρολογίας.....	8
2.2 Ορισμοί.....	9
2.3 Μονομεταβλητά μοντέλα οικογένειας ARMA.....	10
2.4 Στάσιμα πολυμεταβλητά μοντέλα.....	20
2.5 Κυκλοστάσιμα πολυμεταβλητά μοντέλα.....	23
2.6 Μακροπρόθεσμη εμμογή, εντοπισμός και ποσοτικοποίησή της.....	33
2.7 Στάσιμα μονομεταβλητά μοντέλα αναπαραγωγής της μακροπρόθεσμης εμμογής.....	40
2.8 Στάσιμα πολυμεταβλητά μοντέλα αναπαραγωγής της μακροπρόθεσμης εμμογής.....	50
2.9 Μοντέλα επιμερισμού και μετασχηματισμοί αποκατάστασης συμβατότητας μοντέλων διαφορετικής κλίμακας.....	53
3 Στοιχεία άλγεβρας μητρώων και μεθόδων βελτιστοποίησης συναρτήσεων	59
3.1 Στοιχεία άλγεβρας μητρώων.....	59
3.2 Ευθείες επίπεδα και υπερεπίπεδα σε διανυσματικούς χώρους.....	69
3.3 Βελτιστοποίηση συναρτήσεων.....	70
3.4 Το γενικευμένο αντίστροφο μητρώο.....	79
4 Στατιστική ανάλυση ιστορικών χρονοσειρών	82
4.1 Ιστορική χρονοσειρά μέσω ετησίων θερμοκρασιών (Jones <i>et al.</i> , 1998).....	82
4.2 Συσχετισμένες ιστορικές χρονοσειρές μηνιαίων υψών βροχόπτωσης και απορροής.....	84

5	Ανάπτυξη πολυμεταβλητού μοντέλου που βασίζεται στη χρήση ενός μοντέλου MPAR(1) σε συνδυασμό με φίλτρο SMA (MPARSMAF).....	92
5.1	Παρουσίαση μοντέλου.....	92
5.2	Εφαρμογή και έλεγχος του μοντέλου.....	100
5.3	Σχόλια πάνω στο μοντέλο.....	109
6	Ανάπτυξη μονομεταβλητού μοντέλου SMA με περιοδικά μεταβαλλόμενες παραμέτρους (PSMA).....	111
6.1	Παρουσίαση μοντέλου.....	111
6.2	Εφαρμογή και έλεγχος του μοντέλου.....	121
6.3	Σχόλια πάνω στο μοντέλο.....	127
7	Ανάπτυξη μονομεταβλητού μοντέλου που βασίζεται στον διαχωρισμό της κυκλοστασιμότητας και της μακροπρόθεσμης μνήμης (Splitmodel).....	128
7.1	Παρουσίαση μοντέλου.....	128
7.2	Εφαρμογή και έλεγχος του μοντέλου.....	156
7.3	Σχόλια πάνω στο μοντέλο.....	161
8	Σύγκριση μοντέλων.....	163
9	Συμπεράσματα - Προτάσεις.....	169
	Βιβλιογραφία.....	172
	Παράρτημα Α.....	177
A.1	Παρουσίαση μοντέλου PPSMA.....	177
A.2	Εφαρμογή και έλεγχος μοντέλου.....	180
A.3	Σχόλια πάνω στο μοντέλο.....	186
	Παράρτημα Β.....	187
B.1	Ανάπτυξη πολυμεταβλητού μοντέλου βασιζόμενου σε τυχαίες διακυμάνσεις πολλαπλής κλίμακας (3MPAR1).....	187
	Παράρτημα Γ.....	196
Γ.1	Πρόγραμμα για την εφαρμογή του μοντέλου SMA.....	196
	Παράρτημα Δ.....	200
Δ.1	Πρόγραμμα για την εφαρμογή του μοντέλου MPAR(1).....	200
	Παράρτημα Ε.....	215
E.1	Πρόγραμμα για την εφαρμογή του μοντέλου MPARSMAF.....	215
	Παράρτημα ΣΤ.....	231
ΣΤ.1	Πρόγραμμα βελτιστοποίησης παραμέτρων μοντέλου PSMA.....	231
ΣΤ.2	Πρόγραμμα βελτιστοποίησης παραμέτρων μοντέλου PPSMA.....	249

ΣΤ.3	Πρόγραμμα παραγωγής συνθετικών χρονοσειρών.....	269
Παράρτημα Z	273
Z.1	Πρόγραμμα βελτιστοποίησης των παραμέτρων του Splitmodel.....	273
Z.2	Πρόγραμμα προσδιορισμού αυτοσυνδιασπορών με χρήση του γενικευμένου αντίστροφου μητρώου ελάχιστης νόρμας.....	296
Z.3	Πρόγραμμα προσδιορισμού των παραμέτρων του μοντέλου SMA	302
Z.4	Πρόγραμμα βελτιστοποίησης των παραμέτρων του μοντέλου PFMA.....	305
Z.5	Πρόγραμμα παραγωγής συνθετικών χρονοσειρών.....	321

Περίληψη

Κατά την παραγωγή συνθετικών υδρολογικών χρονοσειρών σε εποχιακή κλίμακα είναι σημαντικό να εξασφαλίζεται η διατήρηση των εποχιακών στατιστικών χαρακτηριστικών και της βραχυπρόθεσμης μνήμης της μελετούμενης στοχαστικής ανελίξεως. Εξίσου όμως σημαντική, κρίνεται η αναπαραγωγή τόσο των στατιστικών χαρακτηριστικών της ετήσιας ιστορικής χρονοσειράς όσο και της συμπεριφοράς αυτής σε μεγαλύτερες του έτους χρονικές κλίμακες. Η εν λόγω υπερετήσια συμπεριφορά, γνωστή και ως «φαινόμενο Hurst», έχει εντοπιστεί σε μεγάλο αριθμό υδρολογικών και κλιματολογικών χρονοσειρών και επηρεάζει σε μεγάλο βαθμό τόσο τον προγραμματισμό όσο και τον σχεδιασμό των υδροσυστημάτων.

Στην περίπτωση που γίνεται χρήση μοντέλων εποχιακής κλίμακας, η διατήρηση των ετήσιων στατιστικών χαρακτηριστικών του ιστορικού δείγματος και της συμπεριφοράς αυτού σε υπερετήσια κλίμακα είναι μία ιδιαίτερα επίπονη διαδικασία και τις περισσότερες φορές αγνοείται.

Οι τεχνικές επιμερισμού αποτελούν τον μόνο τρόπο για την παραγωγή συνθετικών χρονοσειρών που είναι συμβατές με το ιστορικό δείγμα σε περισσότερες από μία χρονικές κλίμακες ενδιαφέροντος, όπως είναι η ετήσια και η εποχιακή. Οι εν λόγω τεχνικές υλοποιούνται σε δύο ή περισσότερα βήματα, όπου στο πρώτο βήμα παράγονται ετήσιες χρονοσειρές που διαδοχικά επιμερίζονται σε μικρότερες του έτους χρονικές κλίμακες. Ο επιμερισμός, όμως, παρουσιάζει κάποια προβλήματα (π.χ. εκτίμηση παραμέτρων), ανακρίβειες και γενικά είναι μία αργή διαδικασία.

Εναλλακτικά προτείνεται μία νέα μεθοδολογία, βάσει της οποίας η αναπαραγωγή των στατιστικών χαρακτηριστικών γίνεται σε μηνιαία κλίμακα, χωρίς χρήση τεχνικών επιμερισμού, και κατά τρόπο ώστε να εξασφαλίζεται ταυτόχρονη διατήρηση τόσο των ετήσιων στατιστικών χαρακτηριστικών όσο και της υπερετήσιας συμπεριφοράς της ιστορικής χρονοσειράς, με άμεσο αποτέλεσμα την αξιόπιστη αναπαραγωγή του φαινομένου Hurst.

Abstract

In generating synthetic time series of hydrologic processes at sub-annual scale it is important to preserve seasonal characteristics and short-term persistence. At the same time, it is equally important to preserve annual characteristics and over year scaling behaviour. This scaling behaviour, which is equivalent to the Hurst phenomenon, has been detected in a large number of hydroclimatic series and affects seriously planning and design of hydrosystems.

However, when seasonal models are used, the preservation of annual characteristics and overyear scaling is a difficult task and is often ignored.

Disaggregation techniques are the only way to produce synthetic series that are consistent with historical series in several time scales, from seasonal to multiyear, simultaneously. Such techniques involve two or more steps, where in the first step annual series are generated, which are subsequently disaggregated to finer scales. However, disaggregation involves several difficulties (e.g. in parameter estimation), inaccuracies and is a slow procedure.

As an alternative, a new methodology is proposed that directly operates on seasonal time scale, avoiding disaggregation, and simultaneously preserves annual statistics and the scaling properties on overyear time scales thus respecting the Hurst phenomenon.

1 Εισαγωγή

1.1 Γενικά

Μέσα στα πλαίσια της ορθής διαχείρισης των διαθέσιμων υδατικών πόρων ανέκυψε η ανάγκη του βέλτιστου υδρολογικού σχεδιασμού των προς κατασκευή υδραυλικών έργων, καθώς και η ανάγκη εξεύρεσης κατά το δυνατόν βέλτιστων σεναρίων λειτουργίας των ήδη υπαρχόντων υδραυλικών έργων.

Για την πραγματοποίηση όμως μίας αξιόπιστης μελέτης ενός υδρολογικού συστήματος απαιτείται η ύπαρξη υδρολογικών χρονοσειρών μεγάλου μήκους. Είναι προφανές πως τα υπάρχοντα ιστορικά δείγματα των μετρημένων πραγματοποιήσεων υδρολογικών μεταβλητών (π.χ. μέση μηνιαία παροχή σε δεδομένη θέση ενός ποταμού, μέσο μηνιαίο ύψος επιφανειακής βροχοπτώσεως σε μία λεκάνη απορροής) ακόμα και αν περιέχουν το σύνολο της μόνης αξιόπιστης διαθέσιμης υδρολογικής πληροφορίας, δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν αυτούσια, αφού το μήκος τους είναι ιδιαίτερα περιορισμένο¹.

Σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν, προκύπτει η ανάγκη της κατασκευής συνθετικών πραγματοποιήσεων των υπό εξέταση υδρολογικών μεταβλητών, οι οποίες θα είναι στατιστικά όμοιες με τα διαθέσιμα ιστορικά δείγματα αλλά με μήκος ανεξάρτητο του μήκους των ιστορικών δειγμάτων και εξαρτώμενου μόνο από τις ανάγκες της εκάστοτε πραγματοποιούμενης αναλύσεως. Επισημαίνεται, ότι τα συνθετικά δείγματα σε καμία περίπτωση δεν μπορούν να επεκτείνουν ή να προσαυξήσουν την ιστορική υδρολογική πληροφορία. Απλά περιέχουν ένα τμήμα της πληροφορίας αυτής και μόνο.

Η κατασκευή συνθετικών υδρολογικών χρονοσειρών ανάγεται στην χρήση μεθόδων στοχαστικής αναλύσεως. Πριν όμως χρησιμοποιήσουμε κάποιο στοχαστικό μοντέλο από τα ήδη υπάρχοντα ή πριν αναπτύξουμε κάποιο καινούργιο στοχαστικό μοντέλο, πρέπει να αποφασίσουμε ποια από τα άπειρα σε πλήθος στατιστικά χαρακτηριστικά του ιστορικού δείγματος θα είχε φυσικό και πρακτικό νόημα να αναπαράγουμε στις συνθετικές χρονοσειρές. Για παράδειγμα, δεν θα είχε ιδιαίτερο

¹ Ενδεικτικά αναφέρεται ότι το μεγαλύτερο, σε μήκος χρόνου, ιστορικό δείγμα μέσω μηνιαίων απορροών στην Ελλάδα, είναι το ιστορικό δείγμα εισροών του Βοιωτικού Κηφισού στην διώρυγα Καρδίτσας με μήκος 97 χρόνια (1907-2003).

νόημα να αναπαράγουμε στο συνθετικό δείγμα την 6^η ροπή της ετήσιας ιστορικής χρονοσειράς των απορροών σε μία θέση ενός ποταμού, αφού είναι αρκετά δύσκολο να την εκτιμήσουμε αξιόπιστα αλλά και να αντιληφθούμε τα οφέλη από μία τέτοια αναπαραγωγή. Έτσι, η φειδωλή χρήση στατιστικών χαρακτηριστικών που αναπαράγονται συνθετικά πρέπει να αποτελεί κύρια μέριμνα του μελετητή ή του ερευνητή. Έχοντας πλέον αποφασίσει ποια στατιστικά χαρακτηριστικά του ιστορικού δείγματος έχει φυσικό νόημα να διατηρήσουμε, πρέπει να επιλέξουμε (από τα ήδη υπάρχοντα) ή να αναπτύξουμε το κατά το δυνατόν απλούστερο και ταχύτερο μοντέλο που θα μας αναπαράγει αξιόπιστα τα στατιστικά χαρακτηριστικά ενδιαφέροντος του ιστορικού δείγματος. Για παράδειγμα, αν υπάρχει το απλό μοντέλο (Α) που μας εξασφαλίζει την αναπαραγωγή των στατιστικών χαρακτηριστικών ενδιαφέροντος, δεν υπάρχει κανένας λόγος να επιλέξουμε την χρήση ενός συνθετότερου μοντέλου (Β) που θα αναπαράγει τα ίδια στατιστικά χαρακτηριστικά κατά τρόπο συνθετότερο. Με τους παραπάνω συλλογισμούς καταλήξαμε στην απαίτηση για φειδωλότητα στις χρησιμοποιούμενες από το μοντέλο παραμέτρους, που αποτελεί μία ακόμη μέριμνα για τον μελετητή ή τον ερευνητή.

Το ερώτημα που ανακύπτει, είναι το ποια στατιστικά χαρακτηριστικά του ιστορικού δείγματος έχει φυσικό και πρακτικό νόημα να αναπαράγουμε στις συνθετικές χρονοσειρές. Η απάντηση στο παραπάνω ερώτημα σίγουρα δεν είναι μονοσήμαντη. Ανάλογα με την ακρίβεια της αναλύσεως που θέλουμε να πραγματοποιήσουμε, διαφοροποιούνται και οι απαιτήσεις τις εκάστοτε στοχαστικής αναπαραγωγής των στατιστικών χαρακτηριστικών του ιστορικού δείγματος. Πάντως στην περίπτωση που αναφερόμαστε σε φυσικές υδρολογικές χρονοσειρές περισσοτέρων από μία θέσεων ενδιαφέροντος που είναι συσχετισμένες μεταξύ τους (πολυμεταβλητή στοχαστική προσομοίωση), μία αρκετά ικανοποιητική προσέγγιση του διαθέσιμου ιστορικού δείγματος από ένα συνθετικό θα μπορούσε να επιτευχθεί με την αναπαραγωγή των ακόλουθων στατιστικών χαρακτηριστικών (Matalas *et al.*, 1976):

- της εποχιακής (μηνιαίας) μέσης τιμής της εκάστοτε μελετούμενης θέσεως,
- της μέσης τιμής του έτους της εκάστοτε μελετούμενης θέσεως,
- της εποχιακής (μηνιαίας) τυπικής απόκλισης της εκάστοτε μελετούμενης θέσεως,
- της τυπικής απόκλισης του έτους της εκάστοτε μελετούμενης θέσεως,
- του εποχιακού (μηνιαίου) συντελεστή ασυμμετρίας της εκάστοτε μελετούμενης θέσεως,

- του συντελεστή ασυμμετρίας του έτους της εκάστοτε μελετούμενης θέσεως,
- του συντελεστή αυτοσυσχέτισης (autocorrelation coefficient) της κάθε εποχής (μήνα) της εκάστοτε μελετούμενης θέσεως, με την προηγούμενη εποχή (μήνα) της ίδιας θέσεως,
- των συντελεστών ετεροσυσχέτισης (crosscorrelation coefficients) της κάθε εποχής (μήνα) της εκάστοτε μελετούμενης θέσεως, με την ίδια εποχή (μήνα) όλων των υπολοίπων υπό μελέτη θέσεων (περίπτωση πολυμεταβλητού μοντέλου).

Πέραν των προαναφερθέντων στατιστικών χαρακτηριστικών του ιστορικού δείγματος, η μακροπρόθεσμη μνήμη της ετήσιας χρονοσειράς της εκάστοτε μελετούμενης θέσεως (μακροπρόθεσμη εμμονή της ετήσιας χρονοσειράς) αποτελεί ένα καθοριστικό (αν όχι απαραίτητο) προς αναπαραγωγή στατιστικό χαρακτηριστικό (Koutsoyiannis, 2002b).

Αξίζει να επισημάνουμε, ότι ο όρος *θέση* χρησιμοποιείται στην περίπτωση που πρόκειται να γίνει ταυτόχρονη παραγωγή δύο ή περισσότερων διαφορετικών αλλά εν γένει συσχετισμένων συνθετικών χρονοσειρών, με στόχο την αναπαραγωγή των από κοινού στατιστικών χαρακτηριστικών των συσχετισμένων χρονοσειρών του ιστορικού δείγματος (π.χ. μηνιαίο ύψος απορροών στην θέση ενός ποταμού και μηνιαίο ύψος επιφανειακής βροχοπτώσεως στην λεκάνη απορροής της υπό μελέτη θέσεως του ποταμού).

1.2 Αντικείμενο της εργασίας

Αντικείμενο της παρούσας εργασίας, είναι η ανάπτυξη εύχρηστων υδρολογικών κυκλοστάσιμων στοχαστικών μοντέλων εποχιακής (μηνιαίας) κλίμακας που θα διατηρούν την βραχυπρόθεσμη μνήμη και την μακροπρόθεσμη εμμονή της ιστορικής χρονοσειράς, και ταυτόχρονα θα αναπαράγουν τα στατιστικά χαρακτηριστικά αυτής σε περισσότερες από μία χρονικές κλίμακες (ετήσια και εποχιακή). Έτσι, σκοπός των μοντέλων αυτών είναι η άμεση παραγωγή συνθετικών χρονοσειρών σε εποχιακή (μηνιαία) κλίμακα κατά τέτοιο τρόπο ώστε:

- Να διατηρούνται τα στατιστικά χαρακτηριστικά εποχιακής (μηνιαίας) κλίμακας του ιστορικού δείγματος (εποχιακές μέσες τιμές, εποχιακές τυπικές αποκλίσεις, εποχιακοί συντελεστές ασυμμετρίας, 1^{ης} τάξεως συντελεστές αυτοσυσχέτισης

μεταξύ των εποχών της ίδιας θέσεως, μηδενικής ή/και 1^{ης} τάξεως συντελεστές ετεροσυσχέτισης μεταξύ εποχών διαφορετικών θέσεων).

- Να διατηρούνται τα στατιστικά χαρακτηριστικά της ετήσιας χρονοσειράς της εκάστοτε θέσεως ενδιαφέροντος (ετήσια μέση τιμή, ετήσια τυπική απόκλιση, ετήσιος συντελεστής ασυμμετρίας, μακροπρόθεσμη εμμονή).

Η κυκλοστασιμότητα (cyclostationarity) των στοχαστικών μοντέλων που θα αναπτυχθούν στα επόμενα κεφάλαια αποσκοπεί στην αναπαραγωγή της δωδεκάμηνης περιοδικότητας των ιστορικών πραγματοποιήσεων των υδρολογικών μεταβλητών με ταυτόχρονη μέριμνα για την διατήρηση των ήδη αναφερθέντων στατιστικών χαρακτηριστικών εποχιακής κλίμακας.

Η μακροπρόθεσμη εμμονή, η οποία ανακαλύφθηκε από τον Hurst (1951) και εμφανίζεται υπό την μορφή υψηλών συντελεστών αυτοσυσχέτισης των ετήσιων φυσικών χρονοσειρών ακόμα και για μεγάλα χρονικά βήματα μετατόπισης (lags), αποτελεί ένα καθοριστικό στατιστικό χαρακτηριστικό κάθε υδρολογικής χρονοσειράς που κρίνεται σκόπιμο να αναπαράγεται.

1.3 Ενδιαφέροντα σημεία

Η τεχνική του επιμερισμού (disaggregation technique), αν και δύναται να διατηρήσει τα στατιστικά χαρακτηριστικά του ιστορικού δείγματος σε περισσότερες από μία χρονικές κλίμακες (π.χ. ετήσια και εποχιακή), παρουσιάζει κάποιες δυσκολίες (κυρίως στην εκτίμηση παραμέτρων), ανακρίβειες και γενικά αποτελεί μία αργή διαδικασία που υλοποιείται σε δύο ή περισσότερα βήματα. Στο πρώτο βήμα παράγονται συνθετικές χρονοσειρές στην ανώτερη χρονική κλίμακα (π.χ. ετήσια), οι οποίες επιμερίζονται διαδοχικά (σε επόμενα βήματα) σε μικρότερες του έτους χρονικές κλίμακες.

Την ίδια στιγμή, οι τεχνικές της άμεσης σειριακής προσομοίωσης που βασίζονται στην παραγωγή συνθετικών χρονοσειρών με αναφορά σε μία και μόνο χρονική κλίμακα (π.χ. ετήσια ή εποχιακή), δύναται να αναπαράγουν τα στατιστικά χαρακτηριστικά της ιστορικής χρονοσειράς στην χρονική κλίμακα αναφοράς. Όμως κάτι τέτοιο δεν συνεπάγεται μία ανάλογη διατήρηση σε χρονικές κλίμακες που αποτελούν πολλαπλάσια ή υποπολλαπλάσια της χρονικής κλίμακας αναφοράς.

Η μη ύπαρξη, λοιπόν, κυκλοστάσιμων στοχαστικών μοντέλων που να παράγουν άμεσα συνθετικές χρονοσειρές σε εποχιακή (μηνιαία) κλίμακα, με ταυτόχρονη διατήρηση και των ετήσιων στατιστικών χαρακτηριστικών του ιστορικού δείγματος, καθώς και της μακροπρόθεσμης εμμονής της ιστορικής χρονοσειράς ενδιαφέροντος, ήταν ο κύριος λόγος που μας οδήγησε στην έναρξη μίας προσπάθειας για την ανάπτυξη εύχρηστων τέτοιων μοντέλων.

Χρησιμοποιώντας βασικές αρχές της κλασικής στατιστικής και της θεωρίας στοχαστικών ανελίξεων, καθώς και στοιχεία θεωρίας άλγεβρας μητρώων σε συνδυασμό με μεθόδους μη γραμμικής βελτιστοποίησης πολυμεταβλητών συναρτήσεων, αναπτύξαμε τρία πλήρη μοντέλα συνθετικής αναπαραγωγής των στατιστικών χαρακτηριστικών ιστορικών υδρολογικών δειγμάτων. Εκτός των τριών αυτών μοντέλων που έδωσαν ικανοποιητικά αποτελέσματα, δοκιμάστηκαν και δύο ακόμα προσεγγίσεις τα αποτελέσματα των οποίων δεν ήταν ιδιαίτερα ικανοποιητικά.

1.4 Διάρθρωση της εργασίας

Η εργασία περιλαμβάνει, εκτός από την παρούσα εισαγωγή (Κεφάλαιο 1), οκτώ Κεφάλαια και επτά Παραρτήματα.

Στο Κεφάλαιο 2 πραγματοποιείται μία εκτενής επισκόπηση των ήδη υπαρχόντων στοχαστικών υδρολογικών μοντέλων, καθώς και των στατιστικών χαρακτηριστικών που δύνανται αυτά να αναπαράγουν αξιόπιστα. Ταυτόχρονα, και μέσα στα πλαίσια της επισκόπησης, πραγματοποιείται εφαρμογή των παρουσιαζόμενων υδρολογικών μοντέλων στην συνθετική αναπαραγωγή των στατιστικών χαρακτηριστικών φυσικών χρονοσειρών.

Στο Κεφάλαιο 3 επιχειρείται μία συνοπτική παρουσίαση των βασικών εννοιών πάνω σε θέματα άλγεβρας μητρώων και μη γραμμικής βελτιστοποίησης πραγματικών συναρτήσεων διανυσματικής μεταβλητής, με στόχο την παρουσίαση τόσο της θεωρητικής βάσης όσο και των αριθμητικών μεθόδων που χρησιμοποιούνται κατά την ανάπτυξη των στοχαστικών μοντέλων των επομένων κεφαλαίων.

Στο Κεφάλαιο 4 πραγματοποιείται η παρουσίαση και η απαραίτητη στατιστική ανάλυση των φυσικών χρονοσειρών που χρησιμοποιούνται κατά την παρουσίαση των ήδη υπαρχόντων μοντέλων, καθώς και κατά τον έλεγχο των μοντέλων που ανεπτύχθησαν στα πλαίσια της παρούσας εργασίας.

Στο Κεφάλαιο 5 αναπτύσσεται, εφαρμόζεται και ελέγχεται το πολυμεταβλητό μοντέλο MPARSMAF (Multivariate Periodic Autoregressive model with Symmetric Moving Average Filter) που βασίζεται στον συνδυασμό ενός μοντέλου MPAR(1) (Multivariate Periodic Autoregressive model) και ενός φίλτρου SMA (Symmetric Moving Average model).

Στο Κεφάλαιο 6 αναπτύσσεται, εφαρμόζεται και ελέγχεται το μονομεταβλητό μοντέλο PSMA (Periodic Symmetric Moving Average model), το οποίο όντας ένα μοντέλο Συμμετρικά Κινούμενου Μέσου όρου αλλά με περιοδικά μεταβαλλόμενες παραμέτρους δύναται να αναπαράγει την κυκλοστασιμότητα και την μακροπρόθεσμη εμμονή ιστορικών χρονοσειρών.

Στο Κεφάλαιο 7 αναπτύσσεται, εφαρμόζεται και ελέγχεται το μονομεταβλητό μοντέλο Splitmodel, το οποίο βασίζεται στην ιδέα του διαχωρισμού της βραχυπρόθεσμης μνήμης και της κυκλοστασιμότητας από την μακροπρόθεσμη εμμονή.

Στο Κεφάλαιο 8 γίνεται μία σύγκριση (κυρίως μέσω πινάκων και διαγραμμάτων) των μοντέλων που αναπτύχθηκαν, τόσο μεταξύ τους όσο και με τα ήδη υπάρχοντα χρησιμοποιούμενα μοντέλα.

Στο Κεφάλαιο 9 συνοψίζονται τα κύρια συμπεράσματα της παρούσας εργασίας, ενώ ταυτόχρονα διατυπώνονται ορισμένες προτάσεις για μελλοντική έρευνα.

Με στόχο την ελάφρυνση του κυρίως κειμένου της παρούσας εργασίας, αποφασίστηκε κάποιες προσπάθειες που έγιναν αλλά δεν έδωσαν ιδιαίτερα ικανοποιητικά αποτελέσματα να παρατεθούν στα παραρτήματα Α, Β, και τα προγράμματα που αναπτύχθηκαν στα πλαίσια της παρούσας εργασίας να παρατεθούν στα παραρτήματα Γ-Ζ.

Στο Παράρτημα Α αναπτύσσεται, εφαρμόζεται και ελέγχεται μία παραλλαγή του μοντέλου PSMA καλούμενη μοντέλο PPSMA (Parametric Periodic Symmetric Moving Average model), κατά την οποία εφαρμόζεται μία μορφή παραμετροποίησης με στόχο την μείωση του απαιτούμενου υπολογιστικού χρόνου.

Στο Παράρτημα Β αναπτύσσεται το πολυμεταβλητό μοντέλο 3MPAR1 που βασίζεται στην επαλληλία τυχαίων διακυμάνσεων πολλαπλής κλίμακας (multiple time-scale fluctuation approach). Οι εν λόγω διακυμάνσεις υλοποιούνται μέσω του αθροίσματος ενός μοντέλου MPAR(1) (Multivariate Periodic Autoregressive model) και δύο μοντέλων MAR(1) (Multivariate Autoregressive model).

Στο Παράρτημα Γ παρατίθεται το πρόγραμμα που αναπτύχθηκε για την παραγωγή συνθετικών χρονοσειρών με χρήση του μοντέλου SMA (Symmetric Moving Average model).

Στο Παράρτημα Δ παρατίθεται το πρόγραμμα που αναπτύχθηκε για την παραγωγή συνθετικών χρονοσειρών με χρήση του μοντέλου MPAR(1) (Multivariate Periodic Autoregressive model).

Στο Παράρτημα Ε παρατίθεται το πρόγραμμα που αναπτύχθηκε με στόχο την εφαρμογή και τον έλεγχο του μοντέλου MPARSMAF (Multivariate Periodic Autoregressive model with Symmetric Moving Average Filter) στην αναπαραγωγή των βραχυπρόθεσμων και μακροπρόθεσμων στατιστικών χαρακτηριστικών υδρολογικών χρονοσειρών.

Στο παράρτημα ΣΤ παρατίθενται τα προγράμματα που αναπτύχθηκαν στα πλαίσια της εφαρμογής και ελέγχου των μοντέλων PSMA (Periodic Symmetric Moving Average model) και PPSMA (Parametric Periodic Symmetric Moving Average model) που αναπτύχθηκαν στο κεφάλαιο 6 και στο παράρτημα Α αντίστοιχα.

Τέλος, στο Παράρτημα Ζ παρατίθενται τα προγράμματα που αναπτύχθηκαν με στόχο την εφαρμογή και τον έλεγχο του μοντέλου Splitmodel στην αναπαραγωγή των βραχυπρόθεσμων και μακροπρόθεσμων στατιστικών χαρακτηριστικών υδρολογικών χρονοσειρών.

2 Επισκόπηση στοχαστικών μοντέλων

Στις σελίδες που ακολουθούν γίνεται μία προσπάθεια εκτενούς αναφοράς στη βιβλιογραφία με ιδιαίτερη έμφαση στα υπάρχοντα στοχαστικά μοντέλα, καθώς και στα στατιστικά χαρακτηριστικά του ιστορικού δείγματος που μπορούν αυτά να αναπαράγουν αξιόπιστα.

2.1 Η ιστορική εξέλιξη της στοχαστικής υδρολογίας

Οι συνθετικές χρονοσειρές εισήχθησαν στην υδρολογία, και μάλιστα σε μελέτες αξιοπιστίας υδατικών πόρων, στις αρχές του 20^{ου} αιώνα. Ο Hazen (1914) θέλοντας να παράγει συνθετικές χρονοσειρές απορροών, χρησιμοποίησε μία εμπειρική μέθοδο¹ βάσει της οποίας οι συνθετικές χρονοσειρές αποτελούσαν προϊόν ιστορικών χρονοσειρών διαφορετικών ποταμών που είχαν συνδυαστεί μεταξύ τους μετά από κατάλληλη προσαρμογή (Grygier & Stedinger, 1990). Η μεγάλη πρόοδος που σημείωσαν τα μαθηματικά και η φυσική την δεκαετία του 1940, καθώς και η ανάπτυξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών είχαν ως αποτέλεσμα την σταδιακή θεμελίωση της στοχαστικής υδρολογίας. Πιο συγκεκριμένα, η ανάπτυξη της μεθόδου Monte Carlo από τον Stanislaw Ulam το 1946 αποτέλεσε σημείο σταθμό για την στοχαστική προσομοίωση γενικά, και για την στοχαστική υδρολογία ειδικότερα².

Η μέθοδος Monte Carlo σύντομα γνώρισε μεγάλη ανάπτυξη και χρησιμοποιήθηκε τόσο από τον Ulam όσο και από άλλους μεγάλους μαθηματικούς και φυσικούς (John von Neumann, Nicholas Metropolis, Enrico Fermi) του ερευνητικού κέντρου Los Alamos για τον αριθμητικό υπολογισμό ορισμένων ολοκληρωμάτων που προέκυπταν κατά την επίλυση των διαφορικών εξισώσεων που διέπουν το φαινόμενο της διαχύσεως νετρονίων. Τυπικά, η ιστορία της μεθόδου Monte Carlo ξεκινά το 1949 με την επιστημονική δημοσίευση των Metropolis & Ulam.

¹ Επισημαίνεται ότι το 1914 δεν είχε αναπτυχθεί ακόμα η θεωρία στοχαστικών ανελίξεων.

² Ο Ulam εφηύρε την μέθοδο Monte Carlo παίζοντας το παιχνίδι της πασιέτζας κατά την διάρκεια της ανάρρωσής του από μία ασθένεια. Προσπαθώντας να υπολογίσει την πιθανότητα να κερδίσει στο εν λόγω παιχνίδι διαπίστωσε ότι οι αναλυτικές μέθοδοι παρουσιάζονταν ιδιαίτερα επίπονες και έτσι σκέφτηκε να επαναλάβει το παιχνίδι εκατό φορές και γνωρίζοντας πλέον τον αριθμό των παιχνιδιών που είχε κερδίσει να υπολογίσει αντί της θεωρητικής μία πιθανότητα που βασίζεται στην δειγματοληπτική τεχνική (πειραματική πιθανότητα).

Στον τομέα των υδατικών πόρων το πρώτο καθοριστικό βήμα έγινε από τον Barnes (1954) με την παραγωγή ασυσχέτιστων ετήσιων δεδομένων για μία θέση ενδιαφέροντος που ακολουθούν κανονική κατανομή. Ακολουθούν οι εργασίες των Maass *et al.*(1962) και Thomas & Fiering (1962) πάνω στην παραγωγή χρονικά συσχετισμένων ασύμμετρων συνθετικών χρονοσειρών, οι οποίες περιέχονται στο βιβλίο *Design of Water Resource Systems*. Πρώτος ο Beard (1965) και αργότερα ο Matalas (1967) δημοσιεύουν τις εργασίες τους πάνω στην ταυτόχρονη παραγωγή συσχετισμένων ιστορικών χρονοσειρών για περισσότερες από μία θέσεις ενδιαφέροντος. Το 1970 κυκλοφορεί το κλασσικό βιβλίο *Time Series Analysis, Forecasting and Control* (Box & Jenkins, 1970) που πραγματεύεται την ανάλυση και την σύνθεση χρονοσειρών, την ταξινόμηση των στοχαστικών μοντέλων και την εφαρμογή τους στην προσομοίωση και την πρόγνωση. Το 1976 στο κλασσικό βιβλίο *Systems Approach to Water Management* (Matalas *et al.*, 1976) πραγματοποιείται η κωδικοποίηση των διάφορων μοντέλων πολυμεταβλητής στοχαστικής προσομοίωσης υδρολογικών διεργασιών, ενώ το 1985 κυκλοφορεί το βιβλίο *Random Functions in Hydrology* (Bras *et al.*, 1985) που εμβάθυνε στην χρήση της στοχαστικής υδρολογίας.

2.2 Ορισμοί

Πριν προχωρήσουμε στην επισκόπηση των ήδη υπαρχόντων στοχαστικών μοντέλων κρίνεται σκόπιμο να οριστούν κάποιες βασικές έννοιες που χρησιμοποιούνται στις ακόλουθες σελίδες.

Με τον όρο *στοχαστική ανέλιξη* ορίζουμε την απειροπληθή ακολουθία τυχαίων αριθμών με δείκτη τον χρόνο ή τον χώρο (Paroulis, 1990).

Με τον όρο *στάσιμη στοχαστική ανέλιξη* ορίζουμε την απειροπληθή ακολουθία τυχαίων αριθμών με δείκτη τον χρόνο, της οποίας τα στατιστικά χαρακτηριστικά παραμένουν σταθερά και ανεξάρτητα των τιμών που λαμβάνει ο δείκτης (Paroulis, 1990).

Με τον όρο *κυκλοστάσιμη στοχαστική ανέλιξη* ορίζουμε την απειροπληθή ακολουθία τυχαίων αριθμών με δείκτη τον χρόνο, της οποίας τα στατιστικά χαρακτηριστικά μεταβάλλονται περιοδικά συναρτήσει των τιμών του δείκτη (Gardner, 1990).

Με τον όρο *χρονοσειρά* ορίζουμε την πραγματοποίηση μίας στοχαστικής ανελίξεως (Papoulis, 1990).

Με τον όρο *μαθηματικό μοντέλο* ορίζουμε την αφαιρετική αλλά κατά το δυνατόν πλήρη απεικόνιση ενός πραγματικού συστήματος με ένα σύνολο μαθηματικών σχέσεων, αριθμητικών δεδομένων και αλγορίθμων. Ένα μαθηματικό μοντέλο που βασίζεται στην θεωρία στοχαστικών ανελίξεων ή/και οι αλγόριθμοί του χρησιμοποιούν τυχαίους αριθμούς, καλείται *στοχαστικό μοντέλο*.

2.3 Μονομεταβλητά μοντέλα οικογένειας ARMA

Τα μοντέλα της οικογένειας ARMA(p, q) (Autoregressive Moving Average models) είναι μονομεταβλητά στάσιμα μοντέλα αυτοπαλινδρόμησης τάξεως p και κινούμενου μέσου όρου τάξεως q . Η γενική εξίσωση που περιγράφει την οικογένεια των μοντέλων ARMA (Μιμίκου, 1994, σελ. 193; Shaw, 1994, σελ. 394; Box & Jenkins, 1970, σελ. 74) δίδεται από την σχέση,

$$X_t = \varphi_{p,1} X_{t-1} + \varphi_{p,2} X_{t-2} + \dots + \varphi_{p,p} X_{t-p} + V_t + \theta_{q,1} V_{t-1} + \dots + \theta_{q,q} V_{t-q} \quad (2.1)$$

όπου X_t στάσιμη στοχαστική ανέλιξη, t το χρονικό διάστημα αναφοράς και V_t ασυσχέτιστες μεταξύ τους τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν δεδομένη κατανομή (μεταβλητές λευκού θορύβου).

Με βάση τα παραπάνω, η οικογένεια των μοντέλων ARMA, βασίζεται στην γραμμική συσχέτιση των προηγούμενων της χρονικής στιγμής ενδιαφέροντος πραγματοποιήσεων της τυχαίας μεταβλητής X_t , καθώς και στην γραμμική συσχέτιση των προηγούμενων της χρονικής στιγμής ενδιαφέροντος πραγματοποιήσεων του λευκού θορύβου V_t . Ο προσδιορισμός των παραμέτρων του μοντέλου $\varphi_{p,i}$ ($i = 1, \dots, p$) και $\theta_{q,i}$ ($i = 1, \dots, q$), μπορεί να πραγματοποιηθεί με την μέθοδο των ροπών (method of moments), την μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας (method of maximum likelihood), καθώς και με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων (method of least squares). Για περισσότερες πληροφορίες ο αναγνώστης παραπέμπεται στη βιβλιογραφία (Salas, 1993, σελ. 19.20-19.25; Brockwell *et al*, 1996, σελ. 369-373).

Υποκατηγορία των μοντέλων ARMA(p, q) αποτελούν τα μοντέλα AR(p) και τα μοντέλα MA(q). Τα μοντέλα AR(p) (Autoregressive models of order p , μοντέλα

αυτοπαλινδρόμησης τάξεως p) (Μιμίκου, 1994, σελ. 185-191; Brockwell *et al.*, 1996, σελ.82) που περιγράφονται από την εξίσωση,

$$X_t = \varphi_{p,1} X_{t-1} + \varphi_{p,2} X_{t-2} + \dots + \varphi_{p,p} X_{t-p} + V_t \quad (2.2)$$

προκύπτουν από τα ARMA(p, q) για $q = 0$.

Τα μοντέλα MA(q) (Moving Average models of order q , μοντέλα κινούμενου μέσου όρου τάξεως q) (Μιμίκου, 1994, σελ. 191-193; Brockwell *et al.*, 1996, σελ.82) που περιγράφονται από την εξίσωση,

$$X_t = V_t + \theta_{q,1} V_{t-1} + \dots + \theta_{q,q} V_{t-q} \quad (2.3)$$

προκύπτουν από τα ARMA(p, q) για $p=0$.

Πάντως αξίζει να αναφέρουμε ότι ενώ τα παραπάνω μοντέλα εμφανίζονται απλά ως προς τον προσδιορισμό των παραμέτρων τους για μικρές τιμές των p και q , στην περίπτωση όπου το άθροισμα των p και q υπερβεί την τιμή 2 ($p + q > 2$), τότε η διαδικασία αυτού του προσδιορισμού παύει να είναι πλέον απλή.

Στην περίπτωση που αναφερόμαστε στην υποκατηγορία των μοντέλων AR(p) και για $p > 1$, ο προσδιορισμός των παραμέτρων του μοντέλου αυτοπαλινδρόμησης απαιτεί την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος γνωστού και με τον όρο «εξισώσεις Yule – Walker» (Box & Jenkins, 1970, σελ. 56). Όπως είναι προφανές, η επίλυση αυτού του γραμμικού συστήματος είναι δυνατόν να πραγματοποιηθεί είτε με αριθμό εξισώσεων ίσο με τον αριθμό των αγνώστων, οπότε το σύστημα έχει μία ή καμία λύση, είτε με αριθμό εξισώσεων μικρότερο του αριθμού των αγνώστων, οπότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις. Στην πρώτη περίπτωση και για δεδομένο αυτοσυσχετόγραμμα της ιστορικής χρονοσειράς, είναι δυνατόν να μην μπορούμε να προσδιορίσουμε τις παραμέτρους του μοντέλου AR(p) (αδύνατο σύστημα). Στην δεύτερη περίπτωση, αναγόμαστε σε ένα πρόβλημα ευρέσεως μίας εκ των απείρων λύσεων του γραμμικού συστήματος (σύστημα αόριστο). Ένας τρόπος επίλυσης του προαναφερθέντος αόριστου συστήματος, είναι η εφαρμογή της μεθόδου του γενικευμένου αντίστροφου μητρώου ελάχιστης νόρμας για την εύρεση της ελάχιστης λύσεως (βλέπε ενότητα 3.4). Η παραπάνω μέθοδος, λόγω της μη ύπαρξης περιορισμών ως προς την τελικά επιτυγχάνομενη λύση, είναι δυνατόν να οδηγήσει σε παραμέτρους του μοντέλου που αλλοιώνουν την στασιμότητα της συνθετικής

αναπαράγωγής (Μιμίκου, 1994, σελ. 186; Box & Jenkins, 1970, σελ. 49-53). Αν θελήσουμε να εισάγουμε κάποιους περιορισμούς ως προς τις τελικά επιτυγχανόμενες από το μοντέλο αυτοσυσχετίσεις, τότε προκύπτει πρόβλημα γραμμικής βελτιστοποίησης με περιορισμούς που μπορεί να επιλυθεί με την μέθοδο Simplex (για περισσότερες πληροφορίες πάνω στην μέθοδο Simplex ο αναγνώστης παραπέμπεται στη βιβλιογραφία: Μιμίκου, 1994, σελ. 244-248; Chapra *et al.*, σελ. 381-386).

Στην περίπτωση που αναφερόμαστε στην υποκατηγορία των μοντέλων $MA(q)$ και για $q > 1$, ο προσδιορισμός των παραμέτρων του μοντέλου κινούμενου μέσου όρου απαιτεί την επίλυση ενός μη γραμμικού συστήματος (Koutsoyiannis, 2000). Όπως είναι προφανές, η επίλυση αυτού του μη γραμμικού συστήματος είναι δυνατόν να πραγματοποιηθεί είτε με αριθμό εξισώσεων ίσο με τον αριθμό των αγνώστων, είτε με αριθμό εξισώσεων μικρότερο του αριθμού των αγνώστων. Στην πρώτη περίπτωση αναγόμεστε στην εύρεση μίας εκ των λύσεων ενός μη γραμμικού συστήματος (αν βέβαια αυτή υπάρχει), ενώ στη δεύτερη περίπτωση έχουμε να επιλύσουμε ένα πρόβλημα μη γραμμικής βελτιστοποίησης.

Στην γενική περίπτωση των μοντέλων $ARMA(p, q)$, με $p + q > 1$ και $p, q \neq 0$, ο προσδιορισμός των παραμέτρων του μοντέλου αυτοπαλινδρόμησης τάξεως p και κινούμενου μέσου όρου τάξεως q , απαιτεί την βελτιστοποίηση ενός μη γραμμικού συστήματος με αριθμό εξισώσεων μικρότερου του αριθμού των αγνώστων.

Διαπιστώνουμε λοιπόν ότι τα μοντέλα της οικογένειας $ARMA$ δεν είναι ιδιαίτερα εύκολα στην χρήση τους στην περίπτωση που οι απαιτήσεις ως προς τις διατηρούμενες από το μοντέλο αυτοσυσχετίσεις παρουσιάζονται αυξημένες. Έτσι λόγω της απλότητας του προσδιορισμού των παραμέτρων τους, μόνο τα μοντέλα $AR(1)$, $AR(2)$ και $ARMA(1, 1)$ έχουν επικρατήσει και εμφανίζονται στις περισσότερες πρακτικές εφαρμογές στο πεδίο της στοχαστικής υδρολογίας.

Χαρακτηριστικά των μοντέλων οικογένειας $ARMA$

Για την εφαρμογή των μοντέλων $ARMA$, απαραίτητη προϋπόθεση είναι η ύπαρξη στασιμότητας στην στοχαστική ανέλιξη της οποίας τα στατιστικά χαρακτηριστικά θέλουμε να αναπαράγουμε συνθετικά. Για μη στάσιμες στοχαστικές ανελίξεις έχουν αναπτυχθεί τα μοντέλα $ARIMA(p, d, q)$ (Integrated Autoregressive Moving Average models) τα οποία εφαρμόζουν διαφόριση d τάξεως της μη στάσιμης

στοχαστικής ανελίξεως (Μιμίκου, 1994, σελ. 202; Brockwell *et al.*, 1996, σελ.178-185).

Τα μοντέλα $ARMA(p, q)$, στην περίπτωση που εφαρμόζονται για αναπαραγωγή των στατιστικών χαρακτηριστικών στασίμων στοχαστικών ανελίξεων είναι σε θέση να διατηρήσουν:

- την μέση τιμή της στάσιμης στοχαστικής ανελίξης,
- την τυπική απόκλιση της στάσιμης στοχαστικής ανελίξης,
- τον συντελεστή ασυμμετρίας της στάσιμης στοχαστικής ανελίξης, (εφαρμόζοντας λευκό θόρυβο με ασυμμετρία),
- τους συντελεστές αυτοσυσχέτισης της στάσιμης στοχαστικής ανελίξης, έως και χρονικό βήμα μετατόπισης $p + q$.

Μέθοδοι εφαρμογής των μοντέλων ARMA σε κυκλοστάσιμες χρονοσειρές

Η ανάγκη για απλούστευση των αριθμητικών πράξεων, οδήγησε στην εξεύρεση μεθόδων εφαρμογής των ήδη υπαρχόντων απλών στασίμων στοχαστικών μοντέλων $AR(1)$, $AR(2)$, $ARMA(1, 1)$ σε κυκλοστάσιμες χρονοσειρές (π.χ. χρονοσειρές μέσω μηνιαίων απορροών). Οι μέθοδοι αυτές βασίζονται στην εφαρμογή μετασχηματισμών στις εμπλεκόμενες τυχαίες μεταβλητές με στόχο την στασιμοποίηση της ιστορικής κυκλοστάσιμης χρονοσειράς ως προς τις περιθώριες κατανομές πιθανοτήτων των εποχών (μηνών) του έτους.

Μία τέτοια μορφή μετασχηματισμού είναι ο γραμμικός μετασχηματισμός,

$$Z_s = \frac{X_s - \mu_s}{\sigma_s} \quad (2.4)$$

γνωστός και ως «κυκλική τυποποίηση» (Cleveland *et al.*, 1990; Salas, 1993, σελ. 19.7). Με X_s συμβολίζεται η τυχαία μεταβλητή που αντιστοιχεί στην εποχή (μήνα) s , με μέση τιμή μ_s και τυπική απόκλιση σ_s . Το αποτέλεσμα του παραπάνω γραμμικού μετασχηματισμού είναι η στοχαστική ανελίξη Z_s που είναι στάσιμη ως προς την μέση τιμή της που είναι ίση με το μηδέν, και ως προς την τυπική της απόκλιση που είναι ίση με τη μονάδα.

Στην συνέχεια εφαρμογής της μεθόδου της κυκλικής τυποποίησης, προσδιορίζονται οι απαιτούμενοι από το μοντέλο συντελεστές αυτοσυσχέτισης της στασιμοποιημένης ιστορικής χρονοσειράς και εφαρμόζεται κάποιο από τα μοντέλα

της οικογένειας ARMA για την παραγωγή της ζητούμενης χρονοσειράς συνθετικών πραγματοποιήσεων. Η παραγόμενη όμως συνθετική χρονοσειρά έχει μέση τιμή μηδέν και τυπική απόκλιση μονάδα. Έτσι εφαρμόζεται στη συνθετική χρονοσειρά, ο αντίστροφος της σχέσεως (2.4) μετασχηματισμός

$$X_s = Z_s \sigma_s + \mu_s \quad (2.5)$$

Αποτέλεσμα του μετασχηματισμού (2.5) της συνθετικής χρονοσειράς, είναι η επιτυχής αναπαραγωγή των μέσων τιμών και των τυπικών αποκλίσεων των εποχών (μηνών) της ιστορικής χρονοσειράς στο παραγόμενο συνθετικό δείγμα.

Η μέθοδος της κυκλικής τυποποίησης, είναι ιδιαίτερα απλή αλλά παρουσιάζει κάποια μειονεκτήματα, τα οποία περιγράφονται στην συνέχεια.

Ως αυτήν την στιγμή έχουμε αναφέρει ότι η κυκλική τυποποίηση σε συνδυασμό με κάποιο στοχαστικό μοντέλο της οικογένειας ARMA(p, q), είναι σε θέση να εξασφαλίσει την επιτυχή αναπαραγωγή της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης της εκάστοτε εποχής (μήνα) του ιστορικού δείγματος. Επιπλέον, η γραμμικότητα της εκτιμήτριας της μέσης τιμής μας παρέχει την βεβαιότητα πως αν διατηρούνται οι μέσες τιμές των εποχών (μηνών) του ιστορικού δείγματος στο συνθετικό δείγμα, τότε διατηρείται ταυτόχρονα και η μέση τιμή της ετήσιας ιστορικής χρονοσειράς στο συνθετικό δείγμα. Κάτι ανάλογο όμως δεν συμβαίνει με την ετήσια τυπική απόκλιση της συνθετικής χρονοσειράς. Όπως εύκολα μπορεί να αποδειχθεί θεωρητικά, η διατήρηση της τυπικής αποκλίσεως των εποχιακών (μηνιαίων) συναθροίσεων (τυπική απόκλιση έτους) απαιτεί πλην της διατήρησης των διασπορών των εποχών (μηνών) και την διατήρηση όλων των συσχετίσεων μεταξύ των εποχών (μηνών), κάτι που είναι ιδιαίτερα δυσχερές.

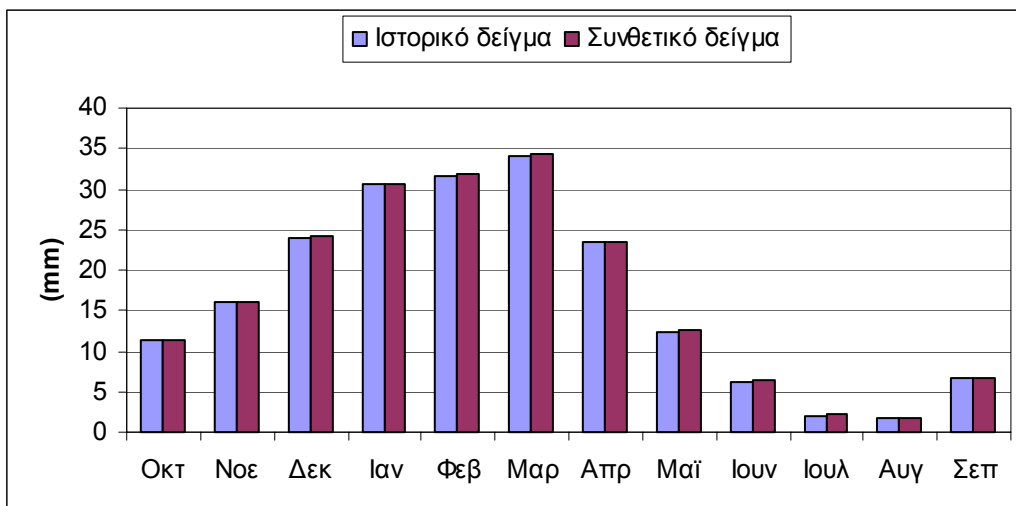
Ένα ακόμα μειονέκτημα της εφαρμογής κυκλικής τυποποίησης με σκοπό την στασιμοποίηση της ιστορικής χρονοσειράς και την μετέπειτα «κυκλοστασιμοποίηση» της συνθετικής αρχικά στάσιμης χρονοσειράς, μπορεί να εντοπισθεί στο γεγονός ότι κανένας γραμμικός μετασχηματισμός δεν είναι σε θέση να επηρεάσει τον συντελεστή ασυμμετρίας της εκάστοτε εποχής (μήνα) του συνθετικού δείγματος. Κατά αυτόν τον τρόπο ακόμα και αν χρησιμοποιήσουμε λευκό θόρυβο με ασυμμετρία στο στάσιμο στοχαστικό μοντέλο, είναι αδύνατον να επιτύχουμε την διαφοροποίηση του συντελεστή ασυμμετρίας του συνθετικού δείγματος από εποχή σε εποχή, αφού όλες οι εποχές του συνθετικού δείγματος θα έχουν εξορισμού ίσο συντελεστή

ασυμμετρίας. Σύμφωνα με όλα όσα αναφέρθηκαν είναι, προφανώς, αδύνατη και η αναπαραγωγή του ετήσιου συντελεστή ασυμμετρίας του ιστορικού δείγματος στη συνθετική χρονοσειρά.

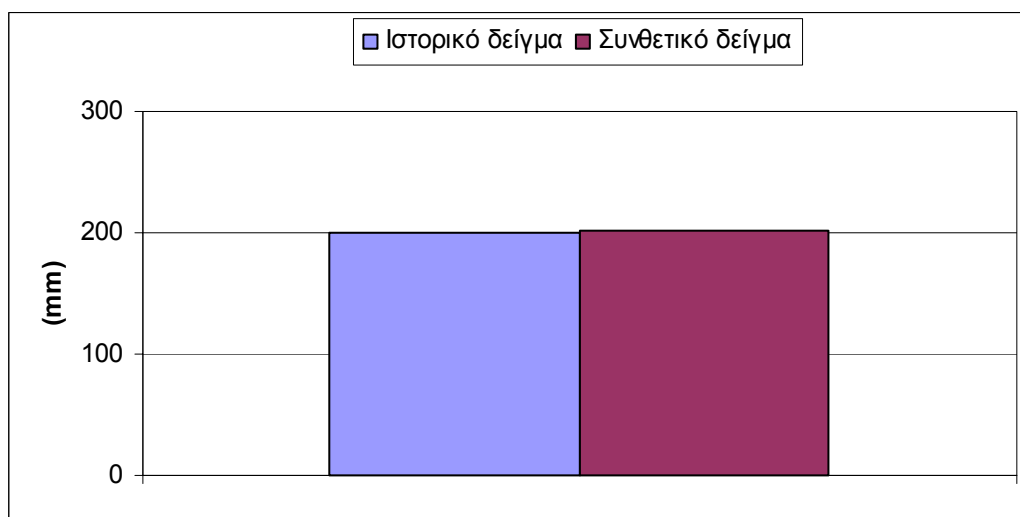
Ένα ακόμα μειονέκτημα της εφαρμογής κυκλικής τυποποίησης σε συνδυασμό με κάποιο στάσιμο στοχαστικό μοντέλο, έχει σχέση με την διαφοροποίηση του συντελεστή συσχέτισης μεταξύ των εποχών (μηνών) της ιστορικής χρονοσειράς. Είναι εύκολο να αποδειχθεί θεωρητικά πως οποιοσδήποτε γραμμικός μετασχηματισμός αδυνατεί να μεταβάλει τον συντελεστή συσχέτισης μεταξύ των εποχών (μηνών) της ιστορικής ή της συνθετικής χρονοσειράς. Για παράδειγμα, αν σε ένα μοντέλο AR(1) επιλεγθεί συντελεστής αυτοσυσχέτισης 1^{ης} τάξεως ίσος με τον συντελεστή συσχέτισης του Οκτωβρίου με τον Σεπτέμβριο, τότε ο συντελεστής συσχέτισης κάθε μήνα με τον προηγούμενό του θα είναι ίσος με αυτόν του Οκτωβρίου με τον Σεπτέμβριο, κάτι που φυσικά έρχεται σε αντίθεση με τα ιστορικά δεδομένα.

Η αναπαραγωγή της μακροπρόθεσμης εμμονής της ετήσιας χρονοσειράς των ιστορικών δεδομένων, είναι σίγουρο πως σε καμία περίπτωση δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί με εφαρμογή μοντέλων της οικογένειας ARMA(p, q) ανεξάρτητα της χρήσεως ή όχι της μεθόδου της κυκλικής τυποποίησης. Το παραπάνω γεγονός οφείλεται στην ταχύτατη μείωση του συντελεστή αυτοσυσχέτισης για βήματα χρονικής μετατόπισης μεγαλύτερα της τάξεως p του μοντέλου (Koutsoyiannis, 2002b).

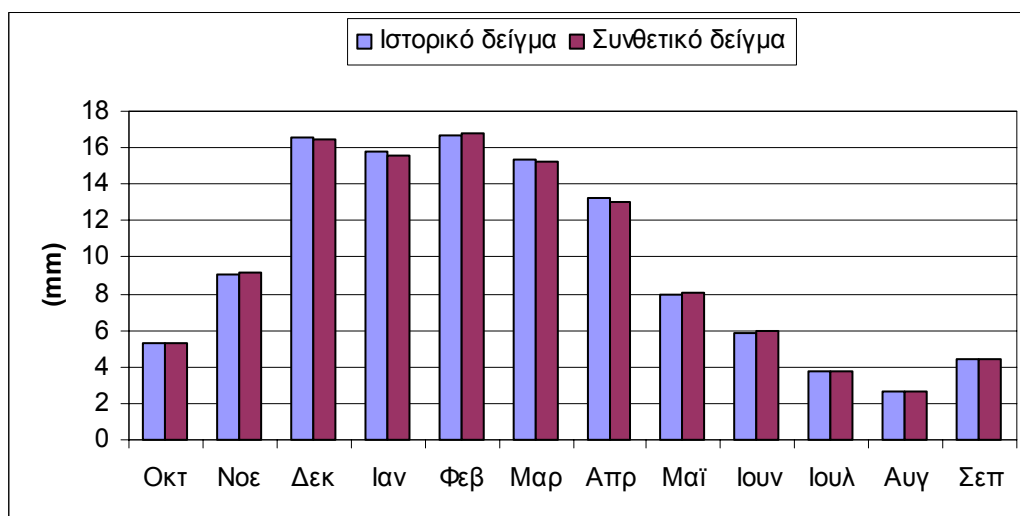
Στα Σχήματα 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6, 2.7 και 2.8, παρουσιάζονται τα διαγράμματα σύγκρισης των στατιστικών χαρακτηριστικών μίας κυκλοστάσιμης ιστορικής χρονοσειράς και του αποτελέσματος της αναπαραγωγής των στατιστικών της χαρακτηριστικών μέσω της μεθόδου της κυκλικής τυποποίησης σε συνδυασμό με ένα στάσιμο μοντέλο AR(1). Η χρησιμοποιούμενη ιστορική χρονοσειρά είναι η χρονοσειρά μηνιαίων υψών απορροής του Βοιωτικού Κηφισού στην θέση εξόδου του στην διώρυγα Καρδίτσας (βλέπε ενότητα 4.2). Ως συντελεστής αυτοσυσχέτισης 1^{ης} τάξεως του μοντέλου AR(1) χρησιμοποιήθηκε ο συντελεστής συσχέτισης του μήνα Οκτωβρίου με τον μήνα Σεπτέμβριο, και ως συντελεστής ασυμμετρίας της τυχαίας μεταβλητής του μοντέλου AR(1) ελήφθη ο συντελεστής ασυμμετρίας του μήνα Οκτωβρίου. Επισημαίνεται ότι τα στατιστικά χαρακτηριστικά της συνθετικής χρονοσειράς έχουν προέλθει από στοχαστική προσομοίωση μήκους 5000 ετών.



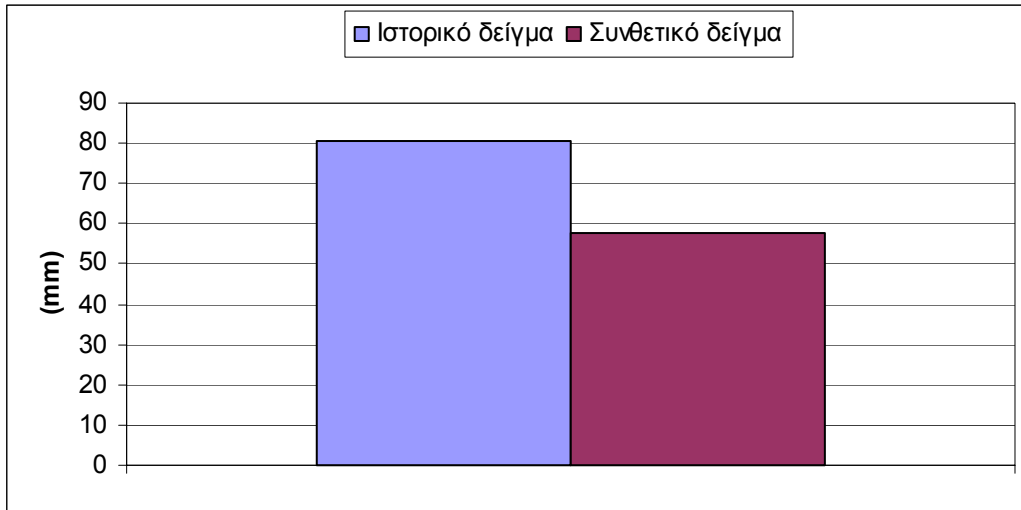
Σχήμα 2.1 Ραβδόγραμμα μηνιαίων μέσων τιμών του ιστορικού και του συνθετικού δείγματος



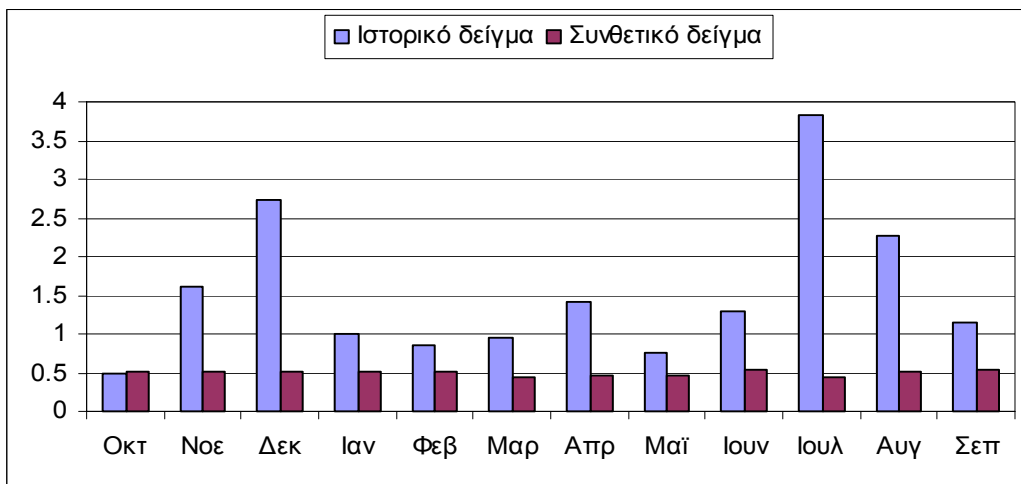
Σχήμα 2.2 Ραβδόγραμμα ετησίων μέσων τιμών του ιστορικού και του συνθετικού δείγματος



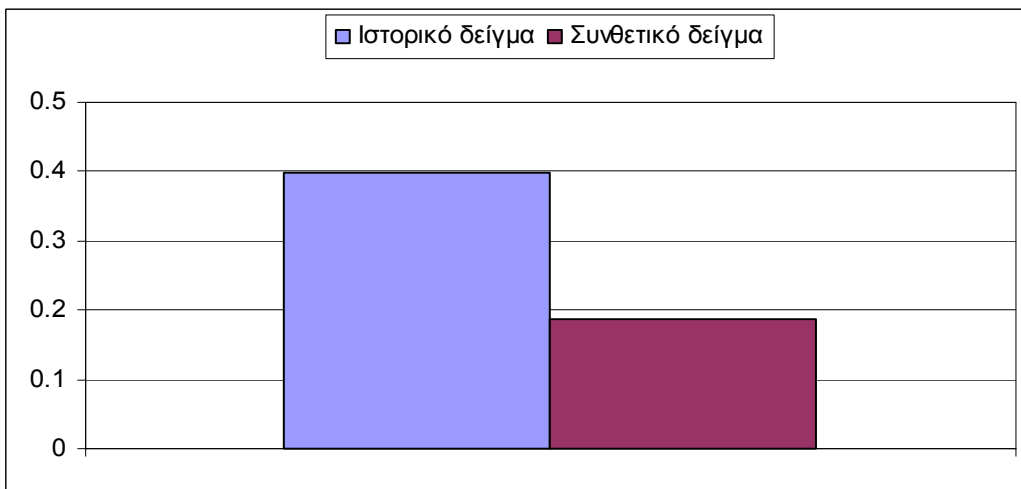
Σχήμα 2.3 Ραβδόγραμμα μηνιαίων τυπικών αποκλίσεων του ιστορικού και του συνθετικού δείγματος



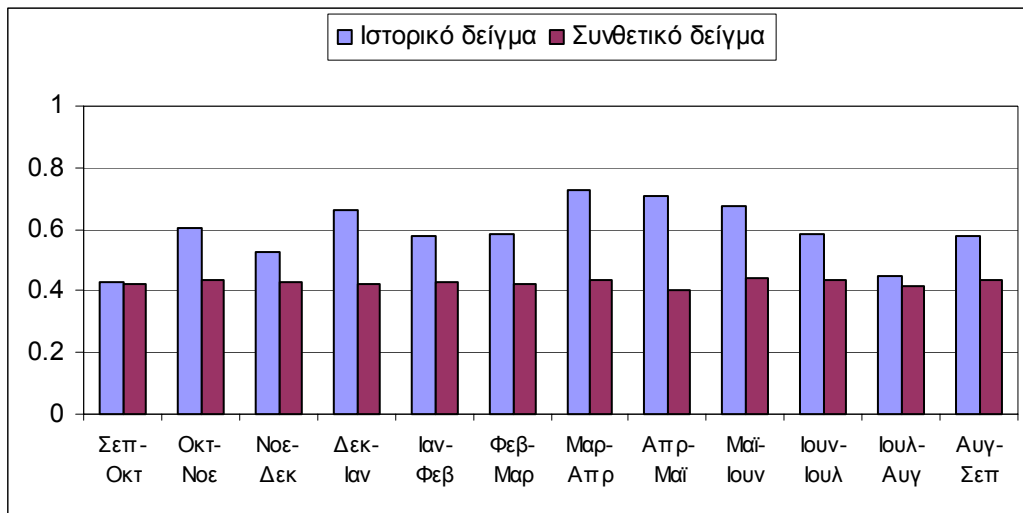
Σχήμα 2.4 Ραβδόγραμμα ετησίων τυπικών αποκλίσεων του ιστορικού και του συνθετικού δείγματος



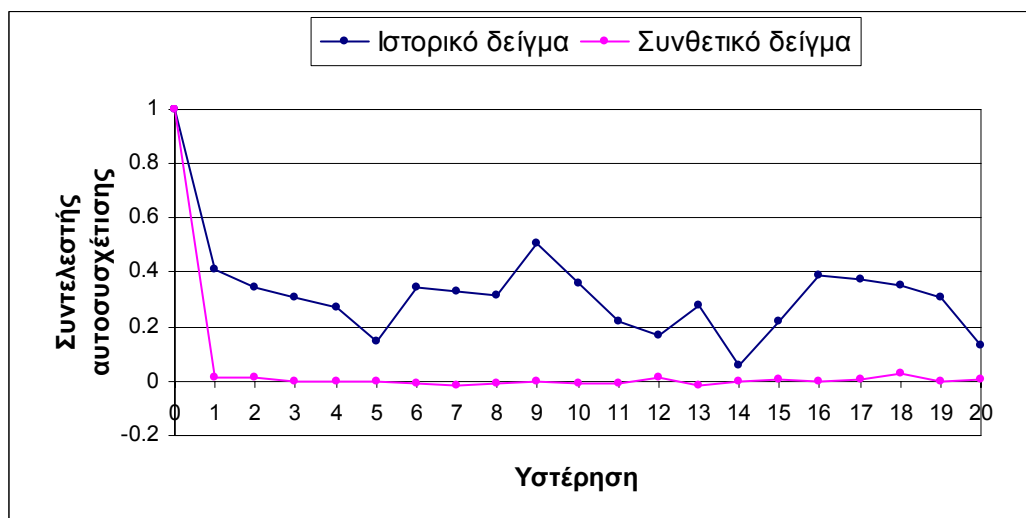
Σχήμα 2.5 Ραβδόγραμμα μηνιαίων συντελεστών ασυμμετρίας του ιστορικού και του συνθετικού δείγματος



Σχήμα 2.6 Ραβδόγραμμα ετήσιων συντελεστών ασυμμετρίας του ιστορικού και του συνθετικού δείγματος



Σχήμα 2.7 Ραβδόγραμμα συντελεστών συσχέτισης κάθε μήνα με τον προηγούμενό του, για το ιστορικό και το συνθετικό δείγμα



Σχήμα 2.8 Διάγραμμα σύγκρισης των αυτοσυσχετίσεων της ετήσιας ιστορικής και συνθετικής χρονοσειράς για τα 20 πρώτα βήματα χρονικής μετατόπισης

Με σκοπό την πλήρη αναπαραγωγή των εποχιακών (π.χ. μηνιαίων) περιθώριων κατανομών πιθανοτήτων του ιστορικού δείγματος στο συνθετικό έχει προταθεί ένας μη γραμμικός μετασχηματισμός (Montanari, 2003), ο οποίος έχει ως στόχο την κανονικοποίηση των τυχαίων μεταβλητών που περιγράφουν την διαδικασία σε εποχιακή (μηνιαία) κλίμακα. Προϋπόθεση για την εφαρμογή του εν λόγω μετασχηματισμού είναι η γνώση των περιθώριων κατανομών πιθανοτήτων των μεταβλητών που περιγράφουν την διαδικασία σε εποχιακό (π.χ. μηνιαίο) επίπεδο. Κάτι τέτοιο μπορεί εύκολα να επιτευχθεί μέσω χρήσεως της «πειραματικής πιθανότητας» που μπορεί να υπολογιστεί μέσω του τύπου του Weibull (Μιμίκου, 1994, σελ. 316; Stedinger *et al.*, 1993, σελ. 18.23; Montanari, 2003):

$$F(s_t) = P[S_t \leq s_t] = \frac{j_t}{n+1} \quad (2.6)$$

όπου S_t η τυχαία μεταβλητή της οποίας ζητείται η περιθώρια κατανομή πιθανοτήτων, s_t η εκάστοτε πραγματοποίηση της μεταβλητής S_t , j_t η θέση που κατέχει η πραγματοποίηση s_t στο ιστορικό δείγμα όταν αυτό έχει καταταχθεί σε αύξουσα σειρά και n το πλήθος των στοιχείων του ιστορικού δείγματος.

Αφού προσδιορισθεί η περιθώρια κατανομή πιθανοτήτων της κάθε εποχής (μήνα) του ιστορικού δείγματος, εφαρμόζεται ο μετασχηματισμός κανονικού ποσοστημορίου [Normal Quantile Transform (NQT)] (Kelly *et al.*, 1997),

$$NS^i(t) = Q^{-1}[P(S^i_t \leq s^i_t)] \quad (2.7)$$

στις πραγματοποιήσεις της εκάστοτε εποχής του ιστορικού δείγματος. Επισημαίνεται, ότι με Q^{-1} συμβολίζεται το αντίστροφο της κανονική κατανομής, με S^i_t η τυχαία μεταβλητή του μήνα i της χρονικής περιόδου t , με s^i_t η πραγματοποίηση της τυχαίας μεταβλητής S^i_t και με NS^i_t ο μετασχηματισμός NQT της τυχαίας μεταβλητής S^i_t .

Αποτέλεσμα του παραπάνω μετασχηματισμού, είναι ότι οι τυχαίες μεταβλητές NS^i_t ακολουθούν κανονική κατανομή με μέση τιμή μηδέν και τυπική απόκλιση ίση με την μονάδα, οπότε είναι προφανές ότι ισχύει

$$NS^i_t \stackrel{d}{=} NS^j_t \stackrel{d}{=} NS_t \quad (2.8)$$

όπου με το σύμβολο ($\stackrel{d}{=}$) υποδηλώνεται η ισότητα στην περιθώρια κατανομή των μεταβλητών.

Έχοντας λοιπόν στασιμοποιήσει την ιστορική χρονοσειρά ως προς τις περιθώριες κατανομές πιθανοτήτων των μεταβλητών που περιγράφουν την διαδικασία ενδιαφέροντος σε εποχιακή κλίμακα, είναι πλέον δυνατή η χρήση ενός απλού στάσιμου μοντέλου (π.χ. AR(1), AR(2), ARMA(1, 1)) για την παραγωγή συνθετικών χρονοσειρών της τυχαίας μεταβλητής NS_t . Στην συνέχεια εφαρμόζεται στις συνθετικές πραγματοποιήσεις της εκάστοτε εποχής (π.χ. μήνα) ο αντίστροφος της σχέσεως (2.7) μετασχηματισμός, και κατά αυτόν τον τρόπο αναπαράγονται οι περιθώριες κατανομές πιθανοτήτων των εποχών (π.χ. μηνών) στο συνθετικό δείγμα.

Η μέθοδος είναι γενικά απλή και αναπαράγει αξιόπιστα τις περιθώριες κατανομές πιθανοτήτων των εποχών (π.χ. μηνών) του ιστορικού δείγματος, όμως δεν παύει να έχει κάποια μειονεκτήματα στα οποία θα αναφερθούμε στην συνέχεια.

Ένα πρώτο μειονέκτημα της μεθόδου είναι ότι αδυνατεί να αναπαράγει τις συσχετίσεις μεταξύ των εποχών (μηνών) της χρονοσειράς του ιστορικού δείγματος στο συνθετικό δείγμα, γεγονός που πηγάζει από το ότι ο πραγματοποιηθείς μετασχηματισμός NQT δεν είναι γραμμικός και αλλοιώνει τις συσχετίσεις των τυχαίων μεταβλητών στις οποίες εφαρμόζεται. Επίσης, ο εν λόγω μετασχηματισμός δεν δύναται να αναπαράγει συνθετικά την τυπική απόκλιση και την ασυμμετρία της ετήσιας χρονοσειράς του ιστορικού δείγματος, γεγονός που οφείλεται στο ότι ο μετασχηματισμός δεν διατηρεί καμία συσχέτιση μεταξύ των εποχών. Όσον αφορά την μακροπρόθεσμη εμμονή, σε καμία περίπτωση δεν μπορεί να διατηρηθεί αφού, ως γνωστόν (Koutsoyiannis, 2002b), στην περίπτωση εφαρμογής μοντέλων ARMA(p, q) οι διατηρούμενες από το μοντέλο αυτοσυσχετίσεις φθίνουν ταχύτατα για χρονικά βήματα μετατόπισης μεγαλύτερα της τάξεως p του μοντέλου.

2.4 Στάσιμα πολυμεταβλητά μοντέλα

Γενικεύοντας τα μονομεταβλητά μοντέλα της οικογένειας ARMA(p, q) στον πολυδιάστατο χώρο, εξάγεται η γενική σχέση

$$\mathbf{X}_t = \mathbf{a}_{p,1} \mathbf{X}_{t-1} + \mathbf{a}_{p,2} \mathbf{X}_{t-2} + \dots + \mathbf{a}_{p,p} \mathbf{X}_{t-p} + \mathbf{V}_t + \mathbf{b}_{q,1} \mathbf{V}_{t-1} + \dots + \mathbf{b}_{q,q} \mathbf{V}_{t-q} \quad (2.9)$$

που περιγράφει τα μοντέλα MARMA(p, q) (Multivariate Autoregressive Moving Average models) (Bras *et al.*, 1993 σελ. 92-106; Brockwell *et al.*, 1996, σελ.234-237). Στην παραπάνω σχέση, $\mathbf{X}_t = [X_t^1, X_t^2, \dots, X_t^n]^T$ είναι το διάνυσμα των n τυχαίων μεταβλητών κάθε μία εκ των οποίων αντιστοιχεί στην θέση που υποδηλώνεται με τον άνω δείκτη l ($l = 1, 2, \dots, n$) για δεδομένη χρονική περίοδο t , $\mathbf{a}_{p,i}$ ($i=1, \dots, p$) μητρωϊκές παράμετροι διαστάσεων $n \times n$, $\mathbf{V}_t = [V_t^1, V_t^2, \dots, V_t^n]$ το διάνυσμα των n τυχαίων μεταβλητών οι οποίες είναι ασυσχέτιστες τόσο ως προς τον χρόνο t όσο και ως προς τις θέσεις ενδιαφέροντος l (δηλαδή $\text{Cov}[V_i^l, V_j^k] = 0$ για $l, k = 1, 2, \dots, n$) και $\mathbf{b}_{q,i}$ ($i=1, \dots, q$) επίσης μητρωϊκές παράμετροι διαστάσεων $n \times n$.

Αξίζει να επισημάνουμε, ότι ακόμα και αν η γενική σχέση (2.9) φαίνεται απλή, ο προσδιορισμός των μητρωϊκών παραμέτρων εμφανίζεται ιδιαίτερα δύσκολος για $p + q > 1$ (Bras *et al.*, 1993 σελ. 99-106). Ενδιαφέρον πάντως παρουσιάζει η περίπτωση του μοντέλου MAR(1) (Multivariate Autoregressive model) που περιγράφεται από τη σχέση,

$$\mathbf{X}_t = \mathbf{a} \mathbf{X}_{t-1} + \mathbf{b}_0 \mathbf{V}_t \quad (2.10)$$

και το οποίο εμφανίζεται απλό ως προς τον προσδιορισμό των παραμέτρων του (Bras *et al.*, 1993 σελ. 92-99). Η μητρωϊκή παράμετρος \mathbf{b}_0 εισήχθη με σκοπό την χρήση λευκού θορύβου V_t^l ($l = 1, 2, \dots, n$) με τυπική απόκλιση ίση με την μονάδα, οπότε είναι πλέον προφανής η ισχύς της σχέσεως

$$\text{Cov}[\mathbf{V}_t, \mathbf{V}_t] = \mathbf{I} \quad (2.11)$$

στην οποία με \mathbf{I} συμβολίζεται το μοναδιαίο μητρώο. Κατόπιν απλών αλγεβρικών υπολογισμών προκύπτουν οι σχέσεις,

$$\mathbf{a} = \text{Cov}[\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_{t-1}] \{ \text{Cov}[\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_t] \}^{-1} \quad (2.12)$$

$$\mathbf{b}_0 \mathbf{b}_0^T = \text{Cov}[\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_t] - \mathbf{a} \text{Cov}[\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_t] \mathbf{a}^T \quad (2.13)$$

$$E[\mathbf{V}_t] = (\mathbf{b}_0)^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{a}) E[\mathbf{X}_t] \quad (2.14)$$

$$\text{Var}[\mathbf{V}_t] = [1, \dots, 1]^T \quad (2.15)$$

$$\mu_3[\mathbf{V}_t] = (\mathbf{b}_0^{(3)})^{-1} \{ \mu_3[\mathbf{X}_t] - \mu_3[\mathbf{a} \mathbf{X}_t] \} \quad (2.16)$$

οι οποίες μας δίνουν τη δυνατότητα να υπολογίσουμε όλες τις παραμέτρους του μοντέλου MAR(1) καθώς και τα στατιστικά χαρακτηριστικά του χρησιμοποιούμενου από το μοντέλο λευκού θορύβου. Με τον άνω δείκτη T συμβολίζεται το ανάστροφο ενός μητρώου, με \mathbf{b}^{-1} το αντίστροφο του μητρώου \mathbf{b} και με $\mathbf{b}_0^{(3)}$ το μητρώο που έχει ως στοιχεία τους κύβους των στοιχείων του μητρώου \mathbf{b}_0 .

Για τον υπολογισμό του μητρώου \mathbf{b}_0 από τη σχέση (2.13) απαιτείται η επίλυση του προβλήματος της ευρέσεως της τετραγωνικής ρίζας πίνακα που στην γενική του μορφή δίνεται από την σχέση,

$$\mathbf{b} \mathbf{b}^T = \mathbf{c} \quad (2.17)$$

όπου \mathbf{b} ο προς προσδιορισμό άγνωστος πίνακας (γνωστός και ως τετραγωνική ρίζα του πίνακα \mathbf{c}) και \mathbf{c} ο συμμετρικός πίνακας του οποίου ζητείται η τετραγωνική ρίζα.

Το παραπάνω πρόβλημα είναι αδύνατο (δεν έχει καμία λύση) στην περίπτωση που ο πίνακας \mathbf{c} είναι μη θετικά ορισμένος, και αόριστο (έχει άπειρες λύσεις) στην περίπτωση που ο πίνακας \mathbf{c} είναι θετικά ορισμένος. Στην δεύτερη των περιπτώσεων, υφίστανται δύο αρκετά διαδεδομένοι αλγόριθμοι για τον προσδιορισμό δύο διαφορετικών εν γένει λύσεων:

- αποσύνθεση σε κάτω τριγωνικό μητρώο με τον αλγόριθμο Cholesky (βλέπε και εδάφιο 3.1.5),
- αποσύνθεση σε πλήρες μητρώο με χρήση των ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα \mathbf{c} (αλγόριθμος Jacobi).

Για περισσότερες πληροφορίες πάνω στην εφαρμογή των δύο παραπάνω μεθόδων ο αναγνώστης παραπέμπεται στη βιβλιογραφία (Chapra *et al*, σελ. 285-304, Bras *et al.*, 1993 σελ. 96-98). Πρόσφατα, προτάθηκε ένας γενικευμένος αλγόριθμος προσδιορισμού μίας βέλτιστης λύσης του πίνακα \mathbf{b} (Koutsoyiannis, 1999), για \mathbf{c} είτε θετικά ορισμένο (ακριβής λύση) είτε όχι (προσεγγιστική λύση).

Χαρακτηριστικά των μοντέλων MARMA

Τα πολυμεταβλητά μοντέλα της οικογένειας MARMA(p, q) εφαρμοζόμενα για την παραγωγή στάσιμων συνθετικών χρονοσειρών, είναι ικανά να αναπαράγουν αξιόπιστα:

- την μέση τιμή της μεταβλητής X_t^l για κάθε θέση ενδιαφέροντος l ,
- την τυπική απόκλιση της μεταβλητής X_t^l για κάθε θέση ενδιαφέροντος l ,
- τον συντελεστή ασυμμετρίας της μεταβλητής X_t^l για κάθε θέση ενδιαφέροντος l ,
- τους συντελεστές αυτοσυσχέτισης της μεταβλητής X_t^l για κάθε θέση ενδιαφέροντος l έως και για χρονικό βήμα μετατόπισης $p + q$,

- τους συντελεστές ετεροσυσχέτισης της μεταβλητής X_t^l της κάθε θέσεως ενδιαφέροντος l με τις μεταβλητές όλων των υπολοίπων θέσεων ενδιαφέροντος έως και για χρονικό βήμα μετατόπισης $p + q$.

2.5 Κυκλοστάσιμα πολυμεταβλητά μοντέλα

Όμοια με την ενότητα 2.4, έτσι και εδώ μπορούμε να γενικεύσουμε την σχέση (2.9) για να επιτύχουμε την αναπαραγωγή των στατιστικών χαρακτηριστικών μίας κυκλοστάσιμης στοχαστικής ανελίξεως. Κατά αυτόν τον τρόπο καταλήγουμε στην γενική σχέση,

$$\mathbf{X}_s = \mathbf{a}_{p,1}^s \mathbf{X}_{s-1} + \mathbf{a}_{p,2}^s \mathbf{X}_{s-2} + \dots + \mathbf{a}_{p,p}^s \mathbf{X}_{s-p} + \mathbf{V}_s + \mathbf{b}_{q,1}^s \mathbf{V}_{s-1} + \dots + \mathbf{b}_{q,q}^s \mathbf{V}_{s-q} \quad (2.18)$$

που περιγράφει μία άλλη ευρύτερη οικογένεια μοντέλων τα MPARMA(p, q) (Multivariate Periodic Autoregressive Moving Average models) (Bras *et al.*, 1993 σελ. 118-123), όπου $\mathbf{X}_s = [X_s^1, X_s^2, \dots, X_s^n]^T$ είναι το διάνυσμα των n κυκλοστάσιμων στοχαστικών ανελίξεων με περίοδο k κάθε μία εκ των οποίων αντιστοιχεί στην θέση που υποδηλώνεται με τον άνω δείκτη l ($l=1, 2, \dots, n$) για δεδομένη χρονική περίοδο s , $\mathbf{a}_{p,i}^s$ ($i=1, \dots, p$) περιοδικά μεταβαλλόμενες μητρωϊκές παράμετροι διαστάσεων $n \times n$ με περίοδο ίση με την περίοδο k της διαδικασίας, $\mathbf{V}_s = [V_s^1, V_s^2, \dots, V_s^n]$ το διάνυσμα των n κυκλοστάσιμων στοχαστικών ανελίξεων με περίοδο k , οι οποίες παρουσιάζουν μηδενική συσχέτιση ως προς τον χρόνο s και ως προς τις θέσεις ενδιαφέροντος l (δηλαδή $\text{Cov}[V_i^l, V_j^m] = 0$ για $l, m = 1, 2, \dots, n$) και $\mathbf{b}_{q,i}^s$ ($i=1, \dots, q$) επίσης περιοδικά μεταβαλλόμενες μητρωϊκές παράμετροι διαστάσεων $n \times n$ με περίοδο ίση με την περίοδο k της διαδικασίας.

Στις σχέσεις (2.19), (2.20), (2.21), και (2.22) παρουσιάζονται οι αναγκαίες και ικανές συνθήκες για την εξασφάλιση της κυκλοστασιμότητας της διαδικασίας που περιγράφεται από την διανυσματική τυχαία μεταβλητή \mathbf{X}_s . Επισημαίνεται ότι με το σύμβολο (\equiv_d) υποδηλώνεται το στατιστικά όμοιο.

$$\mathbf{a}_{p,i}^s = \mathbf{a}_{p,i}^{s+\kappa k} \quad \text{με } \kappa \in \mathbb{Z} \text{ και } i=1, \dots, p \quad (2.19)$$

$$\mathbf{b}_{q,i}^s = \mathbf{b}_{q,i}^{s+\kappa k} \quad \text{με } \kappa \in \mathbb{Z} \text{ και } i=1, \dots, q \quad (2.20)$$

$$\mathbf{X}_{s+\kappa k} =_d \mathbf{X}_s \quad \mu\epsilon \quad \kappa \in \mathbb{Z} \quad (2.21)$$

$$\mathbf{V}_{s+\kappa k} =_d \mathbf{V}_s \quad \mu\epsilon \quad \kappa \in \mathbb{Z} \quad (2.22)$$

Ακριβώς όπως και στα στάσιμα πολυμεταβλητά μοντέλα της οικογένειας $\text{MARMA}(p, q)$, έτσι και στα κυκλοστάσιμα πολυμεταβλητά μοντέλα της οικογένειας $\text{MPARMA}(p, q)$ ο προσδιορισμός των μητρωϊκών παραμέτρων για $p + q > 1$ παρουσιάζεται ιδιαίτερα επίπονος. Ενδιαφέρον πάντως παρουσιάζει η περίπτωση του μοντέλου $\text{MPAR}(1)$ (Multivariate Periodic Autoregressive model) που περιγράφεται από την σχέση,

$$\mathbf{X}_s = \mathbf{a}_s \mathbf{X}_{s-1} + \mathbf{b}_s \mathbf{V}_s \quad (2.23)$$

και το οποίο εμφανίζεται απλό ως προς τον προσδιορισμό των περιοδικά μεταβαλλόμενων μητρωϊκών παραμέτρων του (Bras *et al.*, 1993 σελ. 118-120). Η μητρωϊκή παράμετρος \mathbf{b}_s εισήχθη με σκοπό την χρήση λευκού θορύβου με τυπική απόκλιση ίση με την μονάδα, οπότε είναι πλέον προφανής η ισχύς της σχέσεως,

$$\text{Cov}[\mathbf{V}_s, \mathbf{V}_s] = \mathbf{I} \quad (2.24)$$

στην οποία με \mathbf{I} συμβολίζεται το μοναδιαίο μητρώο. Κατόπιν απλών αλγεβρικών υπολογισμών προκύπτουν οι σχέσεις,

$$\mathbf{a}_s = \text{Cov}[\mathbf{X}_s, \mathbf{X}_{s-1}] \{ \text{Cov}[\mathbf{X}_{s-1}, \mathbf{X}_{s-1}] \}^{-1} \quad \gamma\iota\alpha \quad s = 1, \dots, k \quad (2.25)$$

$$\mathbf{b}_s (\mathbf{b}_s)^T = \text{Cov}[\mathbf{X}_s, \mathbf{X}_s] - \mathbf{a}_s \text{Cov}[\mathbf{X}_{s-1}, \mathbf{X}_{s-1}] (\mathbf{a}_s)^T \quad \gamma\iota\alpha \quad s = 1, \dots, k \quad (2.26)$$

$$E[\mathbf{V}_s] = (\mathbf{b}_s)^{-1} \{ E[\mathbf{X}_s] - \mathbf{a}_s E[\mathbf{X}_{s-1}] \} \quad \gamma\iota\alpha \quad s = 1, \dots, k \quad (2.27)$$

$$\text{Var}[\mathbf{V}_s] = [1, \dots, 1]^T \quad \gamma\iota\alpha \quad s = 1, \dots, k \quad (2.28)$$

$$\mu_3[\mathbf{V}_s] = (\mathbf{b}_s^{(3)})^{-1} \{ \mu_3[\mathbf{X}_s] - \mu_3[\mathbf{a}_s \mathbf{X}_{s-1}] \} \quad \gamma\iota\alpha \quad s = 1, \dots, k \quad (2.29)$$

οι οποίες μας δίνουν την δυνατότητα να υπολογίσουμε όλες τις παραμέτρους του μοντέλου MPAR(1) καθώς και τα στατιστικά χαρακτηριστικά του χρησιμοποιούμενου από το μοντέλο λευκού θορύβου. Με τον άνω δείκτη T συμβολίζεται το ανάστροφο ενός μητρώου, με \mathbf{b}_s^{-1} το αντίστροφο του μητρώου \mathbf{b}_s και με $\mathbf{b}_s^{(3)}$ το μητρώο που έχει ως στοιχεία τους κύβους των στοιχείων του μητρώου \mathbf{b}_s . Για τον υπολογισμό του μητρώου \mathbf{b}_s από την σχέση (2.26) απαιτείται και πάλι η επίλυση του προβλήματος της ευρέσεως τετραγωνικής ρίζας πίνακα, στο οποίο αναφερθήκαμε στην ενότητα 2.4.

Χαρακτηριστικά των μοντέλων MPARMA

Τα πολυμεταβλητά κυκλοστάσιμα μοντέλα της οικογένειας MPARMA(p, q) εφαρμοζόμενα για την παραγωγή κυκλοστάσιμων συνθετικών χρονοσειρών, είναι ικανά να αναπαράγουν αξιόπιστα:

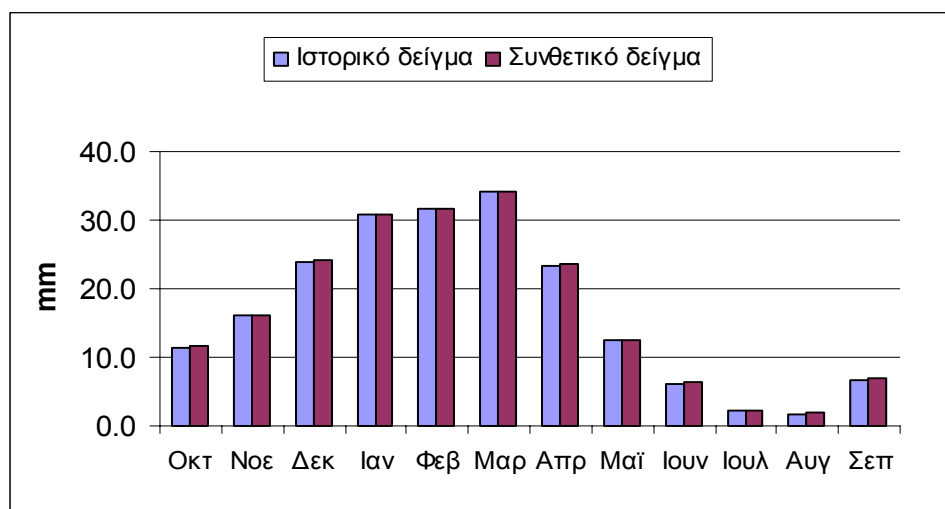
- τις k σε αριθμό (όπου k η περίοδος της στοχαστικής διαδικασίας) εποχιακές (μηνιαίες) μέσες τιμές της τυχαίας μεταβλητής X_s^l για κάθε θέση ενδιαφέροντος l ,
- τις k σε αριθμό εποχιακές (μηνιαίες) τυπικές αποκλίσεις της τυχαίας μεταβλητής X_s^l για κάθε θέση ενδιαφέροντος l ,
- τους k σε αριθμό εποχιακούς (μηνιαίους) συντελεστές ασυμμετρίας της τυχαίας μεταβλητής X_s^l για κάθε θέση ενδιαφέροντος l ,
- τους συντελεστές αυτοσυσχέτισης της τυχαίας μεταβλητής X_s^l για κάθε θέση ενδιαφέροντος l έως και για χρονικό βήμα μετατόπισης $p + q$,
- τους συντελεστές ετεροσυσχέτισης της τυχαίας μεταβλητής X_s^l της κάθε θέσεως ενδιαφέροντος l με τις μεταβλητές όλων των υπολοίπων θέσεων ενδιαφέροντος έως και για χρονικό βήμα μετατόπισης $p + q$.

Εφαρμογή μοντέλου MPAR(1) για αναπαραγωγή των στατιστικών χαρακτηριστικών δύο κυκλοστάσιμων συσχετισμένων ιστορικών χρονοσειρών

Στην συνέχεια παρατίθενται τα διαγράμματα σύγκρισης των στατιστικών χαρακτηριστικών δύο συσχετισμένων ιστορικών χρονοσειρών, με τα στατιστικά χαρακτηριστικά των συσχετισμένων συνθετικών χρονοσειρών που παρήχθησαν με χρήση του μοντέλου MPAR(1) για δύο θέσεις ενδιαφέροντος (δύο μεταβλητές). Οι συσχετισμένες ιστορικές χρονοσειρές που χρησιμοποιήθηκαν είναι (ενότητα 4.2): (1)

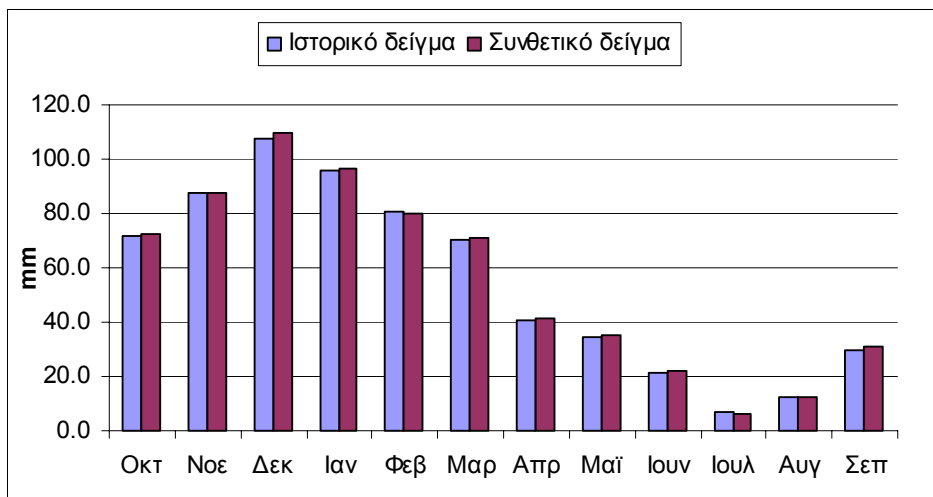
η ιστορική χρονοσειρά μηνιαίων υψών απορροής του Βοιωτικού Κηφισού στην θέση εξόδου του στην διώρυγα Καρδίτσας (θέση 1) και (2) η ιστορική χρονοσειρά μηνιαίων υψών σημειακής βροχοπτώσεως στον βροχομετρικό σταθμό Αλιάρτου³ (θέση 2). Για την εφαρμογή του μοντέλου MPAR(1) αναπτύχθηκε πρόγραμμα σε γλώσσα Fortran που παρατίθεται στο παράρτημα Δ. Επισημαίνεται ότι τα στατιστικά χαρακτηριστικά των συνθετικών χρονοσειρών έχουν προέλθει από στοχαστική προσομοίωση μήκους 5000 ετών.

Στα Σχήματα 2.9, 2.10, 2.11, 2.12, 2.13, 2.14, 2.15, 2.16, 2.17 και 2.18, μπορούμε να παρατηρήσουμε την αξιόπιστη αναπαραγωγή των εποχιακών (μηνιαίων) στατιστικών χαρακτηριστικών των συσχετισμένων ιστορικών χρονοσειρών από το χρησιμοποιούμενο στοχαστικό μοντέλο (μέσες τιμές, τυπικές αποκλίσεις συντελεστές ασυμμετρίας, συντελεστές αυτοσυσχέτισης των θέσεων και ετεροσυσχέτισης μεταξύ των θέσεων).

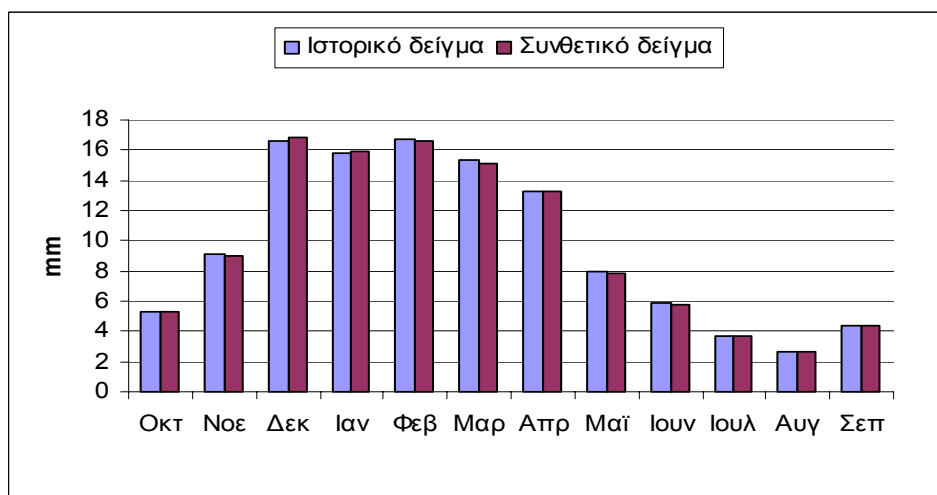


Σχήμα 2.9 Ραβδόγραμμα σύγκρισης των μηνιαίων μέσων τιμών του ιστορικού και του συνθετικού δείγματος απορροών

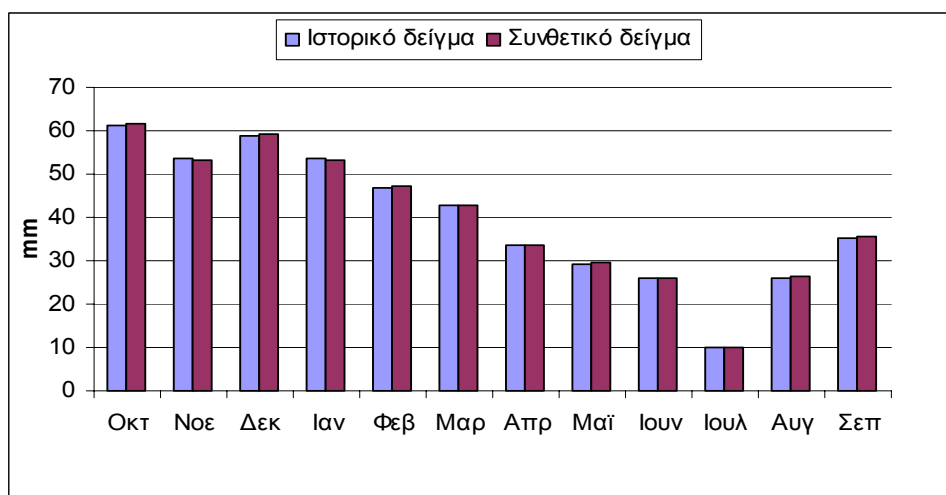
³ Ο σταθμός Αλιάρτου είναι ο παλαιότερος βροχομετρικός σταθμός που λειτουργεί στην λεκάνη απορροής του Βοιωτικού Κηφισού.



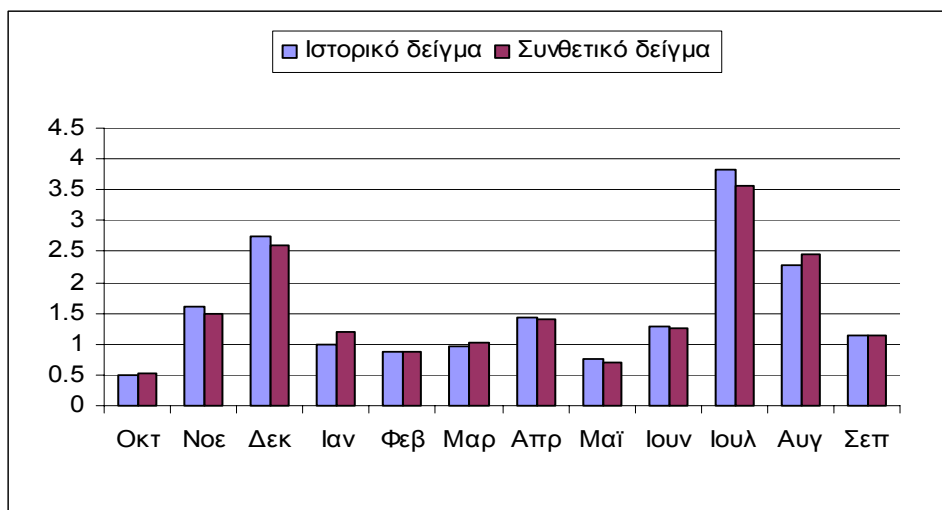
Σχήμα 2.10 Ραβδόγραμμα σύγκρισης των μηνιαίων μέσων τιμών του ιστορικού και του συνθετικού δείγματος βροχοπτώσεων



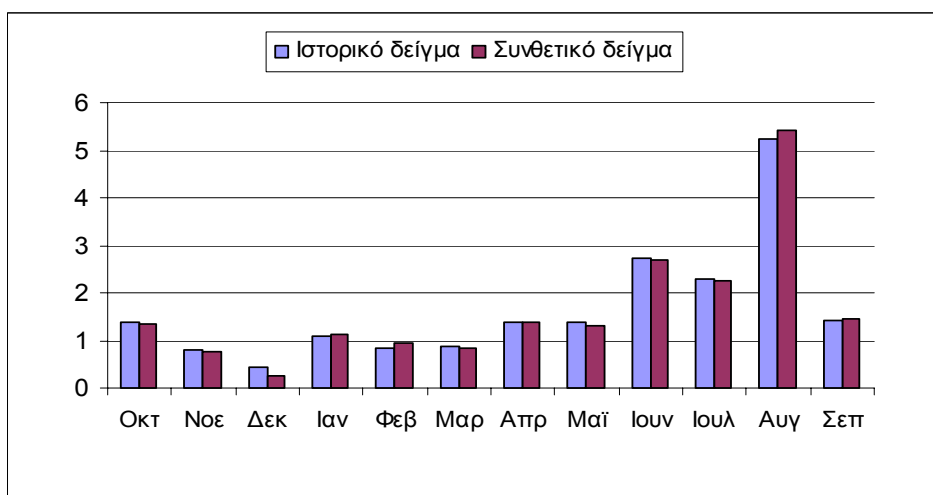
Σχήμα 2.11 Ραβδόγραμμα σύγκρισης των μηνιαίων τυπικών αποκλίσεων του ιστορικού και του συνθετικού δείγματος απορροών



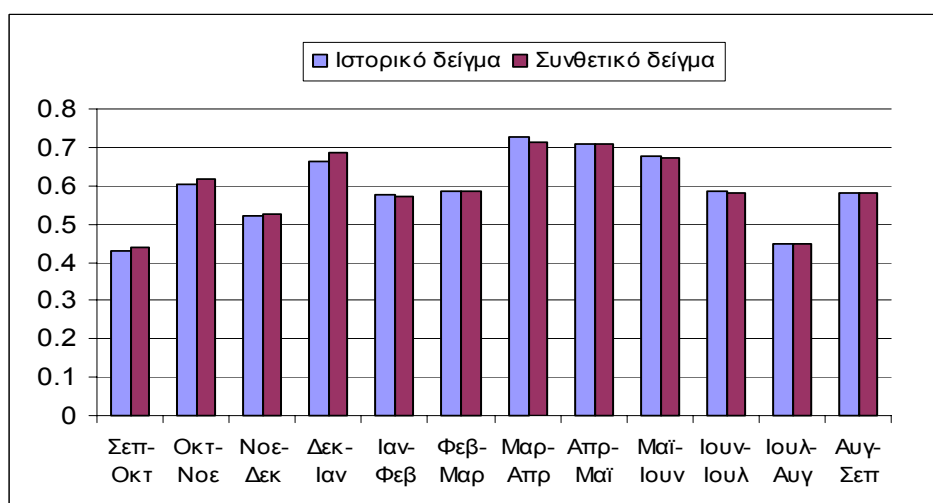
Σχήμα 2.12 Ραβδόγραμμα σύγκρισης των μηνιαίων τυπικών αποκλίσεων του ιστορικού και του συνθετικού δείγματος βροχοπτώσεων



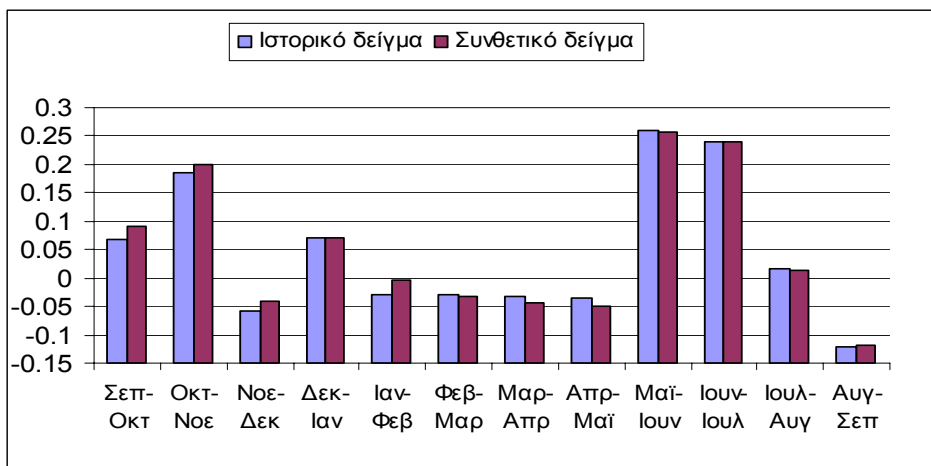
Σχήμα 2.13 Ραβδόγραμμα σύγκρισης των μηνιαίων συντελεστών ασυμμετρίας του ιστορικού και του συνθετικού δείγματος απορροών



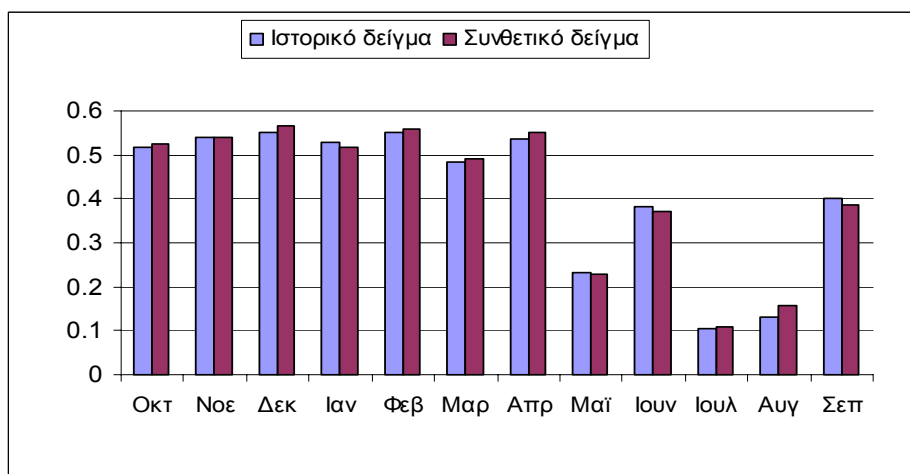
Σχήμα 2.14 Ραβδόγραμμα σύγκρισης των μηνιαίων συντελεστών ασυμμετρίας του ιστορικού και του συνθετικού δείγματος βροχοπτώσεων



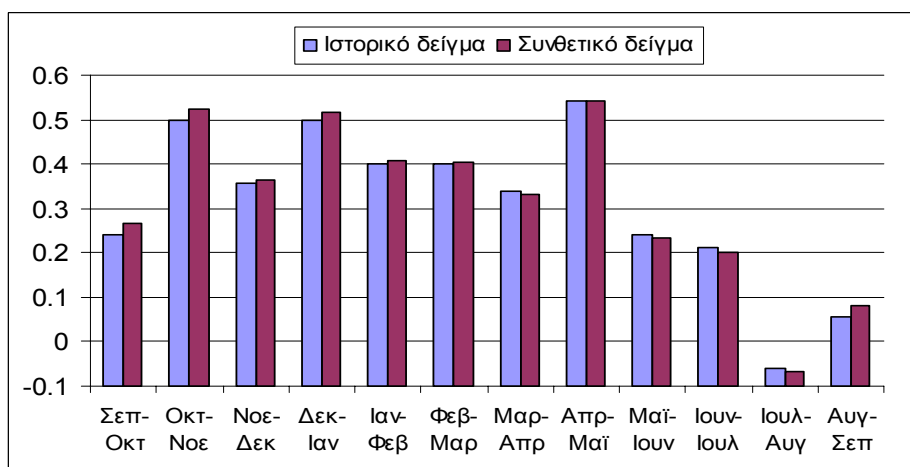
Σχήμα 2.15 Ραβδόγραμμα σύγκρισης των συντελεστών συσχέτισης των μηνών του ιστορικού και του συνθετικού δείγματος απορροών, για μοναδιαίο βήμα χρονικής μετατόπισης (συντελεστές συσχέτισης των απορροών ενός μήνα με τις απορροές του προηγούμενου μήνα)



Σχήμα 2.16 Ραβδόγραμμα σύγκρισης των συντελεστών συσχέτισης των μηνών του ιστορικού και του συνθετικού δείγματος βροχοπτώσεων, για μοναδιαίο βήμα χρονικής μετατόπισης (συντελεστές συσχέτισης των βροχοπτώσεων ενός μήνα με τις βροχοπτώσεις του προηγούμενου μήνα)



Σχήμα 2.17 Ραβδόγραμμα σύγκρισης των συντελεστών ετεροσυσχέτισης των μηνών του ιστορικού και του συνθετικού δείγματος, για μηδενικό βήμα χρονικής μετατόπισης (συντελεστές συσχέτισης των απορροών ενός μήνα με τις βροχοπτώσεις του ίδιου μήνα)

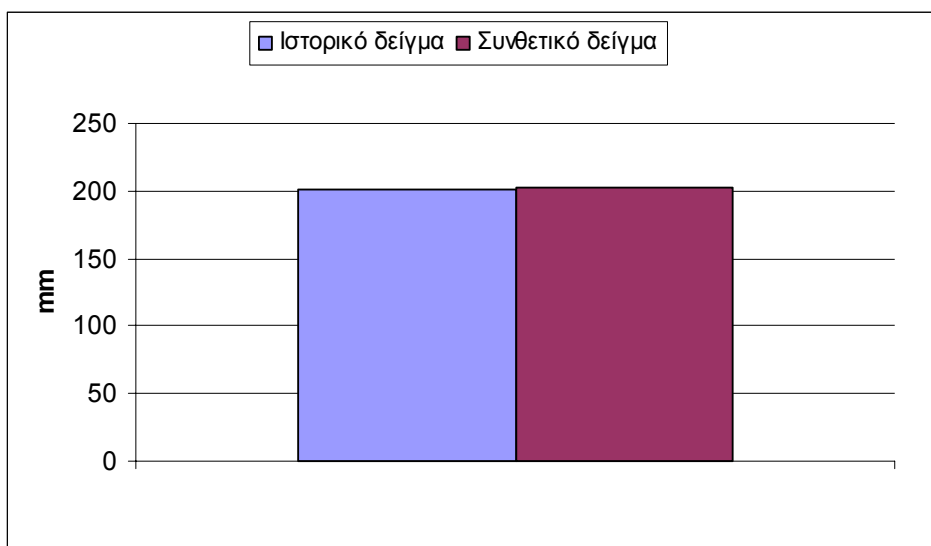


Σχήμα 2.18 Ραβδόγραμμα σύγκρισης των συντελεστών ετεροσυσχέτισης των μηνών του ιστορικού και του συνθετικού δείγματος, για μοναδιαίο βήμα χρονικής μετατόπισης (συντελεστές ετεροσυσχέτισης των απορροών ενός μήνα με τις βροχοπτώσεις του προηγούμενου μήνα)

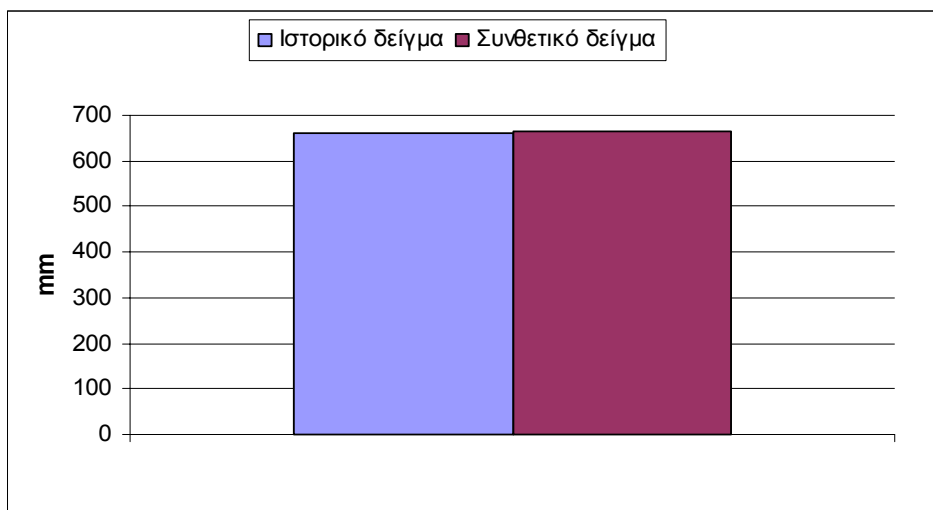
Αναφερόμενοι στο Σχήμα 2.18, αξίζει να επισημάνουμε ότι κατά όμοιο τρόπο θα μπορούσαμε να παρουσιάσουμε και το ραβδόγραμμα διατήρησης των συντελεστών συσχέτισης μεταξύ των βροχοπτώσεων ενός μήνα με τις απορροές του προηγούμενου μήνα. Κάτι τέτοιο όμως αποφεύγεται λόγω του ότι δεν παρουσιάζει κανένα απολύτως υδρολογικό ενδιαφέρον.

Στα Σχήματα 2.19, 2.20, 2.21, 2.22, 2.23, 2.24, 2.25 και 2.26, μπορούμε να παρατηρήσουμε την αξιόπιστη αναπαραγωγή των ετήσιων μέσων τιμών των δύο ιστορικών χρονοσειρών, καθώς και την αδυναμία του στοχαστικού μοντέλου να αναπαράγει συνθετικά τις τυπικές αποκλίσεις, τους συντελεστές ασυμμετρίας και την μακροπρόθεσμη εμμονή των ετησίων ιστορικών χρονοσειρών.

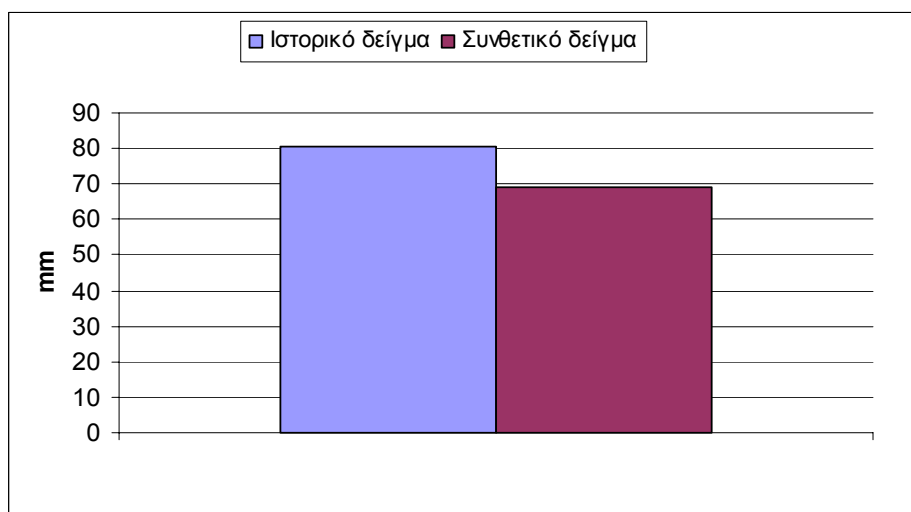
Αν σταθούμε λίγο στην μακροπρόθεσμη εμμονή των ιστορικών χρονοσειρών, αξίζει να επισημάνουμε ότι σε καμία περίπτωση δεν είναι δυνατόν να αναπαραχθεί, καθώς οι συντελεστές αυτοσυσχέτισης του χρησιμοποιούμενου στοχαστικού μοντέλου φθίνουν ταχύτατα συναρτήσει του βήματος της χρονικής μετατόπισης πέραν των διατηρούμενων από το μοντέλο αυτοσυσχετίσεων (στην περίπτωση μας διατηρούνται μόνο οι συντελεστές αυτοσυσχέτισης και ετεροσυσχέτισης ως και μοναδιαίο βήμα χρονικής μετατόπισης) (Koutsoyiannis, 2002b).



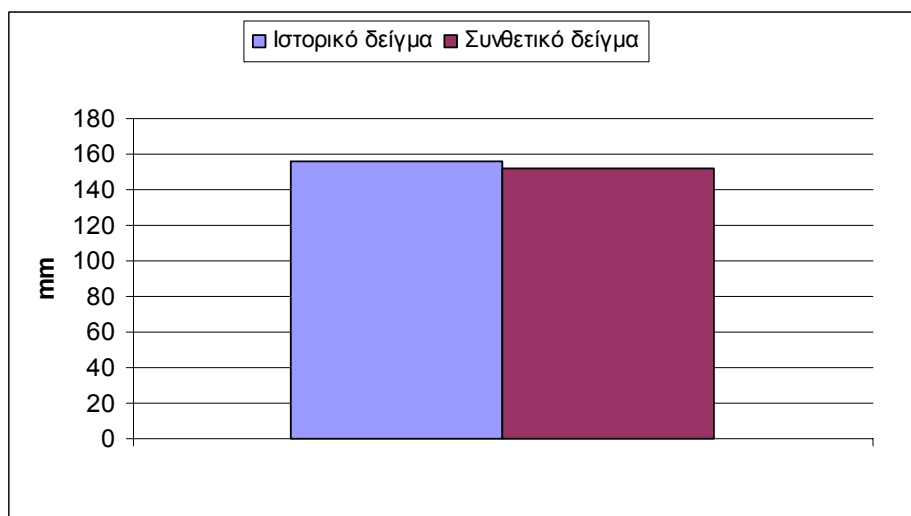
Σχήμα 2.19 Ραβδόγραμμα σύγκρισης των ετήσιων μέσων τιμών του ιστορικού και του συνθετικού δείγματος απορροών



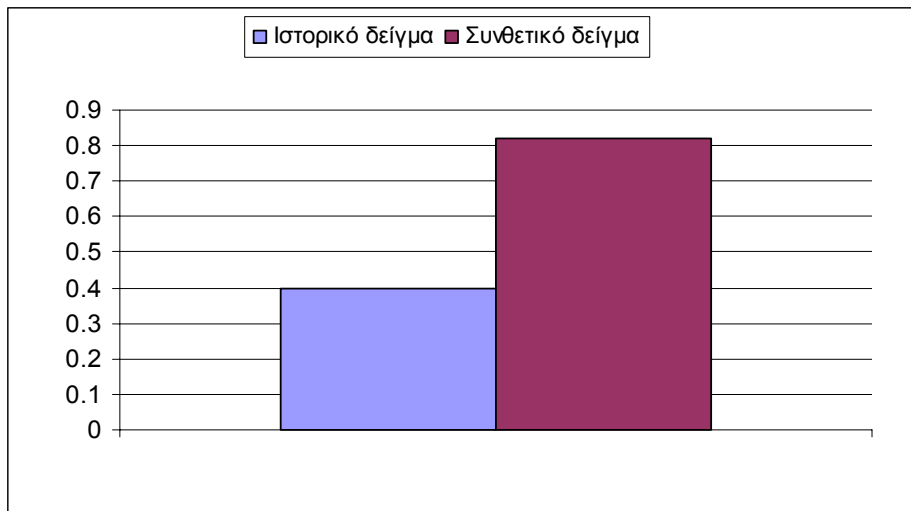
Σχήμα 2.20 Ραβδόγραμμα σύγκρισης των ετήσιων μέσων τιμών του ιστορικού και του συνθετικού δείγματος βροχοπτώσεων



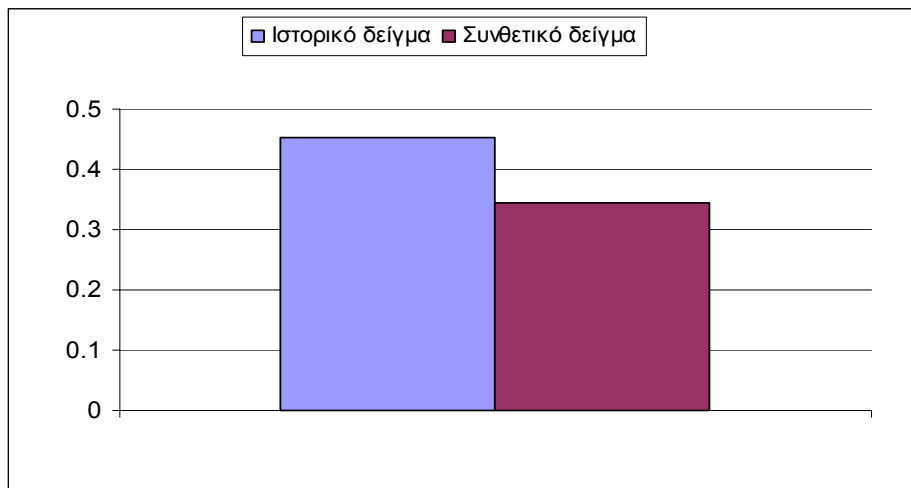
Σχήμα 2.21 Ραβδόγραμμα σύγκρισης των ετήσιων τυπικών αποκλίσεων του ιστορικού και του συνθετικού δείγματος απορροών



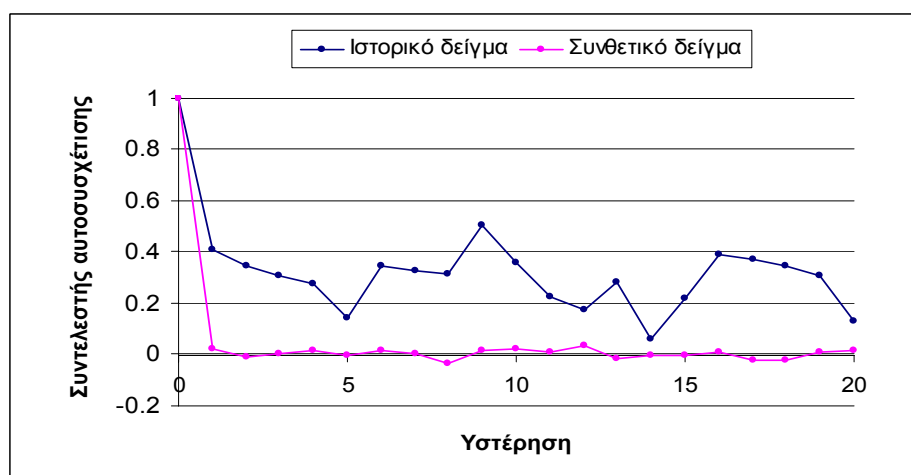
Σχήμα 2.22 Ραβδόγραμμα σύγκρισης των ετήσιων τυπικών αποκλίσεων του ιστορικού και του συνθετικού δείγματος βροχοπτώσεων



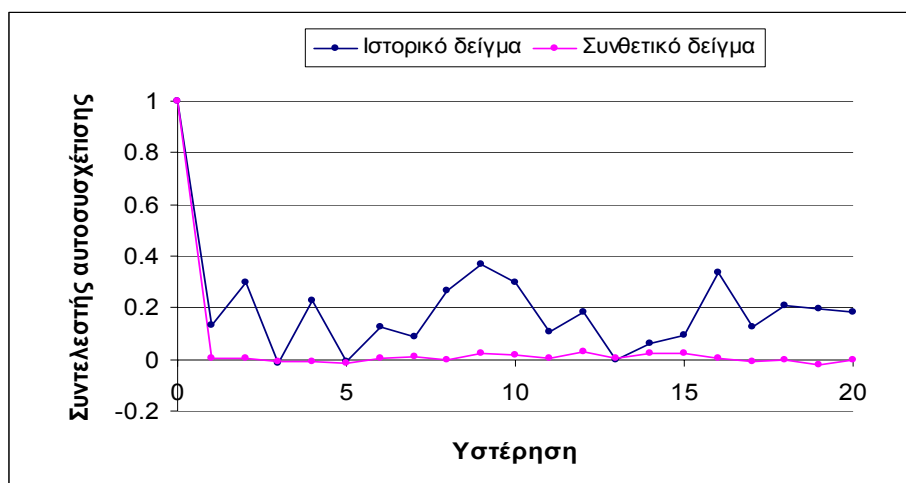
Σχήμα 2.23 Ραβδόγραμμα σύγκρισης των ετήσιων συντελεστών ασυμμετρίας του ιστορικού και του συνθετικού δείγματος απορροών



Σχήμα 2.24 Ραβδόγραμμα σύγκρισης των ετήσιων συντελεστών ασυμμετρίας του ιστορικού και του συνθετικού δείγματος βροχοπτώσεων



Σχήμα 2.25 Διάγραμμα σύγκρισης των αυτοσυσχετίσεων της ετήσιας ιστορικής και συνθετικής χρονοσειράς απορροών για τα 20 πρώτα βήματα χρονικής μετατόπισης



Σχήμα 2.26 Διάγραμμα σύγκρισης των αυτοσυσχετίσεων της ετήσιας ιστορικής και συνθετικής χρονοσειράς βροχοπτώσεων για τα 20 πρώτα βήματα χρονικής μετατόπισης

2.6 Μακροπρόθεσμη εμμονή, εντοπισμός και ποσοτικοποίησή της

Η μακροπρόθεσμη εμμονή των υδρολογικών χρονοσειρών ανακαλύφθηκε από τον Hurst (1951) στα πλαίσια μελέτης του φράγματος του Ασουάν (Aswan High Dam). Ο Hurst μελετώντας τις υδρολογικές χρονοσειρές του Νείλου, διαπίστωσε την ιδιότητα των υγρών και ξηρών ετών να εμφανίζονται κατά ομάδες σχηματίζοντας υγρές και ξηρές περιόδους αντίστοιχα. Έκτοτε η μακροπρόθεσμη εμμονή των φυσικών χρονοσειρών πήρε την ονομασία «φαινόμενο Hurst» (Hurst phenomenon) ενώ αργότερα εισήχθη από τον Mandelbrot (1977) ο εναλλακτικός όρος «φαινόμενο Ιωσήφ» (Joseph effect)⁴.

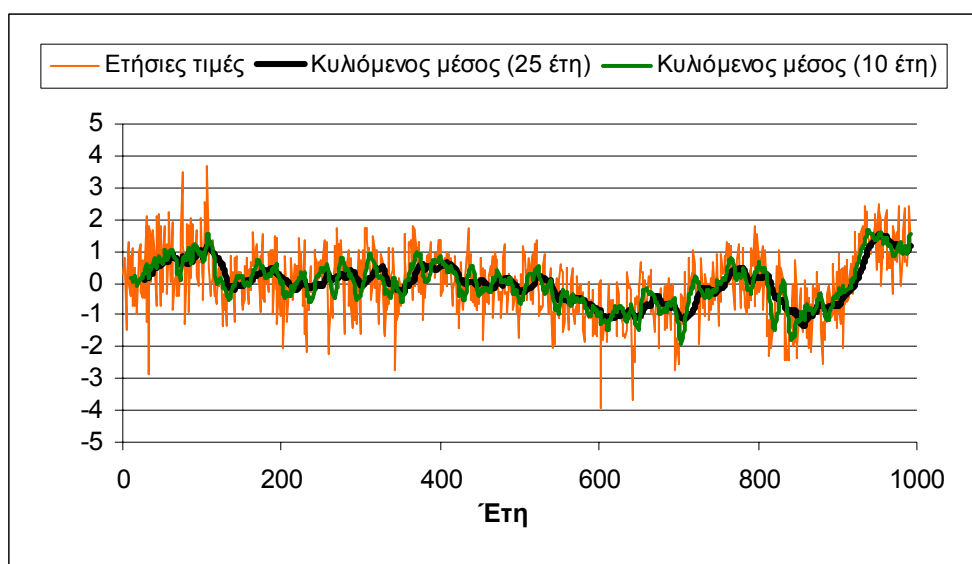
Η μακροπρόθεσμη εμμονή, όμως, δεν εμφανίζεται ως στατιστικό χαρακτηριστικό μόνο των υδρολογικών χρονοσειρών. Έχει πλέον αποδειχθεί ότι το φαινόμενο Hurst παρατηρείται σε ένα πλήθος κλιματολογικών και γεωφυσικών χρονοσειρών, όπως χρονοσειρών διακυμάνσεων εντάσεως ανέμων (Haslett & Raftery, 1989), χρονοσειρών διακυμάνσεως της μέσης παγκόσμιας θερμοκρασίας (Bloomfield, 1992), χρονοσειρών απορροών του ποταμού Νείλου (Eltahir, 1996), του ποταμού Βάρτα στην Πολωνία (Radziejewski & Kundzewicz, 1997), χρονοσειρών ημερήσιων και μηνιαίων εισροών στην λίμνη Ματζόρε στην Ιταλία (Montanari *et al.*, 1997), χρονοσειρών ετησίων απορροών ποταμών κατά μήκος της Ηπειρωτικής Αμερικής (Vogel *et al.*, 1998) και χρονοσειρών πάχους δακτυλίων δένδρων (Koutsoyiannis, 2002b).

⁴ Από τον γνωστό Βιβλικό μύθο των 7 παχιών και των 7 ισχών αγελάδων (7 χρόνια ξηρασίας και 7 χρόνια υδροφορίας).

Τα τελευταία χρόνια, τόσο η προέλευση της μακροπρόθεσμης εμμονής όσο και η συνθετική αναπαραγωγή της αποτελούν αντικείμενο ιδιαίτερου ερευνητικού ενδιαφέροντος λόγω της σχέσεως του φαινομένου Ιωσήφ με την παρατηρούμενη κλιματική αλλαγή (Evans, 1996).

Εντοπισμός και ποσοτικοποίηση της εμμονής

Η μακροπρόθεσμη εμμονή των φυσικών χρονοσειρών εμφανίζεται με τη μορφή υψηλών θετικών τιμών των συντελεστών αυτοσυσχέτισης της στάσιμης χρονοσειράς ακόμα και για μεγάλα βήματα χρονικής μετατόπισης, της τάξεως των εκατοντάδων ετών. Στο Σχήμα 2.27 παρατίθεται το διάγραμμα της ανακατασκευασμένης ιστορικής χρονοσειράς μέσω ετησίων θερμοκρασιών του Βορείου Ημισφαιρίου μήκους 992 ετών (Jones *et al.*, 1998) (για περισσότερες πληροφορίες βλέπε ενότητα 4.1), και στο Σχήμα 2.28 παρουσιάζεται το αυτοσυσχετόγραμμα της ιστορικής χρονοσειράς για τα 55 πρώτα βήματα χρονικής μετατόπισης. Όπως είναι εύκολο να παρατηρήσουμε, οι συντελεστές αυτοσυσχέτισης της χρονοσειράς παραμένουν ιδιαίτερα υψηλοί (της τάξεως του 0.2), ακόμα και για μεγάλα βήματα χρονικής μετατόπισης (της τάξεως των 50 ετών), γεγονός που μας υποδηλώνει την ύπαρξη μακροπρόθεσμης εμμονής στην ιστορική χρονοσειρά.



Σχήμα 2.27 Τιμές ιστορικής χρονοσειράς μέσω ετήσιων θερμοκρασιών Βορείου Ημισφαιρίου (Jones *et al.*, 1998)



Σχήμα 2.28 Αυτοσυσχετόγραμμα ιστορικής χρονοσειράς μέσω ετήσιων θερμοκρασιών Βορείου Ημισφαιρίου (Jones *et al.*, 1998)

Επιχειρώντας να περιγράψουμε τους μηχανισμούς γενέσεως του φαινομένου Hurst, θα μπορούσε να ειπωθεί ότι οφείλει την ύπαρξή του στην ταυτόχρονη εμφάνιση πολλών τυχαίων διακυμάνσεων διαφορετικής χρονικής κλίμακας στην μελετούμενη στάσιμη χρονοσειρά (Koutsoyiannis, 2002b). Αυτό άλλωστε παρατηρείται και στο Σχήμα 2.27, όπου εκτός του διαγράμματος των ετήσιων πραγματοποιήσεων παρουσιάζονται και τα διαγράμματα των κυλιόμενων μέσων για 10 και 25 χρόνια. Κατά αυτόν τον τρόπο, τα στατιστικά της χαρακτηριστικά της υπό μελέτη στάσιμης διαδικασίας μπορεί να θεωρηθεί ότι μεταβάλλονται τυχαία σε κάθε χρονική κλίμακα ενδιαφέροντος. Το αποτέλεσμα των παραπάνω τυχαίων διακυμάνσεων πολλαπλής κλίμακας φαίνεται να είναι μία αυτό-όμοια διαδικασία (self-similar process), η οποία μπορεί να περιγραφεί ως ένα απλό μορφοκλασματικό αντικείμενο (single fractal) (Gneiting & Schlather, 2001). Η κλασματική διάσταση του χώρου στον οποίο κείται η έμμονη διαδικασία, αποτελεί ταυτόχρονα και ένα μέτρο ποσοτικοποίησης της εμμονής, που είναι γνωστό και ως «συντελεστής Hurst».

Προκειμένου ο Mandelbrot (1965) να μπορέσει να περιγράψει το φαινόμενο της μακροπρόθεσμης εμμονής των φυσικών χρονοσειρών, όρισε μία διαδικασία γνωστή ως «Κλασματικός Γκαουσιανός Θόρυβος» [Fractional Gaussian Noise (FGN)] στην οποία θα αναφερθούμε στην συνέχεια.

Αν X_i στάσιμη στοχαστική ανέλιξη, όπου με τον δείκτη i συμβολίζεται το χρονικό διάστημα αναφοράς, τότε είναι δυνατόν να οριστεί η μέση τιμή αυτής από την εξίσωση,

$$\mu = E[X_i] \quad (2.30)$$

οι αυτοσυνδιασπορές αυτής για διάφορα βήματα χρονικής μετατόπισης από την εξίσωση,

$$\gamma_j = \gamma_{|j|} = \text{Cov}[X_i, X_{i+j}] \quad \text{για } j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.31)$$

οι συντελεστές αυτοσυσχέτισης αυτής για διάφορα χρονικά βήματα μετατόπισης από την εξίσωση,

$$\rho_j = \rho_{|j|} = \text{Corr}[X_i, X_{i+j}] = \gamma_j / \gamma_0 \quad \text{για } j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.32)$$

και το φάσμα ισχύος⁵ (power spectrum) αυτής από την εξίσωση

$$s_\gamma(\omega) := 2\gamma_0 + 4 \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j \cos(2\pi j\omega) = 2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \gamma_j \cos(2\pi j\omega) \quad , \quad \omega \in [0, 1/2] \quad (2.33)$$

Επισημαίνεται ότι οι αυτοσυνδιασπορές της στοχαστικής ανέλιξης X_i σε περίπτωση που είναι γνωστό το φάσμα ισχύος της, δίδονται από την εξίσωση (Kantz, 1997, σελ. 18-23):

$$\gamma_j = \int_0^{1/2} s_\gamma(\omega) \cos(2\pi j\omega) d\omega \quad \text{για } j = 0, 1, 2, \dots \quad (2.34)$$

Έχοντας ορίσει την τυχαία μεταβλητή X_i , μπορούμε πλέον να ορίσουμε την τυχαία μεταβλητή $Z_i^{(k)}$, η οποία προκύπτει από την συνάθροιση k διαδοχικών χρονικών διαστημάτων της μεταβλητής X_i . Δηλαδή για $k = 1$ έχουμε $Z_i^{(1)} = X_i$, ενώ για $k = 2$ έχουμε $Z_1^{(2)} = X_1 + X_2$, $Z_2^{(2)} = X_3 + X_4$ κ.τ.λ. Ο αναδρομικός τύπος που μπορεί να περιγράψει την τυχαία μεταβλητή $Z_i^{(k)}$ συναρτήσει της τυχαίας μεταβλητής X_i , δίδεται από την εξίσωση (Koutsoyiannis, 2002b):

⁵ Με τον όρο φάσμα ισχύος μίας στοχαστικής ανέλιξης ορίζουμε τον διακριτό μετασχηματισμό Fourier (Discrete Fourier Transformation) των αυτοσυνδιασπορών γ_j αυτής για διάφορα βήματα χρονικής μετατόπισης j ($j=1, 2, \dots$).

$$Z_i^{(k)} = \sum_{j=(i-1)k+1}^{ik} X_j \quad (2.35)$$

Κατά όμοιο τρόπο με την στοχαστική ανέλιξη X_i είναι δυνατόν να εξάγουμε τα στατιστικά χαρακτηριστικά της στοχαστικής ανέλιξης $Z_i^{(k)}$ καθώς και το φάσμα ισχύος αυτής, τα οποία παρουσιάζονται στις ακόλουθες εξισώσεις (Koutsoyiannis, 2002b)

$$E[Z_i^{(k)}] = k E[X_i] = k\mu \quad (2.36)$$

$$\gamma_j^{(k)} = \gamma_{|j|}^{(k)} = \text{Cov}[Z_i^{(k)}, Z_{i+j}^{(k)}] = \sum_{\lambda=1}^k \sum_{m=j+k+1}^{(j+1)k} \gamma_{m-\lambda} \quad , \quad j=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.37)$$

$$\rho_j^{(k)} = \rho_{|j|}^{(k)} = \text{Corr}[Z_i^{(k)}, Z_{i+j}^{(k)}] = \gamma_j^{(k)} / \gamma_0^{(k)} \quad , \quad j=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.38)$$

$$s_\gamma^{(k)}(\omega) := 2 \gamma_0^{(k)} + 4 \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j^{(k)} \cos(2\pi j\omega) = 2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \gamma_j^{(k)} \cos(2\pi j\omega) \quad , \quad \omega \in [0, \frac{1}{2}] \quad (2.39)$$

$$\gamma_j^{(k)} = \int_0^{1/2} s_\gamma^{(k)}(\omega) \cos(2\pi j\omega) d\omega \quad \text{για } j=0, 1, 2, \dots \quad (2.40)$$

Με χρήση των πλήρως εξαρτημένων τυχαίων μεταβλητών X_i και $Z_i^{(k)}$, ο «Κλασματικός Γκαουσιανός Θόρυβος» (FGN) είναι δυνατόν να περιγραφεί ως μία αυτό-όμοια διαδικασία που κείται σε χώρο μίας μορφοκλασματικής διαστάσεως και υπακούει στην σχέση (Koutsoyiannis, 2002b):

$$(Z_i^{(k)} - k\mu) =_d \left(\frac{k}{\lambda}\right)^H (Z_j^{(\lambda)} - \lambda\mu) \quad (2.41)$$

Με H συμβολίζεται ένας εκθέτης που λαμβάνει τιμές στο διάστημα $(0, 1)$ ονομαζόμενος και ως «εκθέτης Hurst» (Hurst exponent) ή «συντελεστής Hurst»

(Hurst coefficient), ενώ με το σύμβολο ($=_d$), απεικονίζεται η ισότητα στην (πεπερασμένης διάστασης) από κοινού κατανομή. Στην περίπτωση που ο συντελεστής Hurst λαμβάνει τιμές στο διάστημα (0.5, 1), τότε αναφερόμαστε σε έμμονες χρονοσειρές (persistent time series) με θετικούς συντελεστές αυτοσυσχέτισης των ετησίων πραγματοποιήσεων ακόμα και για μεγάλα βήματα χρονικής μετατόπισης (lags), της τάξεως των εκατοντάδων ετών. Αντίθετα στην περίπτωση που ο συντελεστής Hurst λαμβάνει τιμές στο διάστημα (0, 0.5), τότε αναφερόμαστε σε αντίεμμονες χρονοσειρές (antipersistent time series), με αρνητικούς συντελεστές αυτοσυσχέτισης των ετησίων ιστορικών χρονοσειρών (Gneiting & Schlather, 2001).

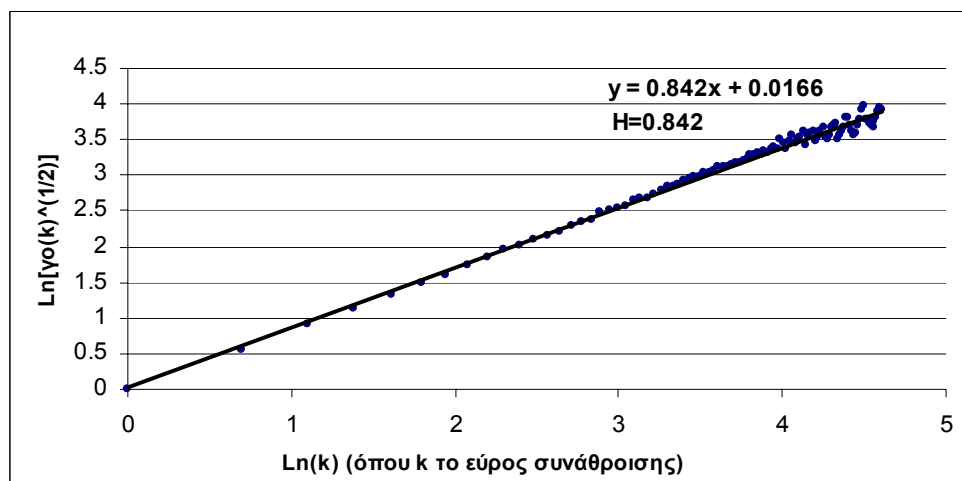
Αν τώρα στην (2.41) θέσουμε $i = j = \lambda = 1$ καταλήγουμε στη σχέση,

$$(Z_1^{(k)} - k\mu) =_d k^H (Z_1^{(1)} - \mu) \quad (2.42)$$

από όπου με απλούς αλγεβρικούς υπολογισμούς οδηγούμαστε στη σχέση,

$$\gamma_0^{(k)} = k^{2H} \gamma_0 \quad (2.43)$$

η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον εύκολο προσδιορισμό του συντελεστή Hurst μίας στάσιμης χρονοσειράς (Montanari *et al.*, 1997). Στο Σχήμα 2.29 παρουσιάζεται ο προσδιορισμός του συντελεστή Hurst με χρήση της εξίσωσης (2.43) για την ανακατασκευασμένη ιστορική χρονοσειρά μέσω ετησίων θερμοκρασιών του Βορείου Ημισφαιρίου μήκους 992 ετών (Jones *et al.*, 1998).



Σχήμα 2.29 Προσδιορισμός του συντελεστή Hurst της ιστορικής χρονοσειράς μέσω ετησίων θερμοκρασιών Βορείου Ημισφαιρίου (Jones *et al.*, 1998)

Θέτοντας τώρα στην (2.43) $H = 0.5$, οδηγούμαστε στην εξίσωση,

$$\gamma_0^{(k)} = k \gamma_0 \quad (2.44)$$

η οποία αποτελεί ιδιότητα του λευκού θορύβου, δηλαδή μίας διαδικασίας χωρίς κάποια εσωτερική δομή. Με χρήση της (2.42) και με απλούς αλγεβρικούς υπολογισμούς, είναι εύκολο να αποδειχθεί (Koutsoyiannis, 2002a), ότι το θεωρητικό αυτοσυσχετόγραμμα του «Κλασματικού Γκαουσιανού θορύβου» (FGN) είναι ανεξάρτητο της χρονικής κλίμακας της συναθροίσεως της τυχαίας μεταβλητής $Z_i^{(k)}$ και περιγράφεται από την εξίσωση,

$$\rho_j^{(k)} = \rho_j = \rho_{|j|} = \left(\frac{1}{2}\right) [(|j| + 1)^{2H} + (|j| - 1)^{2H}] - |j|^{2H}, \quad j \in \mathbb{Z} - \{0\} \quad (2.45)$$

Η εξίσωση (2.45), εκτός από το ότι είναι ιδιαίτερα απλή, ταυτόχρονα μας υποδηλώνει ότι ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης μίας διαδικασίας FGN φθίνει ως εκθετική συνάρτηση του βήματος της χρονικής μετατοπίσεως j . Για να γίνει απλώς και μόνο μία σύγκριση, παρατίθεται η εξίσωση που περιγράφει το θεωρητικό αυτοσυσχετόγραμμα ενός μοντέλου AR(1) (Koutsoyiannis, 2002b) το οποίο αποτελεί ανέλιξη Markov (Markovian process),

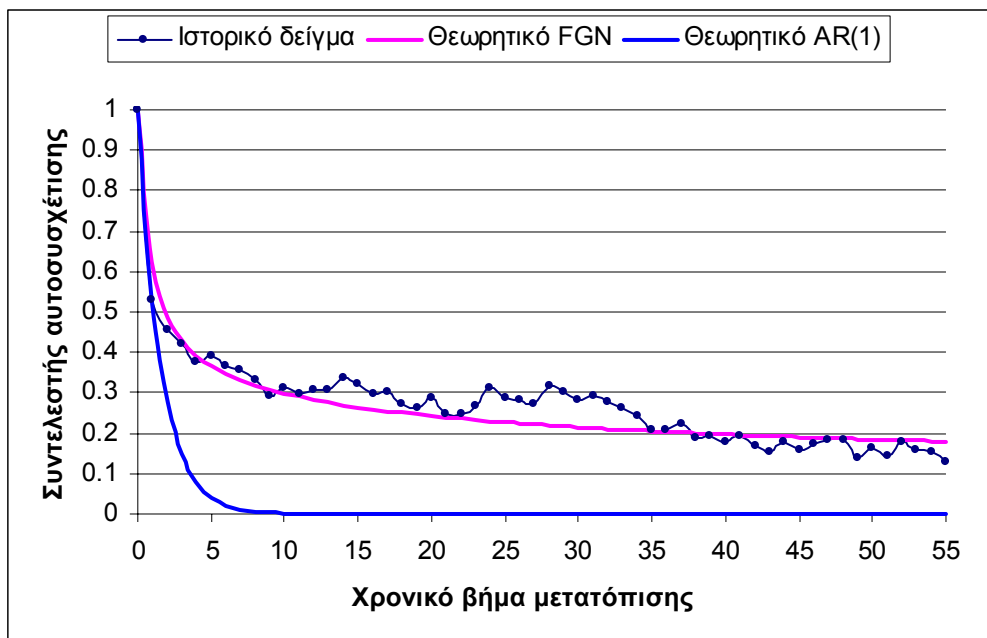
$$\rho_j^{(k)} = \rho_1^{(k)} \rho^{k(|j|-1)} \quad \text{όπου} \quad \rho_1^{(k)} = \frac{\rho (1-\rho^k)^2}{k (1-\rho^2) - 2\rho (1-\rho^k)}, \quad j \in \mathbb{Z} - \{0\} \quad (2.46)$$

όπου $\rho = \rho_1^{(1)} = \gamma_1 / \gamma_0$.

Η πολυπλοκότητα της εξισώσεως (2.46) γίνεται αμέσως αντιληπτή, με άμεσο συμπέρασμα ότι στην περίπτωση χρήσεως ενός μοντέλου AR(1) η $Z_i^{(k)}$ δεν αποτελεί ανέλιξη Markov αλλά μία αρκετά πιο σύνθετη ανέλιξη. Για την ακρίβεια, η εξίσωση (2.46) αντιστοιχεί σε μία διαδικασία που μπορεί να περιγραφεί από ένα μοντέλο ARMA(1, 1) (Box *et al.*, 1994, p.58).

Στο Σχήμα 2.30 γίνεται μία σύγκριση του εμπειρικού αυτοσυσχετογράμματος της ανακατασκευασμένης ιστορικής χρονοσειράς μέσω ετησίων θερμοκρασιών του Βορείου Ημισφαιρίου (Jones *et al.*, 1998), του θεωρητικού αυτοσυσχετογράμματος FGN για συντελεστή Hurst ίσο με τον προσδιορισθέντα για την αυτή ιστορική

χρονοσειρά ($H= 0.842$), και του θεωρητικού αυτοσυσχετογράμματος ενός μοντέλου AR(1) για συντελεστή αυτοσυσχέτισης 1^{ης} τάξεως ίσο με τον αντίστοιχο της ιστορικής χρονοσειράς.



Σχήμα 2.30 Σύγκριση αυτοσυσχετογράμματος ιστορικού δείγματος μέσων θερμοκρασιών βορείου ημισφαιρίου και των θεωρητικών αυτοσυσχετογραμμάτων FGN και AR(1)

Η εν λόγω σύγκριση επιβεβαιώνει τη μεγάλη επιτυχία του θεωρητικού αυτοσυσχετογράμματος FGN να περιγράψει την μακροπρόθεσμη εμμονή της ιστορικής χρονοσειράς, καθώς και την αδυναμία ενός Μαρκοβιανού μοντέλου (όπως το AR(1)) να αναπαράγει το φαινόμενο Hurst (Koutsoyiannis, 2002b).

2.7 Στάσιμα μονομεταβλητά μοντέλα αναπαραγωγής της μακροπρόθεσμης εμμονής

Αν X_i τυχούσα στοχαστική ανέλιξη, αποδεικνύεται (Box & Jenkins, 1970, σελ. 46) ότι για οποιαδήποτε μορφή του αυτοσυσχετογράμματος της X_i μπορούν να προσδιοριστούν παράμετροι α_j ($j= 0, 1, 2, \dots$) τέτοιες ώστε να ισχύει η εξίσωση,

$$X_i = \sum_{j=-\infty}^0 \alpha_{-j} V_{i+j} = \dots + \alpha_2 V_{i-2} + \alpha_1 V_{i-1} + \alpha_0 V_i \quad (2.47)$$

γνωστή και ως «Μοντέλο Κινούμενου Μέσου Όρου» ή ακριβέστερα «Μοντέλο Πίσω Κινούμενου Μέσου Όρου» [Backward Moving Average model, (BMA)]. Με X_i συμβολίζεται η τυχαία μεταβλητή που αντιστοιχεί στο χρονικό διάστημα i και με V_i οι ασυσχέτιστες ως προς τον χρόνο i τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν δεδομένη κατανομή (μεταβλητές λευκού θορύβου).

Ορίζοντας ως $\gamma_j = \text{Cov}[X_i, X_{i+j}]$ τις αυτοσυνδιασπορές της μεταβλητής X_i για διάφορα χρονικά βήματα μετατόπισης j , είναι δυνατόν να προσδιοριστούν οι παράμετροι α_j ($j=0, 1, 2, \dots$) από την σχέση,

$$\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \alpha_{i+j} = \gamma_i, \quad i=0, 1, 2, \dots \quad (2.48)$$

Στην πράξη βέβαια, τα όρια του παραπάνω αθροίσματος δεν μπορεί παρά να είναι πεπερασμένα, αφού είναι πρακτικά αδύνατον να παραχθεί άπειρο πλήθος πραγματοποιήσεων λευκού θορύβου V_i . Κατά αυτόν τον τρόπο, οι (2.47) και (2.48) λαμβάνουν την πεπερασμένη μορφή,

$$X_i = \sum_{j=-s}^0 \alpha_{-j} V_{i+j} = \alpha_s V_{i-s} + \dots + \alpha_2 V_{i-2} + \alpha_1 V_{i-1} + \alpha_0 V_i \quad (2.49)$$

$$\sum_{j=0}^{s-i} \alpha_j \alpha_{i+j} = \gamma_i, \quad i=0, 1, 2, \dots \quad (2.50)$$

όπου s ένας αρκετά μεγάλος θετικός ακέραιος αριθμός.

Το απαιτούμενο πλήθος των όρων α_j ($j=0, 1, 2, \dots, s$) της σχέσεως (2.49) εξαρτάται από τον επιθυμητό αριθμό των προς αναπαραγωγή αυτοσυσχετίσεων, τον απαιτούμενο βαθμό ακρίβειας της συνθετικής αναπαραγωγής, καθώς και τον ρυθμό μείωσης των προς αναπαραγωγή αυτοσυσχετίσεων συναρτήσει του χρονικού βήματος της μετατοπίσεως⁶ (Koutsoyiannis, 2000).

Γενικεύοντας την εξίσωση του μοντέλου (2.47), μπορούμε να γράψουμε την τυχαία μεταβλητή X_i ως ένα σταθμισμένο άθροισμα όχι μόνο των προηγούμενων

⁶ Μεγάλες τιμές των προς αναπαραγωγή αυτοσυσχετίσεων ακόμα και για μεγάλα χρονικά βήματα μετατόπισης, οδηγούν σε υψηλές τιμές των συντελεστών α_j με αποτέλεσμα να μην είναι δυνατή η αμέλεια των τελευταίων όρων της σειράς τους.

αλλά και των επόμενων χρονικών διαστημάτων του λευκού θορύβου V_i . Κατά αυτόν τον τρόπο οδηγούμαστε στο «Μοντέλο Εμπρός και Πίσω Κινούμενου Μέσου Όρου» [Backward and Forward Moving Average model, (BFMA)] (Koutsoyiannis, 2000) που περιγράφεται από την εξίσωση,

$$X_i = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \alpha_j V_{i+j} = \dots + \alpha_{-2} V_{i-2} + \alpha_{-1} V_{i-1} + \alpha_0 V_i + \alpha_1 V_{i+1} + \alpha_2 V_{i+2} + \dots \quad (2.51)$$

Σε αυτήν την περίπτωση, οι παράμετροι α_j του μοντέλου μπορούν να προσδιοριστούν από την εξίσωση,

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \alpha_j \alpha_{i+j} = \gamma_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (2.52)$$

συναρτήσει των αυτοσυνδιασπορών της περιγραφόμενης από το μοντέλο τυχαίας διαδικασίας για διάφορα βήματα χρονικής μετατόπισης (lags).

Είναι προφανές ότι το μοντέλο BFMA που περιγράφεται από την εξίσωση (2.51) αποτελεί μία γενικότερη έκφραση που περιλαμβάνει άπειρες δυνατές μορφές λύσεων (δηλαδή συνδυασμών παραμέτρων α_j) που μπορούν να περιγράψουν μία δεδομένη μορφή αυτοσυσχετογράμματος. Δύο τέτοιες ενδιαφέρουσες μορφές είναι: (1) η λύση που προκύπτει με την θεώρηση $\alpha_j = 0 \quad \forall j > 0$ και η οποία συμπίπτει με το μοντέλο BMA και (2) η λύση που προκύπτει με την θεώρηση $\alpha_{|j|} = \alpha_j \quad \forall j$, γνωστή και ως μοντέλο «Συμμετρικά Κινούμενου Μέσου Όρου» [Symmetric Moving Average model (SMA)] (Koutsoyiannis, 2000) η οποία περιγράφεται από τις εξισώσεις,

$$X_i = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \alpha_{|j|} V_{i+j} = \dots + \alpha_2 V_{i-2} + \alpha_1 V_{i-1} + \alpha_0 V_i + \alpha_1 V_{i+1} + \alpha_2 V_{i+2} + \dots \quad (2.53)$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \alpha_{|j|} \alpha_{|i+j|} = \gamma_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (2.54)$$

για άπειρους όρους του σταθμισμένου αθροίσματος, και από τις εξισώσεις

$$X_i = \sum_{j=-s}^s \alpha_{|j|} V_{i+j} = \alpha_s V_{i-s} + \dots + \alpha_1 V_{i-1} + \alpha_0 V_i + \alpha_1 V_{i+1} + \dots + \alpha_s V_{i+s} \quad (2.55)$$

$$\sum_{j=-s}^{s-i} \alpha_{|j|} \alpha_{|i+j|} = \gamma_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (2.56)$$

για πεπερασμένου πλήθους όρων του εν λόγω αθροίσματος.

Δεδομένου ότι το μοντέλο SMA έχει $s + 1$ αριθμό παραμέτρων α_j ($j = 0, 1, \dots, s$), οι οποίες μπορούν να προσδιορισθούν από την (2.56), είναι πρόδηλο ότι θα διατηρεί τους πρώτους $s + 1$ όρους του αυτοσυσχετογράμματος της τυχαίας μεταβλητής X_i (δηλαδή $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s$). Όμως, ακόμα και για $j > s$ οι αυτοσυνδιασπορές της τυχαίας μεταβλητής X_i δεν μηδενίζονται απότομα αλλά λαμβάνουν τιμές σύμφωνα με τις εξισώσεις,

$$\sum_{j=i-s}^s \alpha_j \alpha_{i-j} = \gamma_i, \quad i = s + 1, \dots, 2s \quad (2.57)$$

$$\gamma_i = 0, \quad i > 2s \quad (2.58)$$

Εκτός από τον προσδιορισμό των παραμέτρων α_j τόσο του μοντέλου BMA όσο και του μοντέλου SMA (στον οποίο θα αναφερθούμε στην συνέχεια), είναι απαραίτητος ο προσδιορισμός των στατιστικών χαρακτηριστικών του χρησιμοποιούμενου από το εκάστοτε μοντέλο λευκού θορύβου V_i . Ορίζοντας ως $\mu_x := E[X_i]$ τη μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής X_i , $\gamma_0 := \text{Var}[X_i]$ τη διασπορά της τυχαίας μεταβλητής X_i , $\xi_x := E[(X_i - \mu_x)^3] / \gamma_0^{3/2}$ τον συντελεστή ασυμμετρίας της τυχαίας μεταβλητής X_i , $\mu_v := E[V_i]$ την μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής του λευκού θορύβου V_i , $\text{Var}[V_i] = 1$ την διασπορά της τυχαίας μεταβλητής του λευκού θορύβου V_i και $\xi_v := E[(V_i - \mu_v)^3]$ τον συντελεστή ασυμμετρίας της τυχαίας μεταβλητής του λευκού θορύβου V_i , τα απαιτούμενα στατιστικά χαρακτηριστικά του χρησιμοποιούμενου από το εκάστοτε μοντέλο λευκού θορύβου μπορούν εύκολα να προσδιοριστούν με χρήση των σχέσεων,

$$\left(\sum_{j=0}^s \alpha_j \right) \mu_v = \mu_x \quad (2.59)$$

$$\text{Var}[V_i] = 1 \quad (\text{εξ ορισμού}) \quad (2.60)$$

$$\left(\sum_{j=0}^s \alpha_j^3 \right) \zeta_v = \zeta_x \gamma_0^{3/2} \quad (2.61)$$

για το μοντέλο BMA και,

$$\left(\alpha_0 + 2 \sum_{j=1}^s \alpha_j \right) \mu_v = \mu_x \quad (2.62)$$

$$\text{Var}[V_i] = 1 \quad (\text{εξ ορισμού}) \quad (2.63)$$

$$\left(\alpha_0^3 + 2 \sum_{j=1}^s \alpha_j^3 \right) \zeta_v = \zeta_x \gamma_0^{3/2} \quad (2.64)$$

για το μοντέλο SMA.

Θέλοντας να αναφερθούμε στα πλεονεκτήματα της χρήσεως του μοντέλου SMA έναντι του μοντέλου BMA, αξίζει να τονίσουμε ότι (Koutsoyiannis, 2000):

- Το μοντέλο SMA έχει κλειστή θεωρητική λύση ως προς τον προσδιορισμό των παραμέτρων του α_j , σε αντίθεση με το μοντέλο BMA που δεν έχει μία αντίστοιχη κλειστή μορφή λύσεως (όπως θα παρουσιαστεί και στην συνέχεια).
- Οι παράμετροι α_j του μοντέλου SMA για μεγάλες τιμές του j εμφανίζονται μικρότερες από τις αντίστοιχες τιμές των παραμέτρων του μοντέλου BMA. Το παραπάνω γεγονός μας δίνει την δυνατότητα αμέλησης των παραμέτρων α_j του μοντέλου SMA για $j > s$, χωρίς την εισαγωγή κάποιου αξιόλογου σφάλματος (αναφερόμαστε στην περίπτωση των πεπερασμένων ορίων του σταθμισμένου αθροίσματος των σχέσεων (2.49) για το μοντέλο BMA και (2.55) για το μοντέλο SMA).

- Ο απαιτούμενος συντελεστής ασυμμετρίας του χρησιμοποιούμενου από το μοντέλο SMA λευκού θορύβου, εμφανίζεται μικρότερος από τον αντίστοιχο απαιτούμενο για χρήση του μοντέλου BMA⁷.
- Οι αυτοσυσχετίσεις γ_j της μεταβλητής X_i για $j > s$ φθίνουν ομαλά υπακούοντας στις σχέσεις (2.57) και (2.58) στην περίπτωση που γίνεται χρήση του μοντέλου SMA, ενώ μηδενίζονται απότομα στην περίπτωση χρήσεως του μοντέλου BMA.

Υπολογισμός των παραμέτρων α_j των μοντέλων BMA και SMA

Κλειστή αναλυτική λύση

Στην περίπτωση που το μητρώο των αυτοσυνδιασπορών της μεταβλητής X_i είναι θετικά ορισμένο, αποδεικνύεται (Koutsoyiannis, 2000) ότι οι παράμετροι α_j του μοντέλου SMA μπορούν να προσδιορισθούν από το φάσμα ισχύος της ανέλιξης X_i .

Αν $s_\gamma(\omega)$ το φάσμα ισχύος της ανέλιξης X_i που δίδεται από τον διακριτό μετασχηματισμό Fourier (DFT) της σειράς των αυτοσυνδιασπορών γ_j της εν λόγω ανέλιξης,

$$s_\gamma(\omega) := 2\gamma_0 + 4 \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j \cos(2\pi j\omega) = 2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \gamma_j \cos(2\pi j\omega) \quad , \quad \omega \in [0, \frac{1}{2}] \quad (2.65)$$

τότε το φάσμα ισχύος $s_\alpha(\omega)$ της σειράς των παραμέτρων α_j ,

$$s_\alpha(\omega) := 2\alpha_0 + 4 \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \cos(2\pi j\omega) = 2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \alpha_j \cos(2\pi j\omega) \quad , \quad \omega \in [0, \frac{1}{2}] \quad (2.66)$$

συνδέεται με το φάσμα ισχύος της σειράς των αυτοσυνδιασπορών $s_\gamma(\omega)$ με την εξίσωση,

$$|s_\alpha(\omega)| = \sqrt{2 s_\gamma(\omega)} \quad (2.67)$$

⁷ Είναι γνωστό πως η παραγωγή λευκού θορύβου με υψηλό συντελεστή ασυμμετρίας απαιτεί ένα ιδιαίτερα αυξημένο πλήθος ανεξάρτητων πραγματοποιήσεων του λευκού θορύβου, αφού ο υπολογιζόμενος δειγματικός συντελεστής ασυμμετρίας έχει άνω όριο εξαρτώμενο από το μήκος του δείγματος (Todini, 1980).

για την περίπτωση του μοντέλου BMA και με την εξίσωση,

$$s_a(\omega) = \sqrt{2 s_\gamma(\omega)} \quad (2.68)$$

για την περίπτωση του μοντέλου SMA.

Από την σχέση (2.67) μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι δεν είναι δυνατός ο αναλυτικός υπολογισμός του φάσματος ισχύος της σειράς των παραμέτρων α_j για το μοντέλο BMA, γεγονός που οφείλεται στο ότι το $s_a(\omega) \in \mathbb{C}$, οπότε από την εξίσωση (2.67) μπορούμε να γνωρίζουμε μόνο το μέτρο του $s_a(\omega)$ και όχι την φάση του⁸. Αντιθέτως, για το μοντέλο SMA και επειδή $s_a(\omega) \in \mathbb{R}^+$, είναι δυνατός ο αναλυτικός υπολογισμός της σειράς των παραμέτρων α_j μέσω του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier του φάσματος ισχύος $s_a(\omega)$.

$$\alpha_j = \int_0^{1/2} s_a(\omega) \cos(2\pi j\omega) d\omega \quad \text{για } j = 0, 1, 2, \dots \quad (2.69)$$

Στην περίπτωση μάλιστα που οι αυτοσυσχετίσεις της τυχαίας μεταβλητής X_i περιγράφονται από το θεωρητικό αυτοσυσχετόγραμμα FGN (βλέπε ενότητα 2.6), τότε μία προσεγγιστική έκφραση των παραμέτρων α_j του μοντέλου SMA μπορεί να ανακτηθεί από τις σχέσεις,

$$\alpha_0 = \frac{\sqrt{(2-2H)\gamma_0}}{1.5-H}, \quad \alpha_j = \frac{\alpha_0}{2} [(j+1)^{H+0.5} + (j-1)^{H+0.5} - 2j^{H+0.5}] \quad \text{για } j > 0 \quad (2.70)$$

συναρτήσει του συντελεστή Hurst (H) (Koutsoyiannis, 2002b).

Αριθμητική λύση μέσω βελτιστοποιήσεως

Ως αυτήν την στιγμή είδαμε τον τρόπο με τον οποίο μπορεί να εξαχθεί μία κλειστή λύση των παραμέτρων α_j του μοντέλου SMA στην περίπτωση που το μητρώο των αυτοσυνδιασπορών της τυχαίας μεταβλητής X_i είναι θετικά ορισμένο. Μια τέτοια όμως απαίτηση ως προς τις αυτοσυνδιασπορές της τυχαίας μεταβλητής X_i είναι ιδιαίτερα περιοριστική ως προς την ευρύτητα εφαρμογής του μοντέλου SMA.

⁸ Μπορεί να αποδειχθεί (Koutsoyiannis, 2000) ότι δεν υφίσταται άλλος μετασχηματισμός που να οδηγεί σε πραγματικές τιμές του φάσματος ισχύος των παραμέτρων α_j του μοντέλου BMA.

Παράλληλα, αποδείξαμε ότι δεν υπάρχει μετασχηματισμός που μπορεί να μας δώσει κλειστή λύση των παραμέτρων α_j του μοντέλου BMA ακόμα και για θετικά ορισμένο μητρώο αυτοσυνδιασπορών της τυχαίας μεταβλητής X_i . Με βάση τους παραπάνω συλλογισμούς, αναπτύχθηκε μία αριθμητική λύση ευρέσεως των παραμέτρων των μοντέλων BMA και SMA, τόσο για θετικά όσο και για μη θετικά ορισμένο μητρώο αυτοσυνδιασπορών της τυχαίας μεταβλητής X_i (Koutsoyiannis, 2000).

Ορίζοντας ως $\zeta = [\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_s]^T$ το διάνυσμα των παραμέτρων ενός μοντέλου SMA ή ενός μοντέλου BMA και $\theta = [\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_s]^T$ το διάνυσμα των αυτοσυνδιασπορών της τυχαίας μεταβλητής X_i , είναι δυνατόν να προσδιοριστεί ένα μητρώο \mathbf{p} διαστάσεων $(s + 1) \times (s + 1)$ ώστε να ισχύει η μητρωϊκή σχέση:

$$\mathbf{p}\zeta = \theta \quad (2.71)$$

Τα στοιχεία του μητρώου \mathbf{p} δίδονται από την αναδρομική σχέση,

$$p^{i,j} = \frac{1}{2} [\alpha_{j-i} U(j-i) + \alpha_{i+j-2} U(s-i-j+1)] \quad (2.72)$$

για την περίπτωση του μοντέλου BMA και από την αναδρομική σχέση,

$$p^{i,j} = \alpha_{|j-i|} + \alpha_{i+j-2} U(j-2) U(s-i-j+1) \quad (2.73)$$

για την περίπτωση του μοντέλου SMA. Με $U(x)$ συμβολίζεται η βηματική συνάρτηση Heaviside για την οποία ισχύει $U(x) = 1 \forall x \in [0, \infty)$ και $U(x) = 0 \forall x \in (-\infty, 0)$. Το σύστημα των $s + 1$ εξισώσεων που περιγράφεται από την εξίσωση (2.71) είναι μη γραμμικό, περιλαμβάνοντας γινόμενα των άγνωστων παραμέτρων των μοντέλων. Άμεση συνέπεια του παραπάνω είναι ότι το σύστημα έχει μία ή περισσότερες λύσεις στην περίπτωση θετικά ορισμένου μητρώου αυτοσυνδιασπορών της τυχαίας μεταβλητής X_i και καμία λύση στην περίπτωση μη θετικά ορισμένου μητρώου. Σκοπός μας λοιπόν είναι ο προσδιορισμός μίας λύσεως (αν αυτή βέβαια υπάρχει) ή μίας προσεγγίσεως, που ικανοποιεί στον καλύτερο δυνατό βαθμό την μητρωϊκή σχέση (2.71). Κάτι τέτοιο μπορεί να επιτευχθεί με χρήση μη γραμμικών μεθόδων βελτιστοποιήσεως συναρτήσεων πολλών μεταβλητών, όπως η μέθοδος της Πλέον Απότομης Κατάβασης (Steepest Descent method) (βλέπε εδάφιο 3.3.5) και η μέθοδος

των Συζυγών Κλίσεων (Fletcher – Reeves Conjugate Gradient methods) (βλέπε εδάφιο 3.3.6)

Για την πραγματοποίηση όμως της προαναφερθείσας μη γραμμικής βελτιστοποιήσεως είναι απαραίτητος ο καθορισμός μίας αντικειμενικής συναρτήσεως ως μέτρο επίδοσης του υπολογισμού της ακριβούς λύσεως (αν αυτή βέβαια υπάρχει) ή της επιζητούμενης βέλτιστης δυνατής προσεγγίσεως (αν δεν υπάρχει ακριβής λύση). Η αντικειμενική συνάρτηση που προτείνεται δίδεται από την σχέση (Koutsoyiannis, 2000),

$$\min f(\zeta) = f(\alpha_0, \dots, \alpha_s) := \|\mathbf{p}\zeta - \boldsymbol{\theta}\|^2 + \lambda(\mathbf{p}_1\zeta - \gamma_0)^2 \quad (2.74)$$

η οποία είναι δυνατόν να λάβει την τιμή $f(\zeta) = 0$, στην περίπτωση που υπάρχει ακριβής λύση του συστήματος (2.71) ή μία θετική τιμή στην περίπτωση που δεν υφίσταται δυνατή λύση αυτού. Με \mathbf{p}_1 συμβολίζεται η πρώτη γραμμή του μητρώου \mathbf{p} , με λ ένας μεγάλος θετικός συντελεστής βάρους, ο οποίος εισάγει έναν όρο ποινής στην περίπτωση μη τήρησης της διασποράς γ_0 της τυχαίας μεταβλητής X_i , και με $\|\cdot\|$ η ευκλείδεια νόρμα διανύσματος.

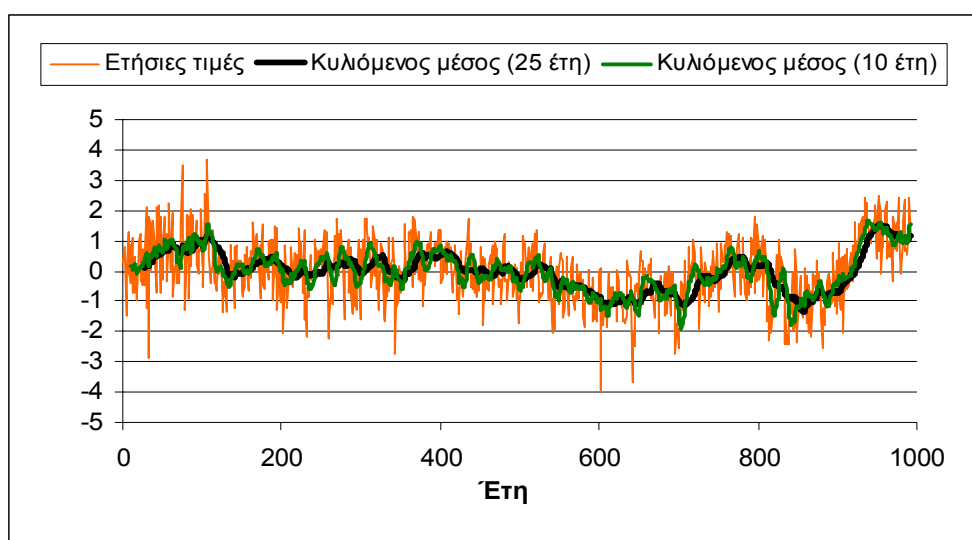
Η εφαρμογή των μεθόδων της Πλέον Απότομης Κατάβασης (Steepest Descent method) και των Συζυγών Κλίσεων (Fletcher – Reeves Conjugate Gradient methods), απαιτούν την αριθμητική ή αναλυτική εξαγωγή των παραγώγων της αντικειμενικής συναρτήσεως $f(\zeta)$ σε οποιοδήποτε σημείο του πεδίου ορισμού της. Προκειμένου να επιταχυνθούν οι υπολογισμοί κατά την βελτιστοποίηση παρατίθεται η αναλυτική έκφραση της παραγώγου της εν λόγω αντικειμενικής συναρτήσεως:

$$\frac{df(\zeta)}{d\zeta} = 4(\mathbf{p}\zeta - \boldsymbol{\theta})^T \mathbf{p} + 4\lambda(\mathbf{p}_1\zeta - \gamma_0) \mathbf{p}_1 \quad (2.75)$$

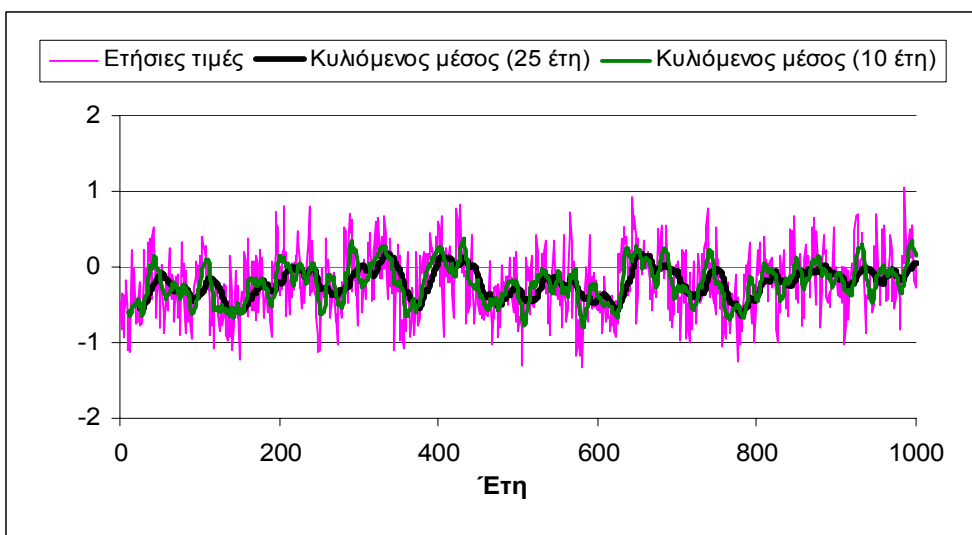
Εφαρμογή του μοντέλου SMA για αναπαραγωγή της μακροπρόθεσμης εμμονής φυσικής χρονοσειράς

Στη συνέχεια παρατίθενται υπό την μορφή διαγραμμάτων τα αποτελέσματα της συνθετικής αναπαραγωγής της μακροπρόθεσμης εμμονής της ανακατασκευασμένης ιστορικής χρονοσειράς των μέσων ετησίων θερμοκρασιών του Βορείου Ημισφαιρίου μήκους 992 ετών (Jones *et al.*, 1998). Για την παραγωγή των συνθετικών πραγματοποιήσεων της τυχαίας μεταβλητής που περιγράφει την εν λόγω

φυσική διαδικασία αναπτύχθηκε πρόγραμμα που παρατίθεται στο παράρτημα Γ, το οποίο χρησιμοποιεί τις εξισώσεις (2.70) για την αναπαραγωγή της μακροπρόθεσμης εμμονής της ιστορικής χρονοσειράς. Επισημαίνεται ότι τα στατιστικά χαρακτηριστικά της συνθετικής χρονοσειράς έχουν προέλθει από στοχαστική προσομοίωση μήκους 5000 ετών.



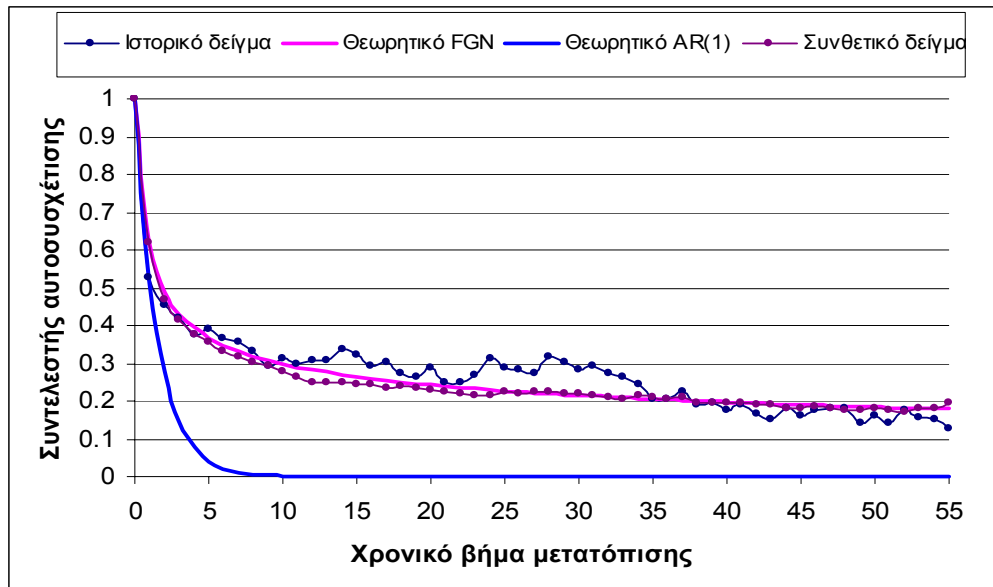
Σχήμα 2.31 Τιμές ιστορικής χρονοσειράς μέσω ετήσιων θερμοκρασιών Βορείου Ημισφαιρίου (Jones *et al.*, 1998)



Σχήμα 2.32 Τιμές συνθετικής χρονοσειράς μέσω ετήσιων θερμοκρασιών που παρήχθη με χρήση του μοντέλου SMA

Στο Σχήμα 2.32 παρουσιάζεται το διάγραμμα των ετήσιων πραγματοποιήσεων του συνθετικού δείγματος καθώς και οι κυλιόμενοι μέσοι όροι αυτού για 10 και 25 έτη. Συγκρίνοντας το Σχήμα 2.32 με το Σχήμα 2.31 που αναφέρεται στην ιστορική

χρονοσειρά, μπορούμε να διαπιστώσουμε τη μεγάλη επιτυχία του μοντέλου SMA στην αναπαραγωγή της μακροπρόθεσμης εμμονής. Στο ίδιο ακριβώς συμπέρασμα μπορούμε να καταλήξουμε παρατηρώντας το Σχήμα 2.33, όπου στο ίδιο διάγραμμα παρουσιάζονται τα αυτοσυσχετογράμματα της ιστορικής και της συνθετικής χρονοσειράς καθώς και τα θεωρητικά αυτοσυσχετογράμματα μίας ανέλιξης FGN και μίας ανέλιξης Markov (η τελευταία περιγράφεται μέσω ενός μοντέλου AR(1)).



Σχήμα 2.33 Οπτικοποιημένη σύγκριση αυτοσυσχετογραμμάτων

2.8 Στάσιμα πολυμεταβλητά μοντέλα αναπαραγωγής της μακροπρόθεσμης εμμονής

Τα μοντέλα BMA και SMA που μελετήθηκαν στην ενότητα 2.7 ως μονομεταβλητά, μπορούν εύκολα να επεκταθούν σε πολυμεταβλητά (κάθε μεταβλητή θεωρείται ότι αντιπροσωπεύει μία διαφορετική θέση ενδιαφέροντος) με χρήση ασυσχέτιστου στον χρόνο αλλά συσχετισμένου μεταξύ των θέσεων θορύβου (Koutsoyiannis, 2000).

Ας θεωρήσουμε ότι $\mathbf{X}_i = [X_i^1, X_i^2, \dots, X_i^n]^T$ είναι το διάνυσμα των n τυχαίων μεταβλητών κάθε μία εκ των οποίων αντιστοιχεί στην θέση που υποδηλώνεται με τον άνω δείκτη l ($l=1, 2, \dots, n$) για δεδομένη χρονική περίοδο i . Υποθέτουμε τώρα ότι \mathbf{g} είναι το μητρώο των συνδιασπορών του διανύσματος \mathbf{X}_i , του οποίου τα στοιχεία δίδονται από τον τύπο:

$$g^{l,k} := \text{Cov}[X_i^l, X_i^k] \quad \text{για } l, k = 1, 2, \dots, n \quad (2.76)$$

Θεωρούμε επίσης ότι κάθε μία εκ των μεταβλητών X_i^l ($l = 1, 2, \dots, n$) μπορεί να περιγραφεί από την εξίσωση,

$$X_i^l = \sum_{j=-s}^0 \alpha_{-j}^l V_{i+j}^l \quad (2.77)$$

στην περίπτωση που γίνεται χρήση του μοντέλου BMA και από την εξίσωση,

$$X_i^l = \sum_{j=-s}^s \alpha_{|j|}^l V_{i+j}^l \quad (2.78)$$

στην περίπτωση που γίνεται χρήση του μοντέλου SMA.

Η τυχαία μεταβλητή V_i^l ($l = 1, 2, \dots, n$) θεωρείται ασυσχέτιστη ως προς τον χρόνο i (δηλαδή $\text{Cov}[V_i^l, V_j^k] = 0$, για $i \neq j$), αλλά συσχετισμένη ως προς τις θέσεις ενδιαφέροντος l ($l = 1, 2, \dots, n$) για την ίδια χρονική περίοδο i . Σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν μπορεί να οριστεί το μητρώο \mathbf{c} των συνδιασπορών της διανυσματικής τυχαίας μεταβλητής \mathbf{V}_i , τα στοιχεία του οποίου δίδονται από τον τύπο,

$$c^{l,k} := \text{Cov}[V_i^l, V_i^k] \quad \text{για } l, k = 1, 2, \dots, n \quad (2.79)$$

Τα στοιχεία του μητρώου \mathbf{c} είναι δυνατόν να υπολογιστούν συναρτήσει των στοιχείων του μητρώου \mathbf{g} (σχέση (2.76)). Κατόπιν αλγεβρικών υπολογισμών, καταλήγουμε στον τύπο

$$c^{l,k} = \frac{g^{l,k}}{\sum_{j=0}^s \alpha_j^l \alpha_j^k} \quad \text{για } l, k = 1, 2, \dots, n \quad (2.80)$$

για το μοντέλο BMA και στον τύπο,

$$c^{l,k} = \frac{g^{l,k}}{\sum_{j=s}^s \alpha^l_{|j|} \alpha^k_{|j|}} \quad \text{για } l, k = 1, 2, \dots, n \quad (2.81)$$

για το μοντέλο SMA. Με γνώση τώρα του μητρώου \mathbf{c} των συνδιασπορών της τυχαίας διανυσματικής μεταβλητής \mathbf{V}_i , είναι εφικτό να παραχθεί το διάνυσμα $\mathbf{V}_i = [V_i^1, V_i^2, \dots, V_i^n]^T$ με χρήση του απλού πολυμεταβλητού μοντέλου,

$$\mathbf{V}_i = \mathbf{b}\mathbf{W}_i \quad (2.82)$$

όπου $\mathbf{W}_i = [W_i^1, W_i^2, \dots, W_i^n]$ είναι το διάνυσμα των n τυχαίων μεταβλητών W_i^l ($l = 1, 2, \dots, n$), οι οποίες έχουν μοναδιαία διασπορά (δηλαδή $\text{Var}[W_i^l] = 1$ για $l = 1, 2, \dots, n$) και είναι ασυσχέτιστες τόσο ως προς τον χρόνο i όσο και ως προς τις θέσεις ενδιαφέροντος l (δηλαδή $\text{Cov}[W_i^l, W_j^k] = 0$ για $l, k = 1, 2, \dots, n$).

Η μητρωϊκή παράμετρος \mathbf{b} διαστάσεων $n \times n$ μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση,

$$\mathbf{b}\mathbf{b}^T = \mathbf{c} \quad (2.83)$$

όπου \mathbf{c} το μητρώο των συνδιασπορών της διανυσματικής μεταβλητής \mathbf{V}_i . Η επίλυση της εξισώσεως (2.83) ανάγεται στο πρόβλημα εύρεσης της τετραγωνικής ρίζας πίνακα, στο οποίο αναφερθήκαμε στην ενότητα 2.4.

Έχοντας θεωρήσει ότι $\text{Var}[W_i^l] = 1$ για $l = 1, 2, \dots, n$, οι υπόλοιπες απαιτούμενες παράμετροι για τον πλήρη ορισμό του μοντέλου της σχέσεως (2.82), είναι το διάνυσμα των μέσων τιμών $\boldsymbol{\mu}_w$ και των συντελεστών ασυμμετρίας $\boldsymbol{\xi}_w$ της διανυσματικής μεταβλητής \mathbf{W}_i . Τα εν λόγω διανύσματα μπορούν να προσδιοριστούν από τις σχέσεις,

$$\boldsymbol{\mu}_w = \mathbf{b}^{-1} \boldsymbol{\mu}_v \quad (2.84)$$

$$\boldsymbol{\xi}_w = (\mathbf{b}^{(3)})^{-1} \boldsymbol{\xi}_v \quad (2.85)$$

συναρτήσει των διανυσμάτων των μέσων τιμών μ , και των συντελεστών ασυμμετρίας ξ , της διανυσματικής μεταβλητής V_i . Τα τελευταία μπορούν να υπολογιστούν με χρήση των εξισώσεων (2.59) και (2.61) για το μοντέλο BMA ή (2.62) και (2.64) για το μοντέλο SMA. Επισημαίνεται, ότι με \mathbf{b}^{-1} υποδηλώνεται ο αντίστροφος του πίνακα \mathbf{b} και με $\mathbf{b}^{(3)}$ ο πίνακας που έχει ως στοιχεία τους κύβους του πίνακα \mathbf{b} .

2.9 Μοντέλα επιμερισμού και μετασχηματισμοί αποκατάστασης συμβατότητας μοντέλων διαφορετικής κλίμακας

Γενικά περί μοντέλων επιμερισμού

Όπως είδαμε στις προηγούμενες ενότητες, η διατήρηση των εποχιακών στατιστικών χαρακτηριστικών μίας στοχαστικής ανέλιξης δεν εξασφαλίζει και την διατήρηση των στατιστικών χαρακτηριστικών των εποχιακών συναθροίσεων αυτής (π.χ. στατιστικά χαρακτηριστικά της ετήσιας χρονοσειράς). Για να γίνουμε πιο σαφείς, δεν είναι δυνατόν με ένα απλό μοντέλο εποχιακής κλίμακας τύπου MPARMA να επιτύχουμε διατήρηση των ετησίων διασπορών και ασυμμετριών των θέσεων ενδιαφέροντος, αλλά ούτε και της μακροπρόθεσμης εμμονής αυτών. Για την επίτευξη λοιπόν της ταυτόχρονης διατήρησης των στατιστικών χαρακτηριστικών διαφορετικής χρονικής κλίμακας της ίδιας στοχαστικής ανέλιξης, εισήχθησαν για πρώτη φορά στη στοχαστική υδρολογία τα μοντέλα επιμερισμού (Disaggregation Models) από τους Valencia & Schaake (1972, 1973).

Το πολυμεταβλητό μοντέλο που ανέπτυξαν οι Valencia & Schaake (1972, 1973) είχε ως σκοπό την παραγωγή χρονοσειρών πραγματοποιήσεων χαμηλότερης χρονικής κλίμακας σε διαφορετικές θέσεις (π.χ. μηνιαίες χρονοσειρές της στοχαστικής ανεξίτηξως ενδιαφέροντος), μέσω ενός γραμμικού συνδυασμού των διαθέσιμων τιμών υψηλότερης χρονικής κλίμακας (π.χ. ιστορικές ή συνθετικές ετήσιες χρονοσειρές), με λευκό θόρυβο δεδομένης κατανομής.

Ορίζουμε ως $\mathbf{Z}_i := [Z_i^1, \dots, Z_i^n]^T$, το διάνυσμα των n τυχαίων μεταβλητών, κάθε μία εκ των οποίων αντιστοιχεί στην θέση που υποδηλώνεται με τον άνω δείκτη l ($l=1, \dots, n$) και στην χρονική περίοδο ενδιαφέροντος i , και ως $\mathbf{X}_s := [X_s^1, \dots, X_s^n]^T$ το διάνυσμα των n τυχαίων μεταβλητών, κάθε μία εκ των οποίων αντιστοιχεί στην θέση που υποδηλώνεται με τον άνω δείκτη l ($l=1, \dots, n$) και στην χρονική υποπερίοδο ενδιαφέροντος s . Επισημαίνεται ότι με τον όρο «περίοδος» από το σημείο αυτό και

έπειτα θα υποδηλώνεται η υψηλότερη χρονική κλίμακα ενδιαφέροντος (π.χ. ετήσια), και με τον όρο «υποπερίοδος» η χαμηλότερη χρονική κλίμακα ενδιαφέροντος (π.χ. μηνιαία). Επίσης γίνεται η παραδοχή ότι οι δείκτες των διανυσματικών μεταβλητών i , s έχουν κοινό σημείο αναφοράς, δηλαδή αν $s = 0$, τότε και $i = 0$.

Είναι προφανές ότι η απαίτηση για συμβατότητα και στις δύο χρονικές κλίμακες ενδιαφέροντος (π.χ. ετήσια και μηνιαία), απαιτεί την τήρηση της σχέσεως,

$$\mathbf{Z}_i = \sum_{s=(i-1)k+1}^{ik} \mathbf{X}_s \quad (2.86)$$

η οποία υποδηλώνει ότι η συνάθροιση των τυχαίων μεταβλητών των υποπεριόδων (k σε αριθμό) μίας περιόδου της εκάστοτε θέσεως ενδιαφέροντος πρέπει να ισούται με την τυχαία μεταβλητή της ίδιας περιόδου της εν λόγω θέσεως ενδιαφέροντος. Στην περίπτωση που θεωρήσουμε ως υποπεριόδους τους μήνες και ως περιόδους τα έτη (δηλαδή $k = 12$), τότε η σχέση (2.86) γράφεται:

$$\mathbf{Z}_i = \sum_{s=12i-11}^{12i} \mathbf{X}_s \quad (2.87)$$

Αν θεωρήσουμε τώρα ότι οι ετήσιες χρονοσειρές είναι γνωστές (π.χ. από το ιστορικό δείγμα ή από πρωτύτρη συνθετική παραγωγή), τότε είναι δυνατός ο υπολογισμός των μηνιαίων χρονοσειρών μέσω του γραμμικού μοντέλου (Valencia & Schaake; 1972, 1973),

$$\mathbf{X}_i^* = \mathbf{a} \mathbf{Z}_i + \mathbf{b} \mathbf{V}_i \quad (2.88)$$

όπου \mathbf{X}_i^* το διάνυσμα που περιέχει όλες τις kn στο πλήθος πραγματοποιήσεις, των k σε αριθμό υποπεριόδων της περιόδου i ,

$$\mathbf{X}_i^* := [\mathbf{X}_{(i-1)k+1}^T, \dots, \mathbf{X}_{ik}^T]^T \quad (2.89)$$

V_i το διάνυσμα των kn σε αριθμό ανεξάρτητων πραγματοποιήσεων λευκού θορύβου που ακολουθούν δοσμένη κατανομή και \mathbf{a} , \mathbf{b} μητρωϊκές παράμετροι διαστάσεων $kn \times n$ και $kn \times kn$ αντίστοιχα.

Ο υπολογισμός των μητρωϊκών παραμέτρων \mathbf{a} και \mathbf{b} βασίζεται στις διασπορές και στις συνδιασπορές μεταξύ των τυχαίων μεταβλητών υψηλότερης και χαμηλότερης χρονικής κλίμακας, οι οποίες είναι δυνατόν να προσδιοριστούν από τα ιστορικά δεδομένα. Ένας τέτοιος όμως υπολογισμός δεν λαμβάνει υπ' όψιν του την διατήρηση των συσχετίσεων μεταξύ των μεταβλητών χαμηλότερης χρονικής κλίμακας διαφορετικών περιόδων, με άμεσο αποτέλεσμα οι υποπερίοδοι διαδοχικών περιόδων να εμφανίζονται ασυσχέτιστες μεταξύ τους (Koutsoyiannis, 2003b).

Η απαίτηση για διατήρηση των συσχετίσεων των μεταβλητών χαμηλότερης χρονικής κλίμακας διαδοχικών περιόδων οδήγησε στην ανάπτυξη μοντέλων με δομές διαφορετικές της αρχικής των Valencia & Schaake (Mejia & Rousselle, 1976; Hoshi & Burges, 1979; Stedinger & Vogel, 1984). Όπως όμως αποδείχθηκε από τους Stedinger & Vogel (1984), δεν είναι σε καμία περίπτωση δυνατή η ακριβής αναπαραγωγή των συσχετίσεων μεταβλητών χαμηλότερης χρονικής κλίμακας διαφορετικών περιόδων, γεγονός που οφείλεται στην μαθηματική δομή των προαναφερθέντων μοντέλων που οδηγεί στην ασυμβατότητα των συσχετίσεων των χαμηλότερης χρονικής κλίμακας μεταβλητών.

Στην περίπτωση που όλες οι τυχαίες διανυσματικές μεταβλητές της σχέσεως (2.88) ακολουθούν κανονική κατανομή, το μοντέλο των Valencia & Schaake είναι δυνατόν να αναπαράγει αξιόπιστα τις περιθώριες συναρτήσεις κατανομής των μεταβλητών χαμηλότερης χρονικής κλίμακας. Σε αντίθετη όμως περίπτωση η διατήρηση αυτή δεν είναι εφικτή. Με σκοπό την αντιμετώπιση της παραπάνω αδυναμίας του μοντέλου των Valencia & Schaake, αναπτύχθηκαν δύο διαφορετικές κατηγορίες μοντέλων. Η πρώτη κατηγορία βασίστηκε στην υιοθέτηση μη μηδενικών συντελεστών ασυμμετρίας στις μεταβλητές του διανύσματος του λευκού θορύβου V_i (Tao & Delleur, 1976; Todini 1980). Η εν λόγω προσέγγιση εισάγει μία σημαντική διαφοροποίηση ως προς την υπόθεση των Valencia & Schaake, ότι οι τυχαίες μεταβλητές του διανύσματος του λευκού θορύβου V_i ακολουθούν κανονική κατανομή. Το πρόβλημα που ανακύπτει από την εν λόγω διαφοροποίηση (Todini, 1980), είναι ότι οι απαιτούμενοι από το μοντέλο συντελεστές ασυμμετρίας των τυχαίων μεταβλητών του διανύσματος του λευκού θορύβου V_i εξαρτώνται από τις

ήδη γνωστές τιμές των χρονοσειρών υψηλότερης χρονικής κλίμακας καθώς και από τις περιθώριες συναρτήσεις κατανομής των μεταβλητών χαμηλότερης χρονικής κλίμακας. Αποτέλεσμα του παραπάνω είναι η πιθανή απαίτηση του μοντέλου για χρονοσειρές λευκού θορύβου υπερβολικά μεγάλων ασυμμετριών που είναι αδύνατον να επιτευχθούν σε ένα δείγμα πεπερασμένου μήκους. Η δεύτερη κατηγορία μοντέλων χρησιμοποιεί μη γραμμικούς μετασχηματισμούς των μεταβλητών, με σκοπό αυτές να αποκτήσουν κανονική κατανομή (Valencia & Schaake, 1972; Hoshi & Burges, 1979; Stedinger & Vogel, 1984). Βέβαια, οι προαναφερθέντες μη γραμμικοί μετασχηματισμοί καταργούν την προσθετική ιδιότητα της σχέσεως (2.86) οπότε χάνεται και το πραγματικό νόημα ενός μοντέλου επιμερισμού (Todini, 1980). Ένα ακόμη μειονέκτημα όλων των προαναφερθέντων μοντέλων είναι ο αυξημένος αριθμός των προς υπολογισμό παραμέτρων τους (Koutsoyiannis, 2003b). Αυτό οφείλεται στον αυξημένο αριθμό των συσχετίσεων που πρέπει να διατηρηθούν μεταξύ των μεταβλητών χαμηλότερης χρονικής κλίμακας των θέσεων ενδιαφέροντος.

Μία αντιμετώπιση των προαναφερθέντων προβλημάτων προτάθηκε με την ανάπτυξη του μοντέλου δυναμικού επιμερισμού (Dynamic Disaggregation Model, DDM). Το εν λόγω μοντέλο, το οποίο αρχικά αναπτύχθηκε ως μονομεταβλητό (Koutsoyiannis, 1988; Koutsoyiannis & Xanthopoulos 1990) και στην συνέχεια επεκτάθηκε σε πολυμεταβλητό (Koutsoyiannis, 1992), επιτυγχάνει την αναπαραγωγή των περιθώριων κατανομών των τυχαίων μεταβλητών των υποπεριόδων, ενώ παράλληλα διατηρεί την συσχέτιση των μεταβλητών χαμηλότερης χρονικής κλίμακας διαφορετικών περιόδων, με ταυτόχρονη μέριμνα για την ελαχιστοποίηση των χρησιμοποιούμενων από το μοντέλο παραμέτρων (φειδωλή χρήση παραμέτρων).

Αποκατάσταση συμβατότητας μοντέλων διαφορετικής χρονικής κλίμακας

Τα περισσότερα μοντέλα επιμερισμού που αναφέρθηκαν μέχρι στιγμής, δεν αναπαριστούν τη στοχαστική ανέλιξη ενδιαφέροντος στην χαμηλότερη χρονική κλίμακα, αλλά στην πραγματικότητα πρόκειται για υβριδικά μοντέλα που χρησιμοποιούν ταυτόχρονα και τις δύο χρονικές κλίμακες.

Μία μέθοδος η οποία αποφεύγει την χρήση υβριδικών μοντέλων, διατυπώθηκε από τους Koutsoyiannis & Manetas (1996). Σύμφωνα με αυτήν οι εποχιακές χρονοσειρές (χρονοσειρές χαμηλότερης χρονικής κλίμακας) παράγονται από ένα μοντέλο εποχιακής κλίμακας ανεξάρτητα από τις ετήσιες χρονοσειρές, οι οποίες είτε προϋπάρχουν (π.χ. ιστορικό δείγμα) είτε παράγονται από ένα μοντέλο

υψηλότερης χρονικής κλίμακας. Προφανώς οι δύο χρονοσειρές που παράγονται ανεξάρτητα είναι ασύμβατες μεταξύ τους. Η αποκατάσταση της συμβατότητας των δύο χρονοσειρών διαφορετικής χρονικής κλίμακας επιτυγχάνεται με χρήση ενός γραμμικού μετασχηματισμού. Η παραπάνω μέθοδος επεκτάθηκε από τον Koutsoyiannis (2001), με σκοπό την διατύπωση μίας γενικότερης μεθοδολογίας για την αποκατάσταση συμβατότητας μεταξύ μοντέλων διαφορετικής χρονικής κλίμακας.

Ας θεωρήσουμε ότι γίνεται χρήση ενός εποχιακού μοντέλου για την παραγωγή χρονοσειρών χαμηλότερης χρονικής κλίμακας $\tilde{\mathbf{X}}_s$ χωρίς να γίνεται κάποια αναφορά στις τιμές της υψηλότερης χρονικής κλίμακας \mathbf{Z}_i οι οποίες προϋπάρχουν (π.χ. έχουν παραχθεί συνθετικά ή είναι γνωστές από το ιστορικό δείγμα). Με χρήση της σχέσεως (2.86) είναι δυνατόν να παραχθούν οι συνθετικές χρονοσειρές υψηλότερης χρονικής κλίμακας $\tilde{\mathbf{Z}}_i$ οι οποίες διαφέρουν από τις επιθυμητές προϋπάρχουσες \mathbf{Z}_i . Σκοπός μας τώρα είναι η εύρεση ενός μετασχηματισμού που θα μπορέσει να μας ανάγει από τις χρονοσειρές $\tilde{\mathbf{X}}_s$ (που δεν είναι συμβατές με την υψηλότερη χρονική κλίμακα) στις χρονοσειρές \mathbf{X}_s που ικανοποιούν την σχέση (2.86). Αυτό μπορεί να γίνει με χρήση ενός γραμμικού μετασχηματισμού της μορφής $\mathbf{X}_s = \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{X}}_s, \tilde{\mathbf{Z}}_i, \mathbf{Z}_i)$ που περιγράφεται από την σχέσεις (Koutsoyiannis, 2001):

$$\mathbf{X}_i^* = \tilde{\mathbf{X}}_i^* + \mathbf{h}(\mathbf{Z}_i^* - \tilde{\mathbf{Z}}_i^*) \quad (2.90)$$

$$\mathbf{X}_i^* := [\mathbf{X}_{(i-1)k+1}^T, \dots, \mathbf{X}_{ik}^T]^T, \quad \tilde{\mathbf{X}}_i^* := [\tilde{\mathbf{X}}_{(i-1)k+1}^T, \dots, \tilde{\mathbf{X}}_{ik}^T]^T \quad (2.91)$$

$$\mathbf{Z}_i^* := [\mathbf{Z}_i^T, \mathbf{Z}_{i+1}^T, \mathbf{X}_{(i-1)k}^T]^T, \quad \tilde{\mathbf{Z}}_i^* := [\tilde{\mathbf{Z}}_i^T, \tilde{\mathbf{Z}}_{i+1}^T, \tilde{\mathbf{X}}_{(i-1)k}^T]^T \quad (2.92)$$

$$\mathbf{h} = \text{Cov}[\mathbf{X}_i^*, \mathbf{Z}_i^*] \{ \text{Cov}[\mathbf{Z}_i^*, \mathbf{Z}_i^*] \}^{-1} \quad (2.93)$$

Παρόλο που ο εν λόγω γραμμικός μετασχηματισμός δεν επηρεάζει τις ροπές πρώτης και δευτέρας τάξεως της ανεξίτηξης, γενικά είναι επιθυμητό η εισαγόμενη από τον μετασχηματισμό διόρθωση $\mathbf{h}(\mathbf{Z}_i^* - \tilde{\mathbf{Z}}_i^*)$ να είναι κατά το δυνατόν μικρή, ώστε να μην επηρεάζονται σε μεγάλο βαθμό οι ασυμμετρίες των μεταβλητών των υποπεριόδων. Έτσι, η παραγωγή των συνθετικών χρονοσειρών χαμηλότερης χρονικής κλίμακας γίνεται πολλές φορές, ώστε να ελαχιστοποιείται ένα μέτρο σύγκρισης μεταξύ των

συνθετικών και των επιθυμητών χρονοσειρών υψηλής χρονικής κλίμακας της μορφής,

$$\Delta = \frac{1}{m} \|\mathbf{Z}'^* - \tilde{\mathbf{Z}}'^*\| \quad (2.94)$$

όπου \mathbf{Z}'^* και $\tilde{\mathbf{Z}}'^*$ οι τυποποιημένες ως προς την τυπική τους απόκλιση \mathbf{Z}_i^* και $\tilde{\mathbf{Z}}_i^*$ αντίστοιχα (δηλαδή $Z_i'^* := Z_i^* / \{\text{Var}[Z_i^*]^{1/2}\}$), m η κοινή διάσταση των \mathbf{Z}'^* και $\tilde{\mathbf{Z}}'^*$ και $\|\cdot\|$ η ευκλείδεια νόρμα διανύσματος.

Ο παραπάνω αλγόριθμος χρησιμοποιήθηκε από τον Koutsoyiannis (2001) για την αναπαραγωγή της μακροπρόθεσμης εμμοής ιστορικών χρονοσειρών, με ταυτόχρονη διατήρηση των περιθώριων κατανομών των μηνών, καθώς και της χαμηλής τάξεως μνήμης των μηνιαίων πραγματοποιήσεων. Τα αποτελέσματα ήταν αρκετά ικανοποιητικά αν εξαιρεθεί ο σχετικά μεγάλος χρόνος της παραγωγής των συνθετικών χρονοσειρών των εποχιακών μεταβλητών (μηνών) και κάποια αδυναμία για την ακριβή διατήρηση των ασυμμετριών των περιθώριων κατανομών των μηνών.

3 Στοιχεία άλγεβρας μητρώων και μεθόδων βελτιστοποίησης συναρτήσεων

Στις σελίδες που ακολουθούν γίνεται αρχικά ανασκόπηση των βασικών εννοιών της άλγεβρας μητρώων και στη συνέχεια συνοπτική παρουσίαση κάποιων βασικών μεθόδων βελτιστοποίησης μονομεταβλητών και πολυμεταβλητών συναρτήσεων. Σκοπός μας δεν είναι η εκτενής αναφορά στην βιβλιογραφία, αλλά η παρουσίαση κάποιων εννοιών και μεθόδων που χρησιμοποιήθηκαν κατά την ανάπτυξη των στοχαστικών μοντέλων που παρουσιάζονται στα επόμενα κεφάλαια.

3.1 Στοιχεία άλγεβρας μητρώων

3.1.1 Μητρωϊκά και διανυσματικά μεγέθη

Αν \mathbf{x} διάνυσμα μεγέθους n με στοιχεία x_1, x_2, \dots, x_n , ήτοι

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

τότε μπορεί να οριστεί το ανάστροφο του διανύσματος \mathbf{x} διάνυσμα \mathbf{x}^T , το οποίο δίδεται από την σχέση,

$$\mathbf{x}^T = [x_1, x_2, \dots, x_n] \quad (3.2)$$

Αντίστοιχα, αν \mathbf{A} πίνακας (ή αλλιώς μητρώο) διαστάσεων $n \times k$ με στοιχεία a_{ij} ($i=1, \dots, n$ και $j=1, \dots, k$), ήτοι

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

τότε ο ανάστροφος του πίνακα \mathbf{A} πίνακας \mathbf{A}^T διαστάσεων $k \times n$, δίδεται από την σχέση

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1k} & a_{2k} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Ως μοναδιαίος πίνακας ορίζεται ο τετραγωνικός πίνακας διαστάσεων $n \times n$, ο οποίος έχει όλα τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου του ίσα με την μονάδα και όλα τα υπόλοιπα στοιχεία του μηδενικά, ήτοι

$$\mathbf{I}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

3.1.2 Πράξεις μεταξύ βαθμωτών μεγεθών, μητρώων, διανυσμάτων

Αν \mathbf{x} , \mathbf{y} διανύσματα μεγέθους n , τότε μπορεί να ορισθεί η πρόσθεση των δύο αυτών διανυσμάτων από την σχέση,

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Επίσης, αν \mathbf{A} και \mathbf{C} μητρώα διαστάσεων $n \times k$, τότε μπορεί να ορισθεί η πρόσθεση των δύο αυτών μητρώων από την σχέση,

$$\mathbf{A} + \mathbf{C} = \begin{bmatrix} a_{11} + c_{11} & a_{12} + c_{12} & \cdots & a_{1k} + c_{1k} \\ a_{21} + c_{21} & a_{22} + c_{22} & \cdots & a_{2k} + c_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + c_{n1} & a_{n2} + c_{n2} & \cdots & a_{nk} + c_{nk} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Έστω λ βαθμωτό μέγεθος, τότε ορίζεται ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός του λ με το διάνυσμα \mathbf{x}

$$\lambda \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

και ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός του λ με το μητρώο \mathbf{A}

$$\lambda \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1k} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nk} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Αν \mathbf{A} πίνακας διαστάσεων $n \times k$ και \mathbf{B} πίνακας διαστάσεων $k \times l$, τότε το γινόμενο των δύο πινάκων είναι ο πίνακας \mathbf{C} διαστάσεων $n \times l$.

$$\mathbf{A}_{(n \times k)} \cdot \mathbf{B}_{(k \times l)} = \mathbf{C}_{(n \times l)} \quad (3.10)$$

$$\begin{matrix} \mathbf{A}_{(n \times k)} & \mathbf{B}_{(k \times l)} & \mathbf{C}_{(n \times l)} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix} & \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kl} \end{bmatrix} & = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1l} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nl} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad \text{όπου,}$$

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^k a_{ir} b_{rj} \quad (3.11)$$

Για τον πολλαπλασιασμό πινάκων ισχύει γενικά,

$$\mathbf{A} (\mathbf{B} \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \mathbf{B}) \mathbf{C} \quad (3.12)$$

$$(\mathbf{A} \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \quad (3.13)$$

3.1.3 Έννοιες και ιδιότητες που πηγάζουν από τις πράξεις μητρώων

Αν \mathbf{x} και \mathbf{y} διανύσματα μεγέθους n , τότε μπορεί να οριστεί το εσωτερικό γινόμενο αυτών $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ από την σχέση,

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := \mathbf{x}^T \mathbf{y} \quad (\text{βαθμωτό μέγεθος}) \quad (3.14)$$

Η ευκλείδεια νόρμα του διανύσματος \mathbf{x} προκύπτει από την σχέση,

$$\|\mathbf{x}\| = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle^{1/2} := (\mathbf{x}^T \mathbf{x})^{1/2} \quad (3.15)$$

και είναι βαθμωτό μέγεθος. Η συνάρτηση της μορφής,

$$f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{A} \mathbf{x} \rangle := (\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}) \quad (3.16)$$

όπου \mathbf{A} τετραγωνικό μητρώο διαστάσεων $n \times n$ και \mathbf{x} διάνυσμα μεγέθους n , ονομάζεται τετραγωνική μορφή του \mathbf{A} και είναι βαθμωτό μέγεθος.

Ένα τετραγωνικό μητρώο \mathbf{A} είναι θετικά ορισμένο στην περίπτωση που ισχύει,

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{A} \mathbf{x} \rangle > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{R}^n - \{0\} \quad (3.17)$$

Ένα τετραγωνικό μητρώο \mathbf{A} είναι θετικά ημιορισμένο στην περίπτωση που ισχύει

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{A} \mathbf{x} \rangle \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{R}^n - \{0\} \quad (3.18)$$

Ένα τετραγωνικό μητρώο \mathbf{A} μεγέθους $n \times n$ ονομάζεται ομαλό (non-singular), στην περίπτωση που υπάρχει ένα και μοναδικό αντίστροφο μητρώο \mathbf{A}^{-1} τέτοιο ώστε να ισχύει η σχέση

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{I}_n \quad (3.19)$$

Στην αντίθετη περίπτωση το μητρώο \mathbf{A} ονομάζεται μη-ομαλό (singular). Για την αντιστροφή μητρώων ισχύει ότι,

$$(\mathbf{A} \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1} \quad (3.20)$$

3.1.4 Επίλυση γραμμικών συστημάτων

Έστω το γραμμικό σύστημα n εξισώσεων με n αγνώστους της μορφής,

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n &= b_n \end{aligned} \quad (3.21)$$

του οποίου η διανυσματική έκφραση δίδεται από την σχέση,

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (3.22)$$

Στην περίπτωση που η ορίζουσα του πίνακα \mathbf{A} είναι διάφορη του μηδενός,

$$|\mathbf{A}| \neq 0 \quad (3.23)$$

τότε το μητρώο \mathbf{A} είναι αντιστρέψιμο και το σύστημα (3.22) έχει μία και μοναδική λύση που δίδεται από την εξίσωση,

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} \quad (3.24)$$

Σύμφωνα με την (3.24), η εύρεση της λύσεως του συστήματος απαιτεί την αντιστροφή του πίνακα \mathbf{A} . Η εν λόγω αντιστροφή μπορεί να γίνει είτε με τον κανόνα του Cramer που αποτελεί και την θεωρητική λύση στο πρόβλημα της αντιστροφής (Charra *et al.*, 2002, σελ. 234-235), είτε με την επίλυση n στον αριθμό συστημάτων της μορφής,

$$\mathbf{A} \mathbf{y}_i = \mathbf{c}_i \quad \text{για } i = 1, 2, \dots, n \quad (3.25)$$

όπου \mathbf{y}_i η στήλη i του πίνακα \mathbf{A}^{-1} , και \mathbf{c}_i η στήλη i του μοναδιαίου πίνακα \mathbf{I}_n .

Στην περίπτωση που γίνει χρήση του κανόνα του Cramer πρέπει να προσδιοριστούν όλες τις υπό-ορίζουσες του πίνακα \mathbf{A} , κάτι που σε καμία περίπτωση δεν συνιστάται λόγω του μεγάλου υπολογιστικού του φόρτου αλλά και του δύσκολου προγραμματισμού του. Στην περίπτωση που επιλεγεί η δεύτερη μέθοδος, τότε το πρόβλημα παραμένει θεωρητικά το ίδιο (επίλυση συστήματος) αλλά επιβαρύνεται πολύ υπολογιστικά.

Οι μέθοδοι λοιπόν που προτείνονται από την βιβλιογραφία για την εύρεση της λύσεως του γραμμικού συστήματος (3.22) είναι:

1. Επαναληπτικές, όπως η μέθοδος Jacobi (Charra *et al.*, 2002, σελ. 291), η μέθοδος Gauss-Seidel (Charra *et al.*, 2002, σελ. 289- 299) κ.λ.π.
2. Μη-επαναληπτικές, όπως η μέθοδος Gauss και οι παραλλαγές της (Charra *et al.*, 2002, σελ. 231-244), οι οποίες βασίζονται στον μετασχηματισμό του πίνακα \mathbf{A} σε έναν πίνακα \mathbf{B} και η επίλυση ενός άλλου συστήματος αρκετά απλούστερου της μορφής $\mathbf{B} \mathbf{y} = \mathbf{d}$, όπου \mathbf{y} διάνυσμα που συνδέεται με γνωστή σχέση με το διάνυσμα \mathbf{x} .

Για την ειδική περίπτωση που ο πίνακας \mathbf{A} είναι τριςδιαγώνιος, έχει αναπτυχθεί από τον Thomas ένας αρκετά γρήγορος αλγόριθμος για τον προσδιορισμό του διανύσματος \mathbf{x} (λύση του συστήματος), στον οποίο θα αναφερθούμε στην συνέχεια λόγω του ότι χρησιμοποιείται από το μοντέλο που αναπτύσσεται στο κεφάλαιο 7.

Έστω το τριςδιαγώνιο σύστημα n εξισώσεων με n αγνώστους της μορφής,

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Σύμφωνα με τον αλγόριθμο Thomas (Charpra *et al.*, 2002, σελ. 286-287), είναι δυνατή η κατασκευή δύο πινάκων \mathbf{L} , \mathbf{U} που το γινόμενο τους να δίνει τον αρχικό πίνακα \mathbf{A} του συστήματος,

$$\mathbf{LU} = \mathbf{A} \quad (3.27)$$

Ο πίνακας \mathbf{L} έχει την μορφή,

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l_{32} & l_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & l_{43} & l_{44} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Και ο πίνακας \mathbf{U} την μορφή,

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & u_{23} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & u_{34} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Ο προσδιορισμός των στοιχείων των πινάκων \mathbf{L} , \mathbf{U} μπορεί να γίνει εύκολα εξισώνοντας τα στοιχεία του αρχικού πίνακα \mathbf{A} με τα στοιχεία του γινομένου των

πινάκων \mathbf{L} , \mathbf{U} . Οι τύποι υπολογισμού των στοιχείων των πινάκων \mathbf{L} , \mathbf{U} συναρτήσκει των στοιχείων του πίνακα \mathbf{A} δίδονται από τις ακόλουθες αναδρομικές σχέσεις,

$$l_{1,1} = a_{1,1} \quad (3.30)$$

$$u_{1,2} = \frac{a_{1,2}}{l_{1,1}} \quad (3.31)$$

$$u_{i,i} = 1 \quad \text{για } i = 1, 2, \dots, n \quad (3.32)$$

$$l_{i,i-1} = a_{i,i-1} \quad \text{για } i = 2, \dots, n \quad (3.33)$$

$$l_{i,i} = a_{i,i} - l_{i,i-1} u_{i-1,i} \quad \text{για } i = 2, \dots, n \quad (3.34)$$

$$u_{i,i+1} = \frac{a_{i,i+1}}{l_{i,i}} \quad \text{για } i = 2, \dots, n-1 \quad (3.35)$$

Επισημαίνεται ότι όσα στοιχεία των πινάκων \mathbf{L} , \mathbf{U} δεν αναφέρονται στους παραπάνω αναδρομικούς τύπους είναι μηδενικά.

Ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δοθεί στο αν τα στοιχεία l_{ii} του πίνακα \mathbf{L} προκύπτουν μηδενικά. Στην περίπτωση που συμβαίνει κάτι τέτοιο, το σύστημα έχει μηδενική ορίζουσα και δεν μπορεί να συνεχιστεί η επίλυση.

Εφόσον λοιπόν μορφωθούν οι πίνακες \mathbf{L} , \mathbf{U} , το αρχικό σύστημα λαμβάνει την μορφή,

$$\mathbf{LUx} = \mathbf{b} \quad (3.36)$$

ή εναλλακτικά την μορφή,

$$\mathbf{Ly} = \mathbf{b} \quad \text{και} \quad \mathbf{Ux} = \mathbf{y} \quad (3.37)$$

Η ειδική μορφή των πινάκων \mathbf{L} , \mathbf{U} δίνει την δυνατότητα του άμεσου υπολογισμού των διανυσμάτων \mathbf{y} και έπειτα \mathbf{x} . Συγκεκριμένα με έμπροσθεν αντικατάσταση στο

σύστημα $\mathbf{L}\mathbf{y} = \mathbf{b}$ υπολογίζεται αρχικά το διάνυσμα \mathbf{y} , και έπειτα με πίσω αντικατάσταση στο σύστημα $\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ υπολογίζεται το ζητούμενο διάνυσμα \mathbf{x} .

3.1.5 Αποσύνθεση συμμετρικών μητρώων με τον αλγόριθμο Cholesky

Το πρόβλημα της αποσυνθέσεως ενός συμμετρικού μητρώου (πρόβλημα ευρέσεως ρίζας πίνακα), στη γενική του μορφή δίδεται από την σχέση,

$$\mathbf{b}\mathbf{b}^T = \mathbf{c} \quad (3.38)$$

όπου \mathbf{b} ο προς προσδιορισμό $n \times n$ άγνωστος πίνακας (γνωστός και ως τετραγωνική ρίζα του πίνακα \mathbf{c}), και \mathbf{c} ο συμμετρικός $n \times n$ πίνακας του οποίου ζητείται η τετραγωνική ρίζα.

Το παραπάνω πρόβλημα είναι αδύνατο (δεν έχει καμία λύση) στην περίπτωση που ο πίνακας \mathbf{c} είναι μη θετικά ορισμένος, και αόριστο (έχει άπειρες λύσεις) στην περίπτωση που ο πίνακας \mathbf{c} είναι θετικά ορισμένος. Στην δεύτερη των περιπτώσεων, μία εκ των απείρων λύσεων μπορεί να ευρεθεί με την παραδοχή ότι το μητρώο \mathbf{b} είναι κάτω τριγωνικό της μορφής,

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & b_{n4} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Ο αλγόριθμος για τον προσδιορισμό των μη μηδενικών στοιχείων του κάτω τριγωνικού μητρώου (3.39), ονομάζεται αλγόριθμος Cholesky (Chapra *et al.*, 2002, σελ. 287-288) και δίδεται από τις ακόλουθες αναδρομικές σχέσεις,

$$l_{ki} = \frac{\alpha_{ki} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} l_{kj}}{l_{ii}} \quad \text{για } k=1, 2, \dots, n, \quad i=1, 2, \dots, k-1 \quad (3.40)$$

$$l_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}^2} \quad \text{για } k=1, 2, \dots, n \quad (3.41)$$

3.1.6 Διανύσματα τυχαίων μεταβλητών και ροπές τους

Έστω \mathbf{X} , \mathbf{Y} διανύσματα που αποτελούνται από n και k συνιστώσες αντίστοιχα κάθε μία εκ των οποίων αποτελεί τυχαία μεταβλητή, ήτοι

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_k \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

Έχοντας ορίσει τις διανυσματικές τυχαίες μεταβλητές \mathbf{X} , \mathbf{Y} είναι δυνατόν να ορίσουμε τα διανύσματα των μέσων τιμών αυτών,

$$E[\mathbf{X}] = \begin{bmatrix} E[X_1] \\ E[X_2] \\ \vdots \\ E[X_n] \end{bmatrix}, \quad E[\mathbf{Y}] = \begin{bmatrix} E[Y_1] \\ E[Y_2] \\ \vdots \\ E[Y_k] \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

τα διανύσματα των διασπορών αυτών,

$$\text{Var}[\mathbf{X}] = \begin{bmatrix} \text{Var}[X_1] \\ \text{Var}[X_2] \\ \vdots \\ \text{Var}[X_n] \end{bmatrix}, \quad \text{Var}[\mathbf{Y}] = \begin{bmatrix} \text{Var}[Y_1] \\ \text{Var}[Y_2] \\ \vdots \\ \text{Var}[Y_k] \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

τα διανύσματα των τρίτων ροπών αυτών,

$$\mu_3[\mathbf{X}] = \begin{bmatrix} \mu_3[X_1] \\ \mu_3[X_2] \\ \vdots \\ \mu_3[X_n] \end{bmatrix}, \quad \mu_3[\mathbf{Y}] = \begin{bmatrix} \mu_3[Y_1] \\ \mu_3[Y_2] \\ \vdots \\ \mu_3[Y_k] \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

και κατά όμοιο τρόπο τα διανύσματα όλων των υψηλοτέρων ροπών των τυχαίων διανυσματικών μεταβλητών \mathbf{X}, \mathbf{Y} (Κουτσογιάννης 2003α).

Επίσης, είναι δυνατόν να οριστεί το μητρώο των συνδιασπορών των τυχαίων διανυσματικών μεταβλητών \mathbf{X}, \mathbf{Y} ,

$$\text{Cov}[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = \{\text{Cov}[\mathbf{Y}, \mathbf{X}]\}^T = E\{(\mathbf{X} - E[\mathbf{X}])(\mathbf{Y}^T - E[\mathbf{Y}]^T)\} =$$

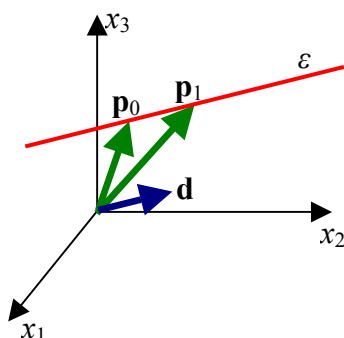
$$\begin{bmatrix} \text{Cov}[X_1, Y_1] & \text{Cov}[X_1, Y_2] & \cdots & \text{Cov}[X_1, Y_k] \\ \text{Cov}[X_2, Y_1] & \text{Cov}[X_2, Y_2] & \cdots & \text{Cov}[X_2, Y_k] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}[X_n, Y_1] & \text{Cov}[X_n, Y_2] & \cdots & \text{Cov}[X_n, Y_k] \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

3.2 Ευθείες επίπεδα και υπερεπίπεδα σε διανυσματικούς χώρους

Το διάνυσμα $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ στο χώρο n διαστάσεων παριστάνει ένα σημείο \mathbf{p} ή μία διεύθυνση \mathbf{d} .

Για να οριστεί μια ευθεία ε σε χώρο n διαστάσεων απαιτούνται δύο σημεία $(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1)$ ή ένα σημείο \mathbf{p}_0 και μια διεύθυνση \mathbf{d} (Marlow, 1993, σελ. 69). Η εξίσωση της ευθείας δίδεται:

1. με βάση τα δύο σημεία $(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1)$: $\mathbf{x} = (1 - \beta) \mathbf{p}_0 + \beta \mathbf{p}_1$, όπου $\beta \in \mathcal{R}$ (για το ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ \mathbf{p}_0 και \mathbf{p}_1 , $\beta \in [0, 1]$).
2. με βάση το σημείο \mathbf{p}_0 και τη διεύθυνση \mathbf{d} (παραμετρική μορφή): $\mathbf{x} = \mathbf{p}_0 + \beta \mathbf{d}$.
3. με βάση τη σχέση $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, όπου \mathbf{A} μητρώο μεγέθους $(n - 1) \times n$ και \mathbf{b} διάνυσμα μεγέθους $n - 1$



Σχήμα 3.1 Απεικόνιση ευθείας σε χώρο τριών διαστάσεων (Κουτσογιάννης 2003β)

Σε χώρο n διαστάσεων μπορούν να οριστούν επίπεδα k διαστάσεων, όπου $1 \leq k \leq n - 1$ (για $k = 1$ έχουμε ευθεία). Ένα k διαστάσεων επίπεδο καθορίζεται με τρεις διαφορετικούς τρόπους και έχει τις αντίστοιχες εξισώσεις (Marlow, 1993, σελ. 69-70):

1. με βάση $k + 1$ σημεία $(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k)$: $\mathbf{x} = \mathbf{P} \mathbf{w}$, όπου $\mathbf{P} = [\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k]$ μητρώο μεγέθους $n \times (k + 1)$ και \mathbf{w} διάνυσμα μεγέθους $k + 1$ με άθροισμα συνιστωσών ίσο με 1.
2. παραμετρικά, από την εξίσωση $\mathbf{x} = \mathbf{p}_0 + \mathbf{Q} \mathbf{t}$, όπου \mathbf{p}_0 διάνυσμα μεγέθους n (σημείο στο χώρο n διαστάσεων), \mathbf{t} διάνυσμα μεγέθους k και \mathbf{Q} μητρώο μεγέθους $n \times k$.
3. ως τομή $n - k$ διαφορετικών $n - 1$ διαστάσεων επιπέδων: $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$, όπου \mathbf{A} μητρώο μεγέθους $(n - k) \times n$ και \mathbf{b} διάνυσμα μεγέθους $n - k$.

3.3 Βελτιστοποίηση συναρτήσεων

3.3.1 Πραγματικές συναρτήσεις διανυσματικής μεταβλητής

Έστω μία πραγματική συνάρτηση f διανυσματικής μεταβλητής¹, ήτοι (Marlow, 1993, σελ. 189)

$$f: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R} \quad (3.47)$$

Η παράγωγος της $f(\mathbf{x})$ ως προς την διανυσματική μεταβλητή \mathbf{x} δίδεται από το διάνυσμα (Marlow, 1993, σελ. 189),

$$\frac{df}{d\mathbf{x}} := \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right] \quad (3.48)$$

Η κλίση ή βαθμίδα (gradient) της $f(\mathbf{x})$ ως προς την διανυσματική μεταβλητή \mathbf{x} δίδεται από το διάνυσμα (Marlow, 1993, σελ. 190),

¹ Για χάρη απλότητας, οι πραγματικές συναρτήσεις διανυσματικής μεταβλητής ονομάζονται πολλές φορές και ως πραγματικές πολυμεταβλητές συναρτήσεις.

$$\text{grad}(f) := \nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]^T = \left(\frac{df}{d\mathbf{x}} \right)^T \quad (3.49)$$

Η δεύτερη παράγωγος της $f(\mathbf{x})$ ως προς την διανυσματική μεταβλητή \mathbf{x} δίδεται από το Εσσιανό μητρώο (Hessian matrix) (Marlow, 1993, σελ. 198),

$$\frac{d^2 f}{d\mathbf{x}^2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

3.3.2 Διανυσματικές συναρτήσεις διανυσματικής μεταβλητής

Έστω μία διανυσματική συνάρτηση \mathbf{f} διανυσματικής μεταβλητής, ήτοι (Marlow, 1993, σελ. 189)

$$\mathbf{f}: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^m \quad (3.51)$$

δηλαδή $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_k(\mathbf{x})]^T$ όπου οι $f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_k(\mathbf{x})$ είναι πραγματικές συναρτήσεις της διανυσματικής μεταβλητής \mathbf{x} .

Η παράγωγος της $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ως προς την διανυσματική μεταβλητή \mathbf{x} δίδεται από το Ιακωβιανό μητρώο (Jacobian matrix) (Marlow, 1993, σελ. 195),

$$\frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}} := \left[\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{x}}, \dots, \frac{\partial f_k}{\partial \mathbf{x}} \right]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \frac{\partial f_k}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

Στην συνέχεια παρατίθεται ένας πίνακας στοιχειωδών κανόνων παραγωγίσης διανυσματικών συναρτήσεων (Marlow, 1993, σελ. 214). Με \mathbf{a} , \mathbf{x} συμβολίζονται τα διανύσματα διαστάσεως n , με \mathbf{A} το μητρώο διαστάσεων $m \times n$, με \mathbf{B} το μητρώο διαστάσεων $n \times l$, με \mathbf{C} το τετραγωνικό μητρώο διαστάσεων $n \times n$, με \mathbf{O}_n το μηδενικό τετραγωνικό μητρώο διαστάσεων $n \times n$, με \mathbf{O}_{mn} το μηδενικό μητρώο διαστάσεων $m \times n$ και με \mathbf{I}_n το μοναδιαίο τετραγωνικό μητρώο διαστάσεων $n \times n$. Επίσης γίνεται η παραδοχή ότι τα \mathbf{a} , \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , είναι ανεξάρτητα του \mathbf{x} .

Πίνακας 3.1 Στοιχειώδεις κανόνες παραγωγίσης διανυσματικών συναρτήσεων

Συνάρτηση (f)	Παράγωγος (df/dx)	Συνάρτηση (f)	Παράγωγος (df/dx)
\mathbf{a} ή \mathbf{a}^T	\mathbf{O}_n	$\mathbf{A} \mathbf{x}$	\mathbf{A}
\mathbf{A} ή \mathbf{A}^T	\mathbf{O}_{mn}	$\mathbf{x}^T \mathbf{B}$	\mathbf{B}^T
\mathbf{x} ή \mathbf{x}^T	\mathbf{I}_n	$\mathbf{x}^T \mathbf{x}$	$2 \mathbf{x}^T$
$\mathbf{a}^T \mathbf{x}$	\mathbf{a}^T	$\mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x}$	$\mathbf{x}^T \mathbf{C} + \mathbf{x}^T \mathbf{C}^T$

3.3.3 Συνθήκες ακροτάτου χωρίς περιορισμούς

Έστω η πραγματική συνάρτηση διανυσματικής μεταβλητής $f(\mathbf{x})$, η οποία είναι συνεχής $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$. Σε αυτήν την περίπτωση το πρόβλημα ελαχιστοποίησης της συναρτήσεως f ανάγεται στην εύρεση ενός διανύσματος \mathbf{x}^* , τέτοιου ώστε

$$f(\mathbf{x}^*) = \min [f(\mathbf{x})] \quad (3.53)$$

Οι αναγκαίες συνθήκες ώστε το σημείο \mathbf{x}^* , να αποτελεί *ολικό ελάχιστο* της συναρτήσεως f , είναι:

- Το \mathbf{x}^* να αποτελεί στάσιμο σημείο (stationary point) της συναρτήσεως f , ήτοι

$$\left(\frac{df(\mathbf{x}^*)}{d\mathbf{x}} \right) = \mathbf{O}^T \quad (3.54)$$

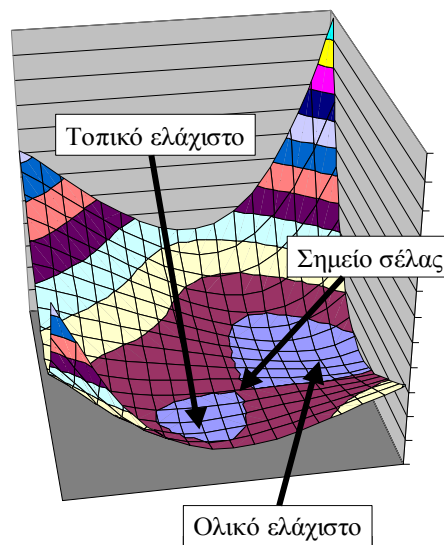
- Το Εσσιανό μητρώο (Hessian matrix) της συναρτήσεως f στο σημείο \mathbf{x}^* , να είναι θετικά ορισμένο, ήτοι

$$\mathbf{y}^T \left(\frac{d^2 f(\mathbf{x}^*)}{d\mathbf{x}^2} \right) \mathbf{y} > 0 \quad \forall \mathbf{y} \in \mathcal{R}^n - \{0\} \quad (3.55)$$

Οι παραπάνω αναγκαίες συνθήκες ελαχίστου καθίστανται και ικανές στην περίπτωση που η συνάρτηση f είναι κυρτή, δηλαδή στην περίπτωση που το Εσσιανό μητρώο της είναι θετικά ορισμένο για κάθε \mathbf{x} ,

$$\mathbf{y}^T \left(\frac{d^2 f(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}^2} \right) \mathbf{y} > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{R}^n, \forall \mathbf{y} \in \mathcal{R}^n - \{0\} \quad (3.56)$$

Αν κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει, η $f(\mathbf{x})$ μπορεί να έχει περισσότερα από ένα στάσιμα σημεία τα οποία μπορεί να είναι είτε τοπικά ελάχιστα, είτε τοπικά μέγιστα, είτε τίποτε από τα δύο. Στην τελευταία των περιπτώσεων τα σημεία αυτά ονομάζονται *σημεία σέλλας* (saddle points) (βλέπε και Σχήμα 3.2).



Σχήμα 3.2 :Γραφική απεικόνιση της συνάρτησης $f(x_1, x_2) = 0.5(1.1x_1 - x_2)^4 + 0.5(x_1 - 0.5)(x_2 - 0.5)$. Η συνάρτηση έχει τρία στάσιμα σημεία, εκ των οποίων δύο είναι τοπικά ελάχιστα και ένα σημείο σέλλας (Ευστρατιάδης, 2001)

Η αναζήτηση λοιπόν του ολικού ελαχίστου μίας μη κυρτής συνάρτησης ανάγεται στην εύρεση όλων των στάσιμων σημείων αυτής \mathbf{x}^i ($i= 1, 2, \dots$) και στην συνέχεια σύγκριση των τιμών της συναρτήσεως $f(\mathbf{x}^i)$.

Επισημαίνεται ότι το πρόβλημα αναζήτησης ελαχίστου, μπορεί να μετατραπεί άμεσα σε πρόβλημα αναζήτησης μεγίστου λόγω της προφανούς ισχύος της σχέσεως,

$$\max [f(\mathbf{x})] = -\min [-f(\mathbf{x})] \quad (3.57)$$

3.3.4 Αλγόριθμοι αναζήτησης ελαχίστου συναρτήσεων μιας μεταβλητής

Οι αλγόριθμοι αναζήτησης ελαχίστου συναρτήσεων μίας μεταβλητής βασίζονται στην γνωστή από την αριθμητική ανάλυση μέθοδο της διχοτόμησης.

Έστω συνάρτηση $f(x)$ η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[a, c]$. Για να έχει η συνάρτηση $f(x)$ ελάχιστο στο διάστημα (a, c) πρέπει να υπάρχει $b \in (a, c)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f(b) < f(a)$ και $f(b) < f(c)$. Αν τώρα επιλεγεί ένα σημείο $u \in (b, c)$, τότε στην περίπτωση που $f(b) < f(u)$ η θέση του ελαχίστου βρίσκεται στο διάστημα (a, b, u) , ενώ στην περίπτωση που $f(u) < f(b)$ η θέση του ελαχίστου βρίσκεται στο διάστημα (b, u, c) . Η παραπάνω διαδικασία συνεχίζεται ως ότου το προκύπτον διάστημα στο οποίο εντοπίζεται το ελάχιστο γίνει ικανοποιητικά μικρό (σύγκλιση της μεθόδου).

Οι προτεινόμενοι από την βιβλιογραφία αλγόριθμοι διαφοροποιούνται ως προς τον τρόπο επιλογής του σημείου u . Η μέθοδος της χρυσής τομής (golden section method) (Press *et al.*, 1992, σελ. 390-393) ορίζει το u ως το σημείο που βρίσκεται σε απόσταση από το σημείο b ίση με $(3-\sqrt{5})/2 = 0.38197$ της μεγαλύτερης απόστασης που ορίζεται από τα διαστήματα (a, b) και (b, c) . Είναι προφανές πως το διάστημα αναζήτησης σε κάθε επανάληψη της μεθόδου μειώνεται συνεχώς σύμφωνα με τον λόγο $(3-\sqrt{5})/2$ που αποτελεί και την μικρότερη ρίζα της εξίσωσης που περιγράφει το πρόβλημα της χρυσής τομής,

$$\omega^2 - 3\omega + 1 = 0 \quad (3.58)$$

Η μέθοδος της χρυσής τομής συγκλίνει πάντα (Press *et al.*, 1992), αλλά μειονεκτεί ως προς την ταχύτητα σύγκλισης. Η μέθοδος της αντίστροφης παραβολικής παρεμβολής (inverse parabolic interpolation), εκμεταλλευόμενη το γεγονός ότι πολλές συναρτήσεις στην περιοχή του ακροτάτου τους παρουσιάζουν σχεδόν τετραγωνική μορφή², θεωρεί ότι από την τριάδα των σημείων (a, b, c) διέρχεται μία παραβολή της οποίας η κορυφή αποτελεί το προς προσδιορισμό σημείο u , του οποίου η τετμημένη δίδεται από την σχέση,

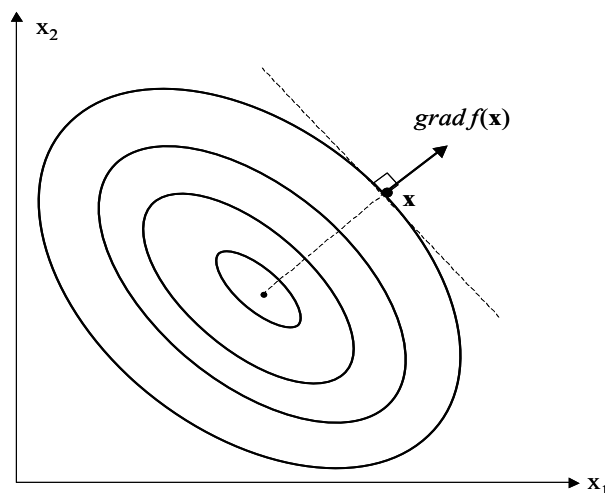
² Η παραπάνω παρατήρηση πηγάζει από το ανάπτυγμα Taylor μίας συναρτήσεως.

$$u = b - \frac{1}{2} \frac{(b-a)^2 [f(b) - f(c)] - (b-c)^2 [f(b) - f(a)]}{(b-a)[f(b) - f(c)] - (b-c)[f(b) - f(a)]} \quad (3.59)$$

Η μέθοδος της αντίστροφης παραβολικής παρεμβολής, αν και αρκετά γρήγορη όταν η συνάρτηση $f(x)$ έχει τετραγωνική μορφή (π.χ. στην περιοχή του τοπικού ακροτάτου), παρουσιάζει προβλήματα στην περίπτωση που η εν λόγω συνθήκη δεν τηρείται. Το παραπάνω γεγονός οδήγησε τον Brent σε ένα συνδυασμό των μεθόδων της χρυσής τομής και της αντίστροφης παραβολικής παρεμβολής (Press *et al.*, 1992, σελ. 395) κατά τον οποίο ελέγχεται αρχικά η παραβολική συμπεριφορά της συναρτήσεως και αν αυτή δεν εμφανίζεται ικανοποιητική, εφαρμόζεται η μέθοδος της χρυσής τομής.

3.3.5 Μέθοδος της πλέον απότομης κατάβασης (Steepest Descent method)

Η μέθοδος της πλέον απότομης κατάβασης (Press *et al.*, 1992, σελ. 414), αποτελεί μία εκ των μεθόδων έμμεσης³ αναζήτησης τοπικών ελαχίστων πολυμεταβλητών συναρτήσεων. Βασίζεται στο θεώρημα του διαφορικού λογισμού σύμφωνα με το οποίο το διάνυσμα κλίσης $-\nabla f(\mathbf{x})$ μιας συνάρτησης $f(\mathbf{x})$ σε ένα σημείο \mathbf{x}_0 δίνει την κατεύθυνση κατά την οποία η f έχει το μεγαλύτερο βαθμό μείωσης στην περιοχή του \mathbf{x}_0 (Σχήμα 3.3).



Σχήμα 3.3 Γραφική ερμηνεία του θεωρήματος του διαφορικού λογισμού, πάνω στο οποίο βασίζεται η μέθοδος της πλέον απότομης κατάβασης (Ευστρατιάδης, 2001)

³ Ο όρος «έμμεση» χρησιμοποιείται με σκοπό να υποδηλώσει ότι η αναζήτηση βελτίστου γίνεται έμμεσα με χρήση του διανύσματος της κλίσεως της προς βελτιστοποίηση συναρτήσεως. Δηλαδή την απαίτηση των μεθόδων για αναλυτικό ή αριθμητικό υπολογισμό της 1^{ης} παραγώγου της συναρτήσεως.

Αν $\mathbf{x}^{[k]}$ το σημείο του πολυδιάστατου χώρου στο οποίο βρίσκεται ο αλγόριθμος κατά την k επανάληψη, τότε είναι δυνατόν να ευρεθεί το σημείο $\mathbf{x}^{[k+1]}$ το οποίο ελαχιστοποιεί την συνάρτηση $f(\mathbf{x})$ πάνω στην ευθεία με εξίσωση,

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^{[k]} - \beta \nabla f(\mathbf{x}^{[k]}) \quad (3.60)$$

όπου με β συμβολίζεται μία βαθμωτή παράμετρος. Το σημείο $\mathbf{x}^{[k+1]}$ δίδεται από την εξίσωση,

$$\mathbf{x}^{[k+1]} = \mathbf{x}^{[k]} - \beta^{[k]} \nabla f(\mathbf{x}^{[k]}) \quad (3.61)$$

όπου $\beta^{[k]}$ η βαθμωτή παράμετρος που προκύπτει από την ελαχιστοποίηση της μονομεταβλητής συναρτήσεως,

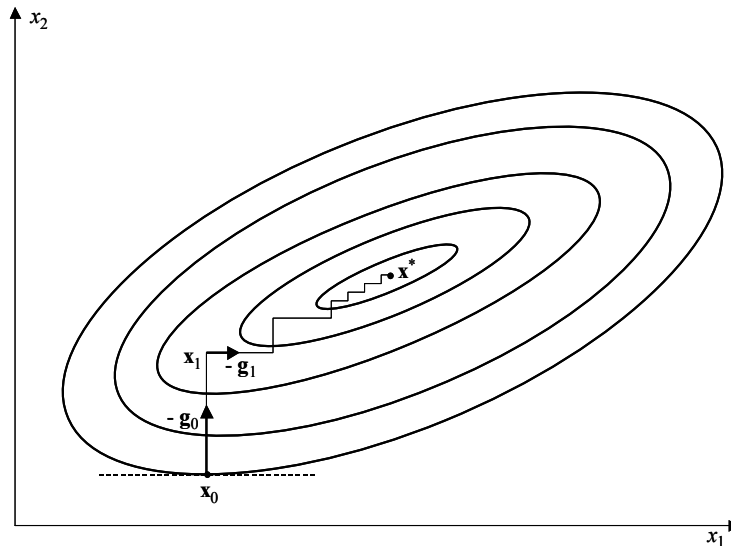
$$g(\beta^{[k]}) = f(\mathbf{x}^{[k]} - \beta^{[k]} \nabla f(\mathbf{x}^{[k]})) \quad (3.62)$$

Κατά αυτό τον τρόπο το πρόβλημα της ελαχιστοποίησης μίας συναρτήσεως πολλών μεταβλητών ανάγεται σε πρόβλημα ελαχιστοποίησης συναρτήσεως μίας μεταβλητής, που μπορεί να επιλυθεί με κάποια από τις μεθόδους που περιγράφησαν στο εδάφιο 3.3.4.

Αξίζει να σημειώσουμε ότι σε κάθε βήμα της μεθόδου η διεύθυνση της μετακινήσεως είναι σχεδόν κάθετη στην διεύθυνση μετακινήσεως του προηγούμενου βήματος και ακριβώς κάθετη στην περίπτωση που το ελάχιστο της συναρτήσεως $f(\mathbf{x}^{[k]} - \beta^{[k]} \nabla f(\mathbf{x}^{[k]}))$ έχει προσδιοριστεί επακριβώς (θεωρητική λύση).

Το βασικό μειονέκτημα της μεθόδου έγκειται στο ότι η ταχύτητα σύγκλισης εξαρτάται από τον βαθμό συντήρησης⁴ (condition number) του Εσσιανού μητρώου \mathbf{H} της συναρτήσεως f , ο οποίος αποτελεί ένα ποσοτικό μέτρο για το πόσο επιμήκεις είναι οι ισοσταθμικές του πεδίου τιμών της συναρτήσεως. Άλλωστε, όσο πιο επιμήκεις είναι οι ισοσταθμικές, τόσο μικρότερη είναι η παράμετρος β και τόσο πιο αργή καθίσταται η σύγκλιση του αλγορίθμου (βλέπε Σχήμα 3.4).

⁴ Βαθμός συντήρησης ενός μητρώου καλείται ο λόγος του μεγίστου προς το ελάχιστο ιδιοδιάνυσμα αυτού.



Σχήμα 3.4 Παράδειγμα εφαρμογής της μεθόδου πλέον απότομης κατάβασης σε τετραγωνική συνάρτηση δύο διαστάσεων (Ευστρατιάδης, 2001)

Στην οριακή περίπτωση που ο βαθμός συντήρησης του μητρώου \mathbf{H} είναι ίσος με την μονάδα, τότε οι ισοσταθμικές της συναρτήσεως f είναι ομόκεντροι κύκλοι και η μέθοδος συγκλίνει σε ένα μόνο βήμα. Σε αντίθετη περίπτωση οι απαιτούμενες επαναλήψεις της μεθόδου, εξαρτώνται από τον βαθμό συντήρησης του μητρώου \mathbf{H} (Belegundu & Chandrupatla, 1999).

3.3.6 Μέθοδος των συζυγών κλίσεων (Conjugate Gradient method)

Η μέθοδος των συζυγών κλίσεων (Press *et al.*, 1992, σελ. 414), η οποία προτάθηκε αρχικά από τους Fletcher & Reeves (1964), αποτελεί μία βελτιωμένη παραλλαγή της μεθόδου της πλέον απότομης κατάβασης. Το μεγάλο πλεονέκτημα της μεθόδου είναι ότι δύναται να εντοπίσει το ελάχιστο μίας τετραγωνικής συναρτήσεως n μεταβλητών με n στον αριθμό επαναλήψεις. Μία συνάρτηση καλείται τετραγωνική στην περίπτωση που μπορεί να γραφεί υπό την μορφή,

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c \quad (3.63)$$

όπου \mathbf{A} μητρώο θετικά ορισμένο, \mathbf{b} διάνυσμα και c βαθμωτή παράμετρος. Αποδεικνύεται θεωρητικά ότι στην περίπτωση που η προς βελτιστοποίηση

συνάρτηση είναι τετραγωνική, τότε η ταχύτερη διεύθυνση σύγκλισης δεν είναι η $-\nabla f(\mathbf{x})$, αλλά η συζυγής της ως προς το Εσσιανό μητρώο \mathbf{A} . Γενικά δύο μη παράλληλες διευθύνσεις ορίζονται ως συζυγείς προς ένα μητρώο \mathbf{A} , στην περίπτωση που ισχύει η συνθήκη:

$$\mathbf{d}_i^T \mathbf{A} \mathbf{d}_j = 0, \quad i \neq j, \quad 0 \leq i \text{ και } j \leq n \quad (3.64)$$

Ο αλγόριθμος ξεκινά θεωρώντας ένα αρχικό σημείο $\mathbf{x}^{[0]}$ και μία αρχική διεύθυνση $\mathbf{d}^{[0]}$ που ταυτίζεται με την διεύθυνση $-\nabla f(\mathbf{x}^{[0]})$ της μεθόδου της πλέον απότομης κατάβασης. Κάθε νέο σημείο $\mathbf{x}^{[k+1]}$ της επαναληπτικής μεθόδου προκύπτει με ελαχιστοποίηση της συναρτήσεως $f(\mathbf{x})$ κατά μήκος της διευθύνσεως $\mathbf{d}^{[k]}$, δηλαδή με επίλυση του μονοδιάστατου προβλήματος,

$$\text{minimize } g(\alpha^{[k]}) = f(\mathbf{x}^{[k]} - \alpha^{[k]} \mathbf{d}^{[k]}) \quad (3.65)$$

Παραγωγίζοντας την f ως προς $\alpha^{[k]}$ προκύπτει,

$$\alpha^{[k]} = - \frac{\mathbf{d}^{[k]T} \mathbf{g}^{[k]}}{(\mathbf{d}^{[k]})^T \mathbf{A} \mathbf{d}^{[k]}} \quad (3.66)$$

όπου $\mathbf{g} = \nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$. Το σημείο $\mathbf{x}^{[k+1]}$ μπορεί να ευρεθεί από την σχέση,

$$\mathbf{x}^{[k+1]} = \mathbf{x}^{[k]} - \alpha^{[k]} \mathbf{d}^{[k]} \quad (3.67)$$

και η νέα διεύθυνση $\mathbf{d}^{[k+1]}$ από την σχέση,

$$\mathbf{d}^{[k+1]} = -\mathbf{g}^{[k+1]} + \beta^{[k]} \mathbf{d}^{[k]} \quad (3.68)$$

Διαπιστώνουμε ότι η νέα διεύθυνση $\mathbf{d}^{[k+1]}$ παρεκκλίνει της διευθύνσεως της μεθόδου της πλέον απότομης κατάβασης κατά την ποσότητα $\beta^{[k]} \mathbf{d}^{[k]}$. Ο προσδιορισμός της βαθμωτής παραμέτρου $\beta^{[k]}$ μπορεί να γίνει λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι οι διευθύνσεις $\mathbf{d}^{[k]}$ και $\mathbf{d}^{[k+1]}$ είναι συζυγείς ως προς το μητρώο \mathbf{A} , οπότε προκύπτει

$$\beta^{[k]} = \frac{(\mathbf{g}_{k+1})^T (\mathbf{g}_{k+1} - \mathbf{g}_k)}{(\mathbf{g}_k)^T \mathbf{g}_k} \quad (3.69)$$

Στην περίπτωση που η συνάρτηση $f(\mathbf{x})$ είναι τετραγωνική, τότε η n -στή επανάληψη του αλγορίθμου υπολογίζει το σημείο $\mathbf{x}^{[n]}$ που αποτελεί και το ελάχιστο της τετραγωνικής συναρτήσεως. Στην περίπτωση όμως που η $f(\mathbf{x})$ δεν είναι τετραγωνική, τότε αφενός η βαθμωτή παράμετρος $\alpha^{[k]}$ πρέπει να υπολογιστεί αριθμητικά με χρήση μεθόδων βελτιστοποίησης μίας μεταβλητής (βλέπε εδάφιο 3.3.4) και αφετέρου απαιτούνται περισσότερες από n επαναλήψεις για τον εντοπισμό του βελτίστου.

3.4 Το γενικευμένο αντίστροφο μητρώο

Στο εδάφιο 3.1.4 είδαμε ότι το γραμμικό σύστημα $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ έχει μία και μοναδική λύση στην περίπτωση που ο πίνακας \mathbf{A} είναι τετραγωνικός και ταυτόχρονα ομαλός (non-singular). Σε αυτήν την ενότητα θα ασχοληθούμε με το πώς θα μπορέσουμε να βρούμε μία λύση εκ των απείρων λύσεων του συστήματος (αν αυτό είναι αόριστο), ή την καλύτερη δυνατή προσέγγιση του διανύσματος \mathbf{x} (αν το σύστημα είναι αδύνατο).

Αριθμός εξισώσεων (n) μικρότερος του αριθμού των αγνώστων (m) – εύρεση ελάχιστης λύσης

Στην περίπτωση που ο αριθμός των εξισώσεων n του γραμμικού συστήματος $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ είναι μικρότερος του αριθμού των αγνώστων m , τότε από την άλγεβρα μητρώων γνωρίζουμε ότι το γραμμικό σύστημα είναι αόριστο, δηλαδή έχει άπειρες λύσεις. Στην ίδια ακριβώς περίπτωση υπάγεται και ένα σύστημα n εξισώσεων με n αγνώστους του οποίου ο πίνακας \mathbf{A} είναι μη-ομαλός, γεγονός που οφείλεται στο ότι κάποιες εξισώσεις του συστήματος αποτελούν γραμμικό συνδυασμό άλλων. Μία εκ των απείρων λύσεων που μπορούν να αναζητηθούν είναι και η *ελάχιστη λύση*, δηλαδή η λύση \mathbf{x} που εμφανίζει την μικρότερη δυνατή τιμή της ευκλείδειας νόρμας. Σύμφωνα με αυτά που ειπώθηκαν, θα μπορούσαμε να διατυπώσουμε το εν λόγω πρόβλημα ως ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης της μορφής,

$$\text{minimize } \|\mathbf{x}\| = \text{minimize } (\mathbf{x}^T \mathbf{x}) \quad (3.70)$$

$$\text{s.t. } \mathbf{Ax} - \mathbf{b} = 0 \quad (3.71)$$

με την σχέση (3.71) να αποτελεί τους περιορισμούς του προβλήματος. Αποδεικνύεται (Marlow, 1993, σελ. 263), ότι το εν λόγω πρόβλημα ελαχιστοποίησης έχει μοναδικό ελάχιστο \mathbf{x}^* που δίδεται από τις εξισώσεις,

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \mathbf{A}^T \quad (3.72)$$

$$\mathbf{C} \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{b} \quad (3.73)$$

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda} \quad (3.74)$$

Για την εύρεση λοιπόν της ελάχιστης λύσεως, αρκεί να προσδιοριστεί το συμμετρικό μητρώο \mathbf{C} (με πολλαπλασιασμό δύο γνωστών μητρώων \mathbf{A} και \mathbf{A}^T), στην συνέχεια να επιλυθεί ένα γραμμικό σύστημα για τον προσδιορισμό του διανύσματος $\boldsymbol{\lambda}$ και τέλος να γίνει ο πολλαπλασιασμός του πίνακα \mathbf{A}^T με το διάνυσμα $\boldsymbol{\lambda}$. Επισημαίνεται ότι οι σχέσεις (3.72), (3.73) και (3.74) θα μπορούσαν να συνοψιστούν σε μία σχέση,

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{b} \quad (3.75)$$

όπου το μητρώο $\mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{A}^T)^{-1}$ ονομάζεται και γενικευμένο αντίστροφο μητρώο ελάχιστης νόρμας.

Αριθμός εξισώσεων (n) μεγαλύτερος του αριθμού των αγνώστων (m) – λύση ελαχίστων τετραγώνων

Στην περίπτωση που ο αριθμός των εξισώσεων n του γραμμικού συστήματος $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ είναι μεγαλύτερος του αριθμού των αγνώστων m , τότε από την άλγεβρα μητρώων γνωρίζουμε ότι το γραμμικό σύστημα είναι αδύνατο, δηλαδή δεν έχει καμία λύση. Σε αυτήν την περίπτωση καλούμαστε να υπολογίσουμε μία προσεγγιστική λύση \mathbf{x} , η οποία να ελαχιστοποιεί την ευκλείδεια νόρμα του διανύσματος σφάλματος.

Το εν λόγω πρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί και ως πρόβλημα ελαχιστοποίησης χωρίς περιορισμούς υπό τη μορφή,

$$\text{minimize} \|\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b}\| \quad (3.76)$$

της οποίας ισοδύναμη έκφραση αποτελεί η σχέση,

$$\text{minimize} [(\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b})^T (\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b})]^{1/2} \quad (3.77)$$

από όπου με αλγεβρικούς υπολογισμούς καταλήγουμε στην σχέση,

$$\text{minimize} [(\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{b} - \mathbf{b}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{b})^{1/2}] \quad (3.78)$$

Αποδεικνύεται (Marlow, 1993, σελ. 255), ότι το εν λόγω πρόβλημα ελαχιστοποίησης έχει μοναδικό ελάχιστο \mathbf{x}^* που δίδεται από την εξίσωση,

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \mathbf{x}^* = \mathbf{A}^T \mathbf{b} \quad (3.79)$$

Για την εύρεση του ελαχίστου απαιτείται η επίλυση του συστήματος της σχέσεως (3.79), του οποίου η λύση δίδεται από την σχέση,

$$\mathbf{x}^* = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b} \quad (3.80)$$

όπου $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$ ονομάζεται και γενικευμένο αντίστροφο μητρώο ελαχίστων τετραγώνων.

4 Στατιστική ανάλυση ιστορικών χρονοσειρών

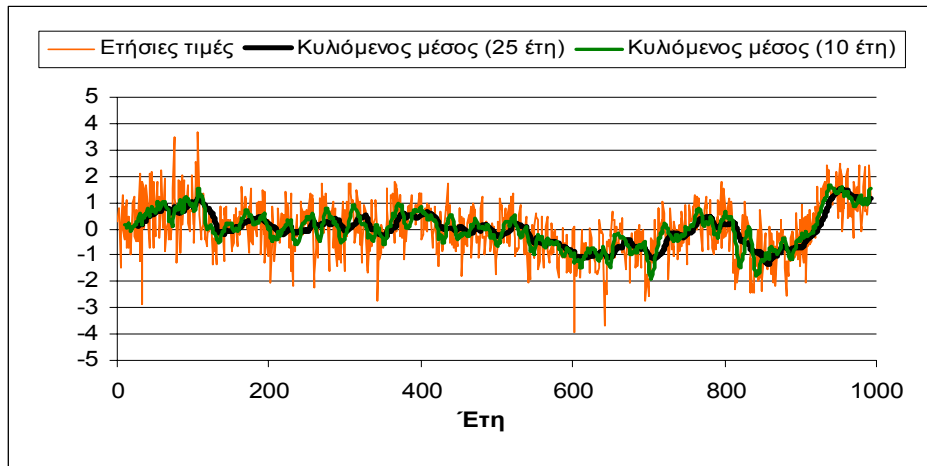
Στις σελίδες που ακολουθούν πραγματοποιείται η παρουσίαση και η απαραίτητη στατιστική ανάλυση των ιστορικών χρονοσειρών που χρησιμοποιήθηκαν ως βάση για τα παραδείγματα του κεφαλαίου 2, καθώς και για τον έλεγχο της απόδοσης των στοχαστικών μοντέλων που αναπτύχθηκαν στα πλαίσια της παρούσας εργασίας. Συγκεκριμένα οι χρονοσειρές που πρόκειται να αναλυθούν είναι:

1. η χρονοσειρά των μέσων ετησίων θερμοκρασιών του Βορείου Ημισφαιρίου, μήκους 992 ετών (Jones *et al.*, 1998),
2. η χρονοσειρά μηνιαίων υψών απορροής του Βοιωτικού Κηφισού στην θέση εξόδου του στην διώρυγα Καρδίτσας,
3. η χρονοσειρά μηνιαίων υψών σημειακής βροχοπτώσεως στον βροχομετρικό σταθμό Αλιάρτου, ο οποίος είναι ο παλαιότερος σταθμός που λειτουργεί στην λεκάνη του Βοιωτικού Κηφισού.

Επισημαίνεται ότι οι χρονοσειρές 2 και 3 είναι συσχετισμένες, και έτσι μέρος της απαραίτητης στατιστικής ανάλυσης είναι και η εύρεση των από κοινού στατιστικών χαρακτηριστικών των δύο ιστορικών χρονοσειρών.

4.1 Ιστορική χρονοσειρά μέσων ετησίων θερμοκρασιών (Jones *et al.*, 1998)

Στο Σχήμα 4.1 παρουσιάζεται το διάγραμμα των πραγματοποιήσεων της ανακατασκευασμένης ιστορικής χρονοσειράς των μέσων ετησίων θερμοκρασιών του Βορείου Ημισφαιρίου μήκους 992 ετών (Jones *et al.*, 1998), καθώς και οι κυλιόμενοι μέσοι όροι αυτής για 10 και 25 έτη.



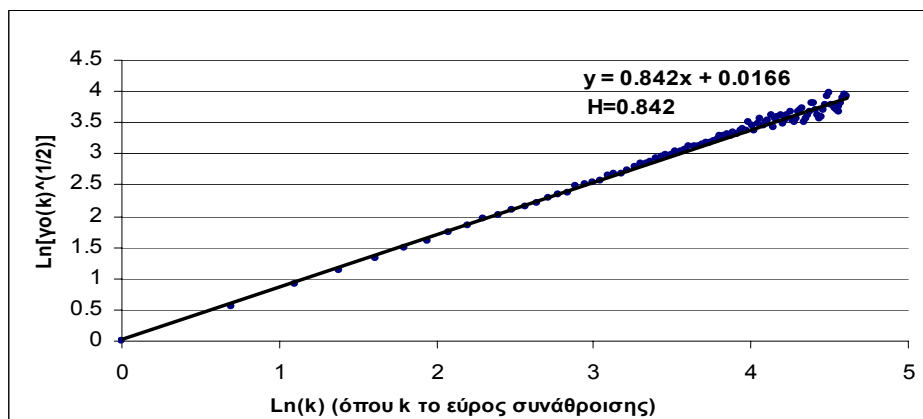
Σχήμα 4.1 Τιμές ιστορικής χρονοσειράς μέσω ετήσιων θερμοκρασιών Βορείου Ημισφαιρίου (Jones *et al.*, 1998)

Στον Πίνακα 4.1 παρουσιάζονται τα στατιστικά χαρακτηριστικά του ιστορικού δείγματος και συγκεκριμένα η μέση τιμή, η τυπική απόκλιση και ο συντελεστής ασυμμετρίας αυτού.

Πίνακας 4.1 Στατιστικά χαρακτηριστικά χρονοσειράς μέσω ετήσιων θερμοκρασιών Βορείου Ημισφαιρίου (Jones *et al.*, 1998)

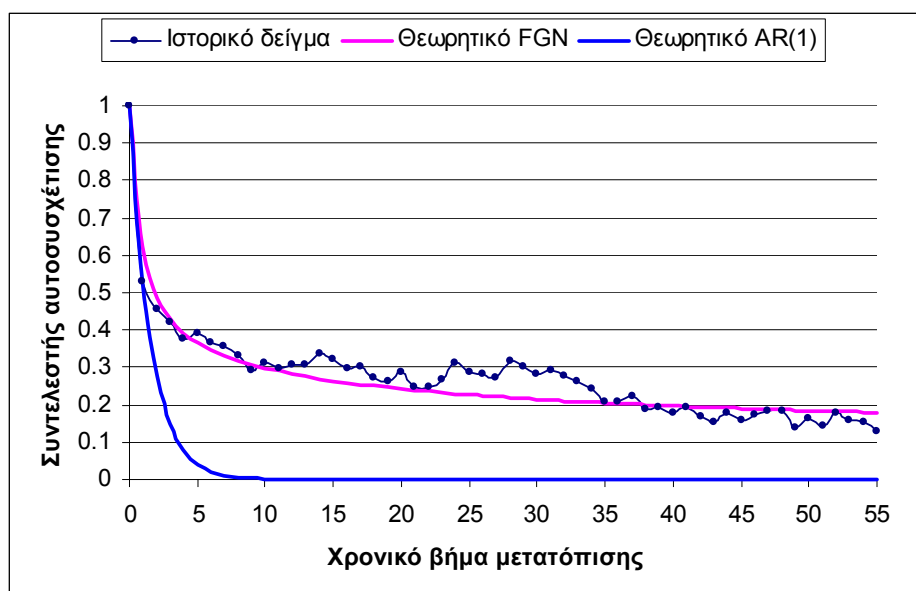
Μέση τιμή	-0.3683
Τυπική απόκλιση	0.4397
Συντελεστής ασυμμετρίας	-0.0888

Στο Σχήμα 4.2 παρουσιάζεται το διάγραμμα που προέκυψε από την εφαρμογή της εξίσωσης (2.43) της ενότητας 2.6 στο ιστορικό δείγμα, και από το οποίο είναι δυνατός ο προσδιορισμός του συντελεστή Hurst της ιστορικής χρονοσειράς ($H=0.842$).



Σχήμα 4.2 Προσδιορισμός του συντελεστή Hurst της ιστορικής χρονοσειράς μέσω ετήσιων θερμοκρασιών Βορείου Ημισφαιρίου (Jones *et al.*, 1998)

Στο Σχήμα 4.3 παρουσιάζεται η οπτικοποιημένη σύγκριση του εμπειρικού αυτοσυσχετογράμματος της ανακατασκευασμένης ιστορικής χρονοσειράς μέσω των ετησίων θερμοκρασιών του Βορείου Ημισφαιρίου (Jones *et al.*, 1998), του θεωρητικού αυτοσυσχετογράμματος FGN για συντελεστή Hurst ίσο με τον προσδιορισθέντα για την αυτή ιστορική χρονοσειρά ($H= 0.842$), και του θεωρητικού αυτοσυσχετογράμματος του μοντέλου AR(1) για συντελεστή αυτοσυσχέτισης 1^{ης} τάξεως ίσο με τον αντίστοιχο της ιστορικής χρονοσειράς (για περισσότερες πληροφορίες πάνω στις χρησιμοποιούμενες για τα θεωρητικά αυτοσυσχετογράμματα σχέσεις ο αναγνώστης παραπέμπεται στην ενότητα 2.6).



Σχήμα 4.3 Σύγκριση αυτοσυσχετογράμματος ιστορικού δείγματος μέσω των θερμοκρασιών Βορείου Ημισφαιρίου και των θεωρητικών αυτοσυσχετογραμμάτων FGN και AR(1)

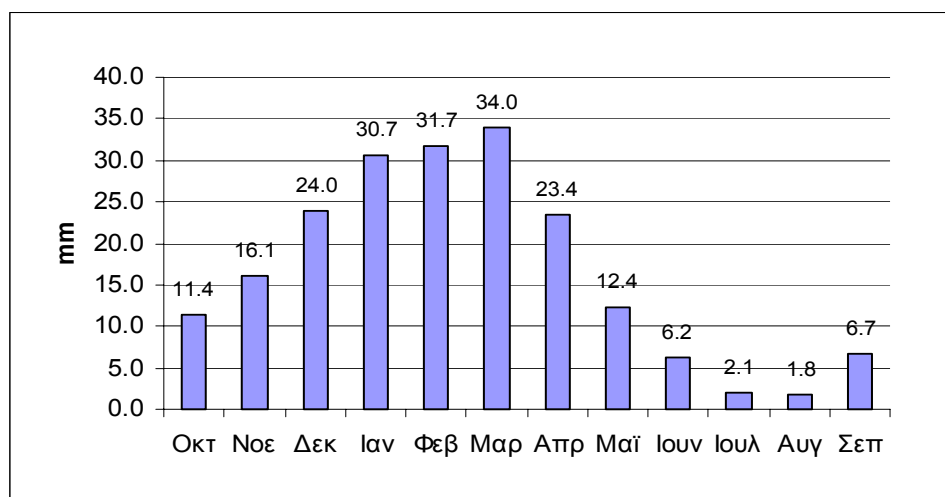
4.2 Συσχετισμένες ιστορικές χρονοσειρές μηνιαίων υψών βροχόπτωσης και απορροής

Στην συνέχεια θα αναφερθούμε στα στατιστικά χαρακτηριστικά δύο συσχετισμένων ιστορικών χρονοσειρών που έχουν προέλθει από μετρήσεις στον Ελληνικό χώρο: (1) της ιστορικής χρονοσειράς μηνιαίων υψών απορροής του Βοιωτικού Κηφισού στην θέση εξόδου του στην διώρυγα Καρδίτσας, και (2) της ιστορικής χρονοσειράς μηνιαίων υψών σημειακής βροχοπτώσεως στον βροχομετρικό

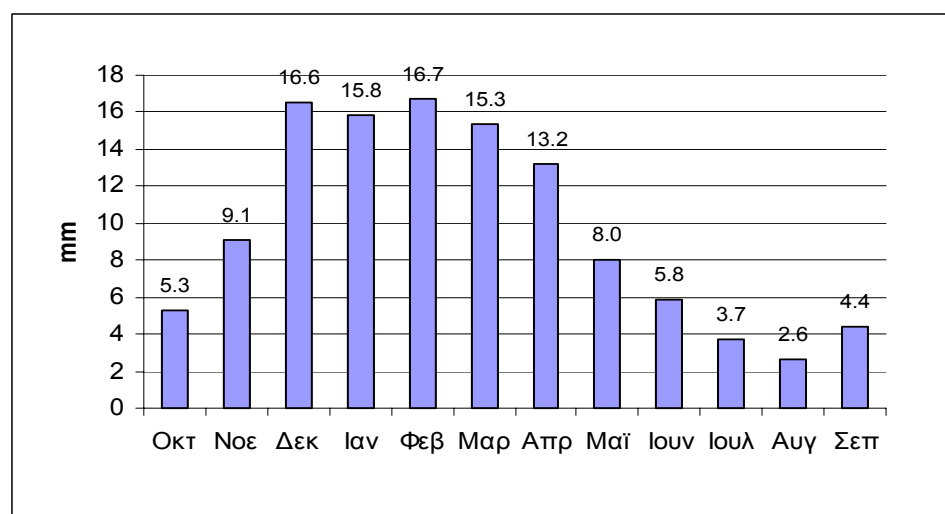
σταθμό Αλιάρτου, ο οποίος είναι ο παλαιότερος σταθμός που λειτουργεί στην λεκάνη απορροής του Βοιωτικού Κηφισού. Οι εν λόγω συσχετισμένες ιστορικές χρονοσειρές επιλέχθηκαν ως τα πλέον μακρύτερα σε μήκος χρόνου ιστορικά δείγματα βροχοπτώσεων και απορροών στον ελληνικό χώρο [91 κοινά έτη βροχοπτώσεων και απορροών (1907-1998)] (Κουτσογιάννης κ.α., 2001).

Ιστορικό δείγμα απορροών Βοιωτικού Κηφισού

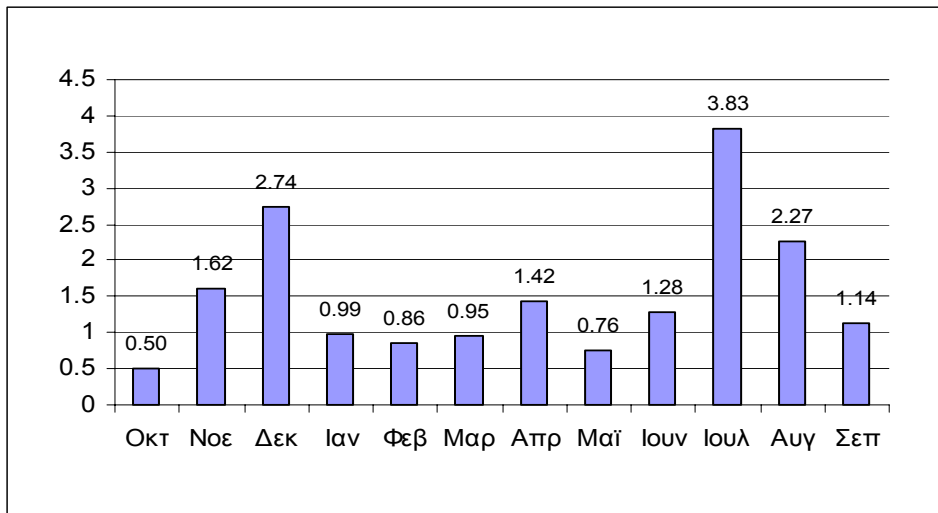
Στα Σχήματα 4.4, 4.5, 4.6 και 4.7 παρατίθενται υπό την μορφή διαγραμμάτων τα στατιστικά χαρακτηριστικά των μηνών του ιστορικού δείγματος απορροών.



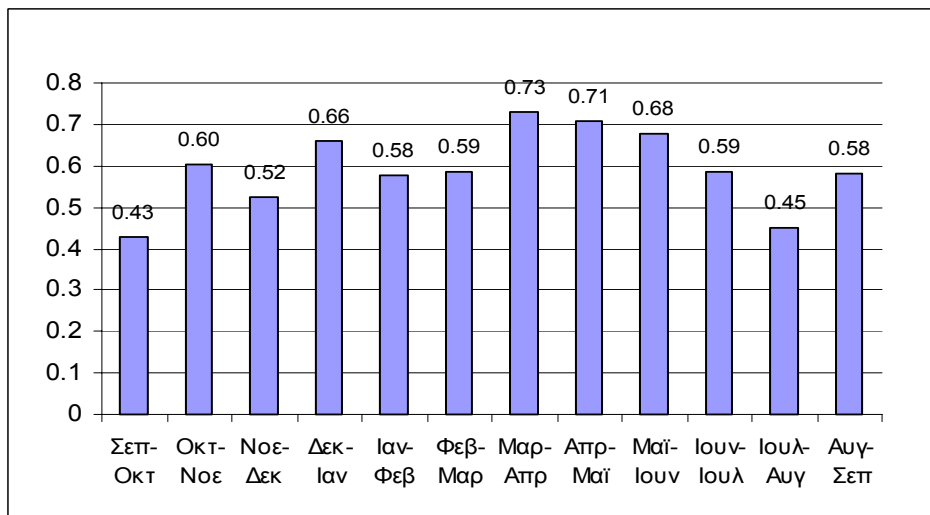
Σχήμα 4.4 Ραβδόγραμμα μηνιαίων μέσων τιμών ιστορικού δείγματος απορροών



Σχήμα 4.5 Ραβδόγραμμα μηνιαίων τυπικών αποκλίσεων ιστορικού δείγματος απορροών



Σχήμα 4.6 Ραβδόγραμμα μηνιαίων συντελεστών ασυμμετρίας ιστορικού δείγματος απορροών



Σχήμα 4.7 Ραβδόγραμμα συντελεστών συσχέτισης κάθε μήνα με τον προηγούμενό του, για το ιστορικό δείγμα απορροών

Στο σημείο αυτό αξίζει να τονίσουμε ότι όμοια με το ραβδόγραμμα του Σχήματος 4.7, θα μπορούσαν να εξαχθούν τα ραβδογράμματα των συντελεστών συσχέτισης κάθε μήνα του ιστορικού δείγματος με όλους τους προηγούμενους αυτού μήνες. Κάτι τέτοιο αποφεύγεται για δύο λόγους:

1. Η γνώση του συντελεστή συσχέτισης ενός μήνα με προηγούμενούς του και για υστέρηση (lag) μεγαλύτερη του 1, αυξάνει σε μικρό βαθμό την πληροφορία που χρειαζόμαστε ώστε να περιγράψουμε επαρκώς το ιστορικό δείγμα (φειδωλή χρήση παραμέτρων περιγραφής του ιστορικού δείγματος).
2. Σε εποχιακή κλίμακα ενδιαφερόμαστε για την βραχυπρόθεσμη μνήμη της ιστορικής χρονοσειράς που μπορεί να περιγραφεί από τον 1^{ης} τάξεως συντελεστή συσχέτισης κάθε μήνα. Η μακροπρόθεσμη μνήμη της

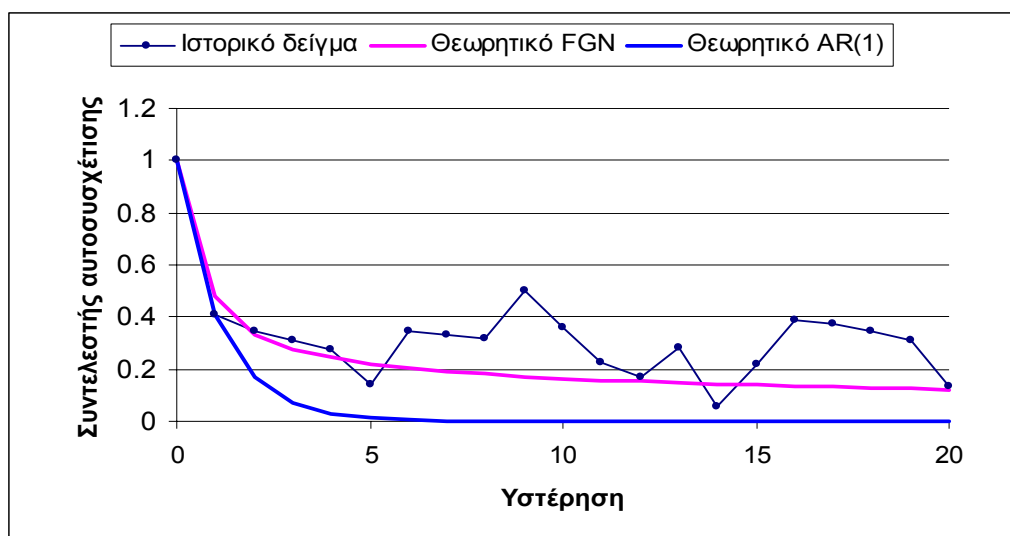
χρονοσειράς μελετάται σε ετήσια κλίμακα, όπου μπορεί να περιγραφεί επαρκώς μέσω του συντελεστή Hurst.

Στην συνέχεια παρουσιάζεται ο πίνακας των στατιστικών χαρακτηριστικών της ετήσιας ιστορικής χρονοσειράς απορροών¹,

Πίνακας 4.2 Στατιστικά χαρακτηριστικά ετήσιας χρονοσειράς απορροών

Μέση τιμή	200.6026
Τυπική απόκλιση	80.3621
Συντελεστής ασυμμετρίας	0.3991
Συντελεστής Hurst	0.7838

καθώς και το διάγραμμα σύγκρισης του εμπειρικού αυτοσυσχετογράμματος της ιστορικής χρονοσειράς, με το θεωρητικό αυτοσυσχετόγραμμα FGN για συντελεστή Hurst ίσο με τον προσδιορισθέντα για την αυτή ιστορική χρονοσειρά ($H= 0.784$) και με το θεωρητικό αυτοσυσχετόγραμμα του μοντέλου AR(1) για συντελεστή αυτοσυσχέτισης 1^{ης} τάξεως ίσο με τον αντίστοιχο της ιστορικής χρονοσειράς (για περισσότερες πληροφορίες πάνω στις χρησιμοποιούμενες για τα θεωρητικά αυτοσυσχετογράμματα σχέσεις, ο αναγνώστης παραπέμπεται στην ενότητα 2.6).

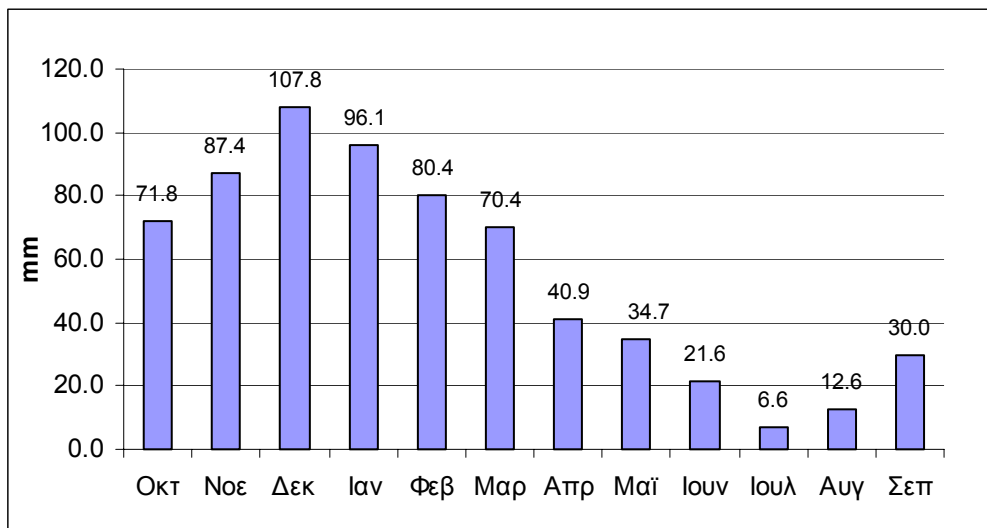


Σχήμα 4.8 Οπτικοποιημένη σύγκριση αυτοσυσχετογραμμάτων για την ετήσια ιστορική χρονοσειρά απορροών

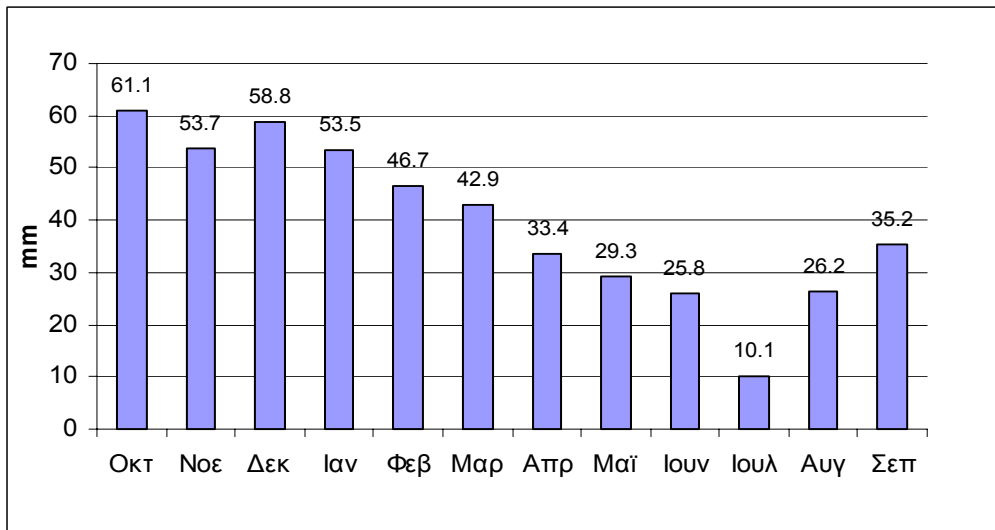
¹ Στον πίνακα των στατιστικών χαρακτηριστικών της ετήσιας χρονοσειράς απορροών συμπεριλήφθη και ο συντελεστής Hurst αυτής, του οποίου ο προσδιορισμός έγινε με την ίδια μέθοδο που εφαρμόστηκε στην ενότητα 4.1.

Ιστορικό δείγμα βροχοπτώσεων περιοχής Αλιάρτου.

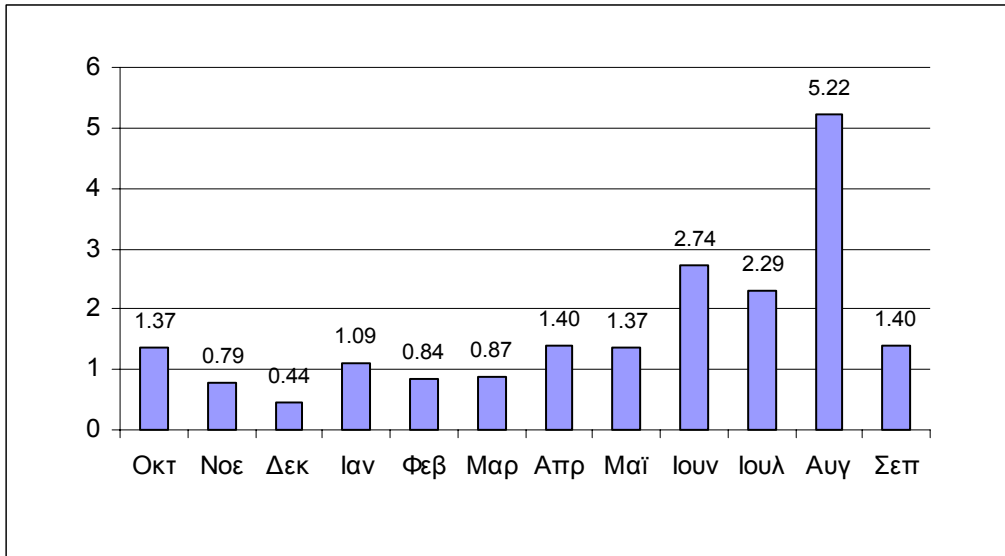
Στα Σχήματα 4.9, 4.10, 4.11 και 4.12 παρατίθενται υπό την μορφή διαγραμμάτων τα στατιστικά χαρακτηριστικά των μηνών του ιστορικού δείγματος βροχοπτώσεων.



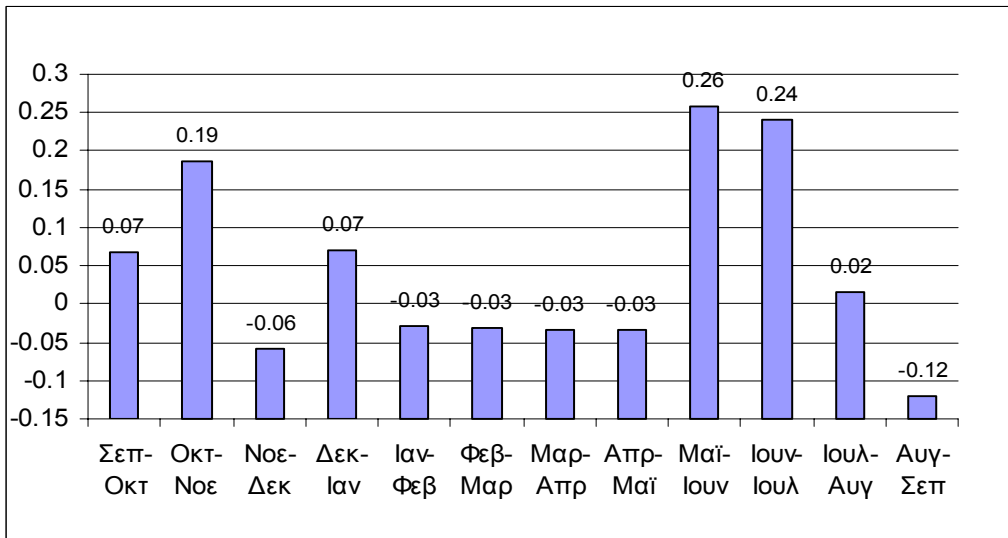
Σχήμα 4.9 Ραβδόγραμμα μηνιαίων μέσων τιμών ιστορικού δείγματος βροχοπτώσεων



Σχήμα 4.10 Ραβδόγραμμα μηνιαίων τυπικών αποκλίσεων ιστορικού δείγματος βροχοπτώσεων



Σχήμα 4.11 Ραβδόγραμμα μηνιαίων συντελεστών ασυμμετρίας ιστορικού δείγματος βροχοπτώσεων



Σχήμα 4.12 Ραβδόγραμμα συντελεστών συσχέτισης κάθε μήνα με τον προηγούμενό του, για το ιστορικό δείγμα βροχοπτώσεων

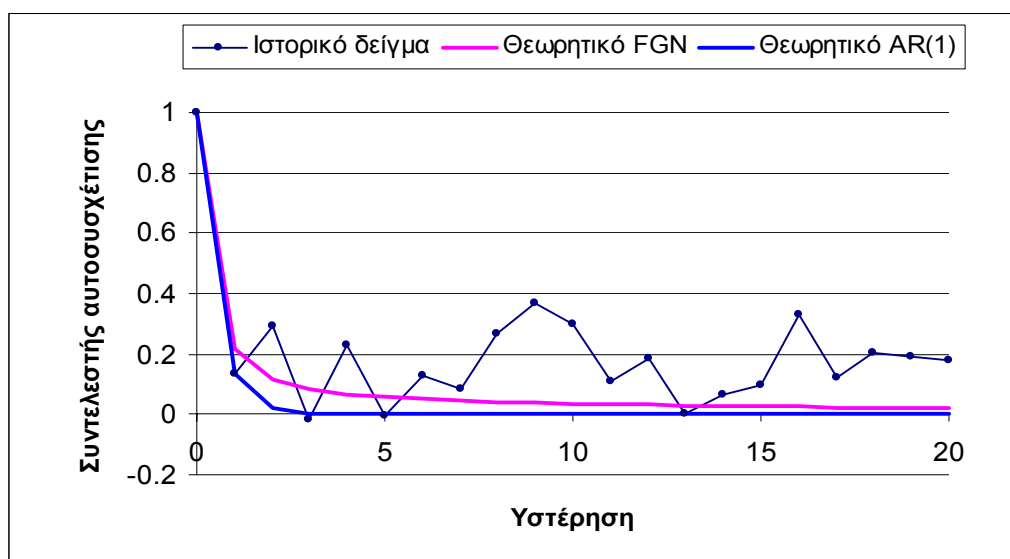
Στην συνέχεια παρουσιάζεται ο πίνακας των στατιστικών χαρακτηριστικών της ετήσιας ιστορικής χρονοσειράς βροχοπτώσεων²,

² Στον πίνακα των στατιστικών χαρακτηριστικών της ετήσιας χρονοσειράς βροχοπτώσεων συμπεριλήφθη και ο συντελεστής Hurst αυτής, του οποίου ο προσδιορισμός έγινε με την ίδια μέθοδο που εφαρμόστηκε στην ενότητα 4.1.

Πίνακας 4.3 Στατιστικά χαρακτηριστικά ετήσιας χρονοσειράς βροχοπτώσεων

Μέση τιμή	660.4473
Τυπική απόκλιση	155.7759
Συντελεστής ασυμμετρίας	0.451978
Συντελεστής Hurst	0.642289

καθώς και το διάγραμμα σύγκρισης του εμπειρικού αυτοσυσχετογράμματος της ιστορικής χρονοσειράς, με το θεωρητικό αυτοσυσχετόγραμμα FGN για συντελεστή Hurst ίσο με τον προσδιορισθέντα για την αυτή ιστορική χρονοσειρά ($H= 0.642$) και με το θεωρητικό αυτοσυσχετόγραμμα του μοντέλου AR(1) για συντελεστή αυτοσυσχέτισης 1^{ης} τάξεως ίσο με τον αντίστοιχο της ιστορικής χρονοσειράς (για περισσότερες πληροφορίες πάνω στις χρησιμοποιούμενες για τα θεωρητικά αυτοσυσχετογράμματα σχέσεις, ο αναγνώστης παραπέμπεται στην ενότητα 2.6).

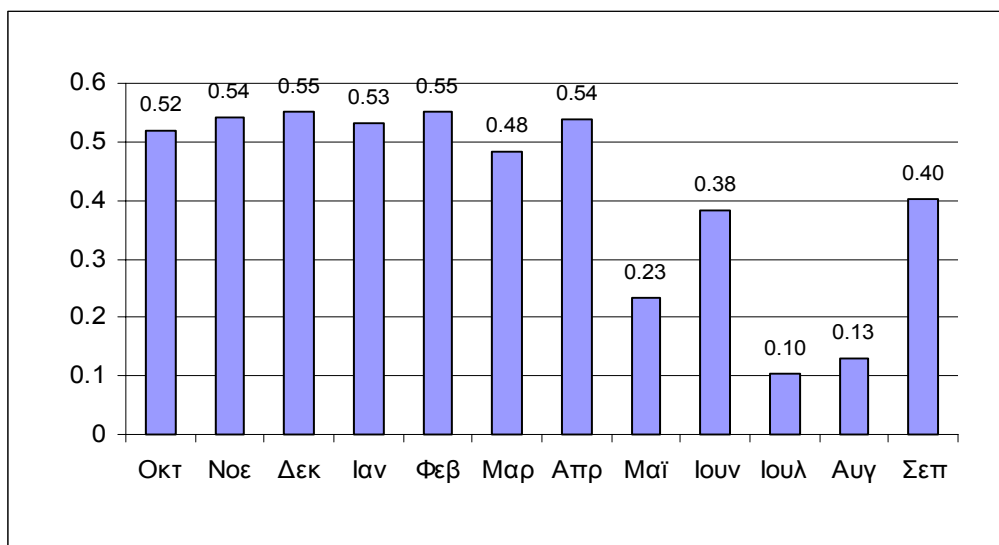


Σχήμα 4.13 Οπτικοποιημένη σύγκριση αυτοσυσχετογραμμάτων για την ετήσια ιστορική χρονοσειρά βροχοπτώσεων

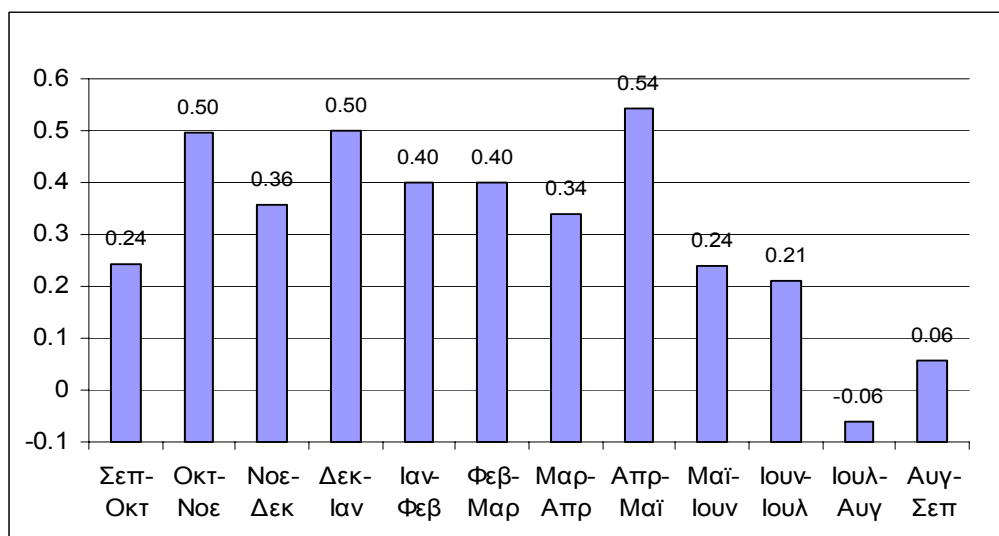
Από κοινού στατιστικά χαρακτηριστικά των υπό μελέτη χρονοσειρών

Στην συνέχεια παρουσιάζονται υπό την μορφή διαγραμμάτων οι συντελεστές ετεροσυσχέτισης των δύο χρονοσειρών για μηδενικό και μοναδιαίο βήμα χρονικής

μετατόπισης. Ο λόγος που αποφεύγεται η παρουσίαση διαγραμμάτων για υψηλότερα χρονικά βήματα μετατόπισης έχει αναλυθεί σε προηγούμενες σελίδες του κεφαλαίου.



Σχήμα 4.14 Ραβδόγραμμα συντελεστών ετεροσυσχέτισης των μηνών των δύο ιστορικών χρονοσειρών, για μηδενικό χρονικό βήμα μετατόπισης (συντελεστές ετεροσυσχέτισης των απορροών ενός μήνα με τις βροχοπτώσεις του ίδιου μήνα)



Σχήμα 4.15 Ραβδόγραμμα συντελεστών ετεροσυσχέτισης των μηνών των δύο ιστορικών χρονοσειρών, για μοναδιαίο χρονικό βήμα μετατόπισης (συντελεστές ετεροσυσχέτισης των απορροών ενός μήνα με τις βροχοπτώσεις του προηγούμενου μήνα)

Αναφερόμενοι στο Σχήμα 4.15 αξίζει να επισημάνουμε ότι κατά όμοιο τρόπο θα μπορούσαμε να παρουσιάσουμε και το ραβδόγραμμα των συντελεστών συσχέτισης μεταξύ των βροχοπτώσεων ενός μήνα με τις απορροές του προηγούμενου μήνα. Κάτι τέτοιο όμως αποφεύγεται λόγω του ότι δεν παρουσιάζει κανένα απολύτως υδρολογικό ενδιαφέρον.

5 Ανάπτυξη πολυμεταβλητού μοντέλου που βασίζεται στη χρήση ενός μοντέλου MPAR(1) σε συνδυασμό με φίλτρο SMA (MPARSMAF)

5.1 Παρουσίαση μοντέλου

Το μοντέλο MPARSMAF (Multivariate Periodic Autoregressive model with Symmetric Moving Average Filter) που θα αναπτυχθεί στις σελίδες που ακολουθούν, αποτελεί συνδυασμό δύο μοντέλων που αναλύθηκαν στο κεφάλαιο 2. Το πρώτο εκ των δύο μοντέλων είναι το πολυμεταβλητό κυκλοστάσιμο μοντέλο MPAR(1) και το δεύτερο είναι το μοντέλο συμμετρικού κινούμενου μέσου όρου (SMA) που χρησιμοποιείται ως μία μορφή φίλτρου αναπαραγωγής της μακροπρόθεσμης εμμονής πάνω στις συνθετικές χρονοσειρές που έχουν ήδη παραχθεί από το μοντέλο MPAR(1).

Στην συνέχεια πρόκειται να αναφερθούμε σε μία ιδιότητα του φαινομένου Hurst και σε μία ήδη γνωστή (από την ενότητα 2.5) ιδιότητα του μοντέλου MPAR(1), πάνω στις οποίες βασίστηκε η παρούσα προσέγγιση.

Ιδιότητα 1: Το άθροισμα δύο στάσιμων στοχαστικών ανελίξεων που έχουν τον ίδιο συντελεστή Hurst, αποτελεί στάσιμη στοχαστική ανέλιξη με συντελεστή Hurst ίσο με τον αρχικό.

Αν Q_i στάσιμη στοχαστική ανέλιξη όπου με τον δείκτη i συμβολίζεται το χρονικό διάστημα αναφοράς, τότε η μακροπρόθεσμη εμμονή της στάσιμης στοχαστικής ανελίξης Q_i μπορεί να περιγραφεί ως ένα απλό μορφοκλασματικό αντικείμενο (single fractal) από την εξίσωση [ενότητα 2.6, σχέση (2.41)],

$$(Q_i^{(k)} - k\mu_q) =_d \left(\frac{k}{\lambda}\right)^H (Q_j^{(\lambda)} - \lambda\mu_q) \quad (5.1)$$

Με $(=)_d$ συμβολίζεται η ισότητα στην (πεπερασμένης διάστασης) από κοινού κατανομή, με H συμβολίζεται ο συντελεστής Hurst της τυχαίας μεταβλητής Q_i , με μ_q η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής Q_i (δηλαδή $\mu_q = E[Q_i]$) και με $Q_i^{(k)}$ η τυχαία μεταβλητή που προκύπτει ως άθροισμα k διαδοχικών τυχαίων μεταβλητών Q_i , ήτοι

$$Q_i^{(k)} = \sum_{j=(i-1)k+1}^{ik} Q_j \quad (5.2)$$

Ας θεωρήσουμε τώρα τις τυχαίες μεταβλητές P_i και $P_i^{(k)}$, οι οποίες έχουν τον ίδιο συντελεστή Hurst με τις μεταβλητές Q_i και $Q_i^{(k)}$ και για τις οποίες ισχύουν (όπως και για τις μεταβλητές $Q_i, Q_i^{(k)}$) οι σχέσεις,

$$P_i^{(k)} = \sum_{j=(i-1)k+1}^{ik} P_j \quad (5.3)$$

$$(P_i^{(k)} - k\mu_p) =_d \left(\frac{k}{\lambda}\right)^H (P_j^{(\lambda)} - \lambda\mu_p) \quad (5.4)$$

Από τις (5.1) και (5.4), είναι προφανής η ισχύς της εξισώσεως,

$$(Q_i^{(k)} + P_i^{(k)} - k\mu_q - k\mu_p) =_d \left(\frac{k}{\lambda}\right)^H (Q_j^{(\lambda)} + P_j^{(\lambda)} - \lambda\mu_q - \lambda\mu_p) \quad (5.5)$$

που υποδηλώνει ότι αν δύο στάσιμες στοχαστικές ανελίξεις Q_i, P_i έχουν τον ίδιο συντελεστή Hurst H , τότε και το άθροισμά τους $Q_i + P_i$ αποτελεί στάσιμη στοχαστική ανελίξη με συντελεστή Hurst H ίσο με αυτόν των Q_i, P_i . Είναι προφανές ότι η παραπάνω απόδειξη μπορεί να γενικευθεί και για περισσότερες από δύο στοχαστικές ανελίξεις.

Ιδιότητα 2: Αν \mathbf{W}_j κυκλοστάσιμη στοχαστική ανελίξη **MPAR(1)** με περίοδο k , τότε η ανελίξη $\mathbf{W}_{(j-1)k+s}$ για δεδομένο s ($s = 1, \dots, k$) και $j = 1, \dots$ είναι στάσιμη με αυτοσυσχέτιση που τείνει στο μηδέν εφόσον το k τείνει στο άπειρο.

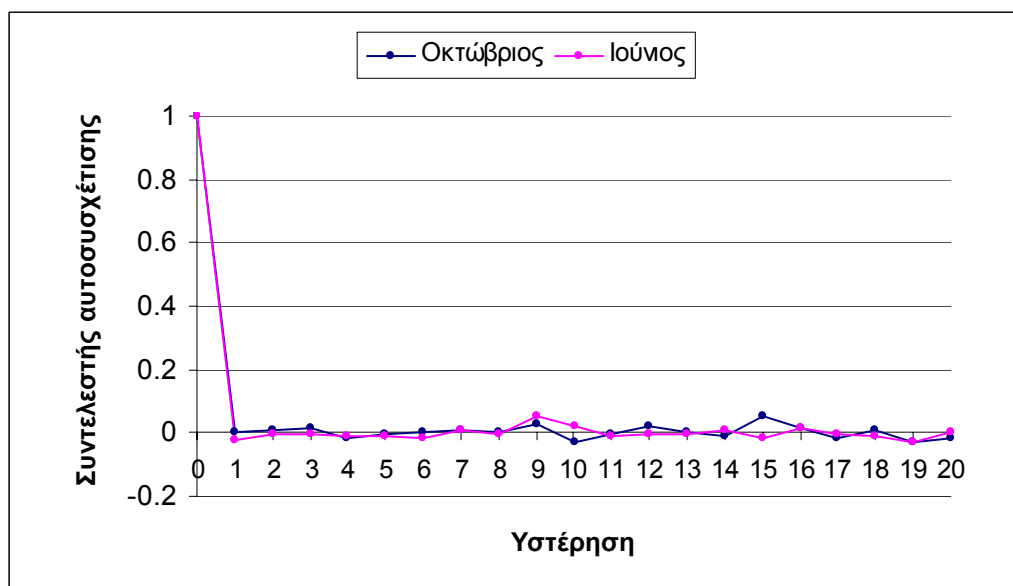
Αν $\mathbf{W}_j = [W_j^1, W_j^2, \dots, W_j^n]^T$ είναι το διάνυσμα των n κυκλοστάσιμων στοχαστικών ανελίξεων με περίοδο k (όπου k ο αριθμός των εποχών) κάθε μία εκ των οποίων αντιστοιχεί στην θέση που υποδηλώνεται με τον άνω δείκτη l ($l=1, 2, \dots, n$) για δεδομένη χρονική περίοδο j , τότε οι χρονοσειρές $\mathbf{w}_{(i-1)k+s}$ για $i = 1, \dots$ και δεδομένο κάθε φορά s ($s = 1, \dots, k$) των πραγματοποιήσεων της τυχαίας διανυσματικής μεταβλητής \mathbf{W}_j , είναι στάσιμες.

Ας θεωρήσουμε τώρα ότι η διανυσματική τυχαία μεταβλητή \mathbf{W}_j , της οποίας τα στοιχεία είναι κυκλοστάσιμες στοχαστικές ανελίξεις, περιγράφεται από ένα μοντέλο MPAR(1) της μορφής

$$\mathbf{W}_j = \mathbf{a}_j \mathbf{W}_{j-1} + \mathbf{b}_j \mathbf{V}_j \quad (5.6)$$

όπου $\mathbf{V}_j = [V_j^1, V_j^2, \dots, V_j^n]$ το διάνυσμα των n κυκλοστάσιμων στοχαστικών ανελίξεων με περίοδο k , οι οποίες παρουσιάζουν μηδενική συσχέτιση τόσο ως προς τον χρόνο j όσο και ως προς τις θέσεις ενδιαφέροντος l ($l=1, 2, \dots, n$) (δηλαδή $\text{Cov}[V_i^l, V_j^k] = 0$ για $l, k = 1, 2, \dots, n$) και $\mathbf{a}_j, \mathbf{b}_j$ περιοδικά μεταβαλλόμενες μητρωϊκές παράμετροι με περίοδο k , διαστάσεων $n \times n$. Στην περίπτωση που η περίοδος k της περιγραφόμενης από το μοντέλο ανελίξεως έχει υψηλή τιμή (π.χ. 12 αν αναφερόμαστε σε μηνιαία κλίμακα), τότε οι χρονοσειρές $w_{(i-1)k+s}$ για $i = 1, \dots$ και δεδομένο κάθε φορά s ($s = 1, \dots, k$) των πραγματοποιήσεων της τυχαίας μεταβλητής \mathbf{W}_j , παρουσιάζουν πολύ μικρούς συντελεστές αυτοσυσχέτισης γεγονός που οφείλεται στην βραχυπρόθεσμη μνήμη του μοντέλου MPAR(1) (βλέπε και ενότητα 2.5).

Στο Σχήμα 5.1 παρουσιάζονται τα αυτοσυσχετογράμματα των μηνών Οκτωβρίου και Ιουνίου της συνθετικής χρονοσειράς μηνιαίων υψών απορροής του Βοιωτικού Κηφισού που παρήχθη με χρήση του μοντέλου MPAR(1) και η οποία χρησιμοποιήθηκε στο παράδειγμα της ενότητας 2.5.



Σχήμα 5.1 Αυτοσυσχετογράμματα των μηνών Οκτωβρίου και Ιουνίου της συνθετικής χρονοσειράς απορροών που παρήχθη με χρήση μοντέλου MPAR(1)

Όπως είναι φανερό, οι προκύπτοντες συντελεστές αυτοσυσχέτισης των μηνών για διάφορα βήματα χρονικής μετατόπισης είναι πάρα πολύ μικροί, με αποτέλεσμα οι χρονοσειρές των συνθετικών πραγματοποιήσεων του εκάστοτε μήνα να μπορούν να χαρακτηρισθούν με αρκετά μεγάλη ακρίβεια ως χρονοσειρές λευκού θορύβου.

Εξιιώσεις μοντέλου

Ορίζοντας k τον αριθμό των εποχών του έτους¹, s ($s = 1, \dots, k$) τον αύξοντα αριθμό της εποχής αναφοράς² και l ($l = 1, \dots, n$) την εκάστοτε θέση ενδιαφέροντος, μπορούμε να ορίσουμε τις στοχαστικές ανελίξεις $X_{(i-1)k+s}^l$ που για σταθερό κάθε φορά s ($s = 1, \dots, k$) και $i = 1, \dots$ είναι στάσιμες.

Ακολουθώς ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή Z_i^l που προκύπτει ως άθροισμα k διαδοχικών μεταβλητών X_i^l ,

$$Z_i^l = \sum_{j=(i-1)k+1}^{ik} X_j^l \quad (5.7)$$

Η στοχαστική ανελίξη Z_i^l είναι στάσιμη, γεγονός που οφείλεται στο ότι κάθε τυχαία μεταβλητή Z_i^l προκύπτει ως άθροισμα των k διαδοχικών τυχαίων μεταβλητών X_i^l μίας περιόδου. Κατά αυτόν τον τρόπο, η κυκλοστασιμότητα της μεταβλητής X_i^l απαλείφεται μέσω της πραγματοποιούμενης εποχιακής συναθροίσεως.

Τροποποιώντας ελαφρά την (5.7) οδηγούμαστε στην σχέση,

$$Z_i^l = \sum_{s=1}^k X_{(i-1)k+s}^l \quad (5.8)$$

της οποίας το δεύτερο μέλος εκφράζει την στοχαστική ανελίξη Z_i^l ως άθροισμα k στάσιμων στοχαστικών ανελίξεων $X_{(i-1)k+s}^l$.

Εκμεταλλευόμενοι την (5.8) σε συνδυασμό με την ιδιότητα 1, είναι δυνατόν να επιτύχουμε αναπαραγωγή του συντελεστή Hurst της στοχαστικής ανελίξης Z_i^l αν εξασφαλίσουμε ότι οι στάσιμες στοχαστικές ανελίξεις $X_{(i-1)k+s}^l$ για δεδομένο s ($s = 1, \dots, k$) και $i = 1, \dots$ έχουν τον ίδιο συντελεστή Hurst με την στοχαστική ανελίξη Z_i^l . Κάτι τέτοιο μπορεί εύκολα να επιτευχθεί με την εφαρμογή του μοντέλου SMA υπό τη μορφή

¹ π.χ. $k = 12$ για μηνιαία κλίμακα.

² π.χ. με 1 συμβολίζουμε τον Οκτώβριο.

φίλτρου πάνω στις στάσιμες στοχαστικές ανελίξεις $W^l_{(i-1)k+s}$, που προκύπτουν από ένα μοντέλο MPAR(1) της μορφής (5.6), και οι οποίες σύμφωνα με την ιδιότητα 2 είναι πρακτικά ασυσχέτιστες ως προς διαφορετικές περιόδους i . Το προαναφερθέν φίλτρο έχει την μορφή,

$$X^l_{(i-1)k+s} = \sum_{j=-q}^q \alpha^l_{|j|} W^l_{(i+j-1)k+s} \quad \text{για } s = 1, \dots, k, \quad l=1, 2, \dots, n \quad (5.9)$$

όπου α^l_j ($j = 0, 1, \dots, q$) οι παράμετροι του μοντέλου SMA για την θέση l ($l=1, 2, \dots, n$).

Στην συνέχεια γίνεται η παραδοχή ότι οι μεταβλητές $X^l_{(i-1)k+s}$ ($s = 1, \dots, k, \quad l=1, 2, \dots, n$) και $W^l_{(i+j-1)k+s}$ ($s = 1, \dots, k, \quad l=1, 2, \dots, n$) έχουν μέση τιμή μηδέν και διασπορά ίση με την μονάδα, δηλαδή

$$E[X^l_{(i-1)k+s}] = 0 \quad \text{για } s = 1, \dots, k, \quad l=1, 2, \dots, n \quad (5.10)$$

$$\text{Var}[X^l_{(i-1)k+s}] = 1 \quad \text{για } s = 1, \dots, k, \quad l=1, 2, \dots, n \quad (5.11)$$

Επισημαίνεται, ότι η παραπάνω θεώρηση δεν δημιουργεί πρόβλημα στην συνθετική αναπαραγωγή των μέσων τιμών και των τυπικών αποκλίσεων των εποχών (μηνών) s ($s = 1, \dots, k$) των θέσεων ενδιαφέροντος l ($l=1, 2, \dots, n$), αφού με εφαρμογή του γραμμικού μετασχηματισμού

$$Y^l_{(i-1)k+s} = \sigma^l_s X^l_{(i-1)k+s} + \mu^l_s \quad \text{για } s = 1, \dots, k, \quad l=1, 2, \dots, n \quad (5.12)$$

μπορούμε να αναπαράγουμε τις μέσες τιμές και τις τυπικές αποκλίσεις των εποχών s ($s = 1, \dots, k$), καθώς και τις μέσες τιμές του έτους της κάθε θέσεως ενδιαφέροντος l ($l=1, 2, \dots, n$). Με μ^l_s συμβολίζεται η μέση τιμή της εποχής s ($s = 1, \dots, k$) στην θέση ενδιαφέροντος l ($l=1, 2, \dots, n$) και με σ^l_s η τυπική απόκλιση της εποχής s ($s = 1, \dots, k$) στην θέση ενδιαφέροντος l ($l=1, 2, \dots, n$).

Στην περίπτωση που ισχύει η (5.11) είναι προφανές ότι οι παράμετροι α^l_j ($j = 0, 1, \dots, q$) κάθε θέσεως l ($l=1, 2, \dots, n$) πρέπει να ικανοποιούν την σχέση,

$$\sum_{j=-q}^q (\alpha^l_{|j|})^2 = 1 \quad \text{για } l=1, 2, \dots, n \quad (5.13)$$

Ο προσδιορισμός των παραμέτρων α_j^l ($j = 0, 1, \dots, q$) της κάθε θέσεως l ($l = 1, 2, \dots, n$) μπορεί να πραγματοποιηθεί είτε με χρήση του φάσματος $s_\rho^l(\omega)$ των επιθυμητών συντελεστών αυτοσυσχέτισης ρ_j^l ($j = 0, 1, \dots, q$) της μεταβλητής Z_i^l από τις εξισώσεις (βλέπε και ενότητα 2.7),

$$s_\rho^l(\omega) := 2 + 4 \sum_{j=1}^q \rho_j^l \cos(2\pi j\omega) = 2 \sum_{j=-q}^q \rho_j^l \cos(2\pi j\omega) \quad , \quad \omega \in [0, 1/2] \quad \text{και} \quad l = 1, 2, \dots, n \quad (5.14)$$

$$s_a^l(\omega) = \sqrt{2 s_\rho^l(\omega)} \quad \text{για} \quad l = 1, 2, \dots, n \quad (5.15)$$

$$\alpha_j^l = \int_0^{1/2} s_a^l(\omega) \cos(2\pi j\omega) d\omega \quad \text{για} \quad j = 0, 1, 2, \dots, q \quad \text{και} \quad l = 1, 2, \dots, n \quad (5.16)$$

είτε συναρτήσει του συντελεστή Hurst H_l της ετήσιας ιστορικής χρονοσειράς της θέσεως l ($l = 1, \dots, n$) με χρήση των εξισώσεων (βλέπε και ενότητα 2.7),

$$\alpha_0 = \frac{\sqrt{(2 - 2H_l)}}{1.5 - H_l} \quad , \quad \alpha_j = \frac{\alpha_0}{2} [(j + 1)^{H_l + 0.5} + (j - 1)^{H_l + 0.5} - 2j^{H_l + 0.5}] \quad \text{για} \quad j > 0 \quad (5.17)$$

Έχοντας προσδιορίσει τις παραμέτρους του φίλτρου SMA, απομένει να ορίσουμε τα στατιστικά χαρακτηριστικά της τυχαίας διανυσματικής μεταβλητής $\mathbf{W}_j = [W_j^1, W_j^2, \dots, W_j^n]^T$ που περιγράφεται από το μοντέλο MPAR(1) της σχέσεως,

$$\mathbf{W}_j = \mathbf{a}_j \mathbf{W}_{j-1} + \mathbf{b}_j \mathbf{V}_j \quad (5.18)$$

Ορίζουμε ως $\mathbf{c}_j = \text{Cov}[\mathbf{X}_j, \mathbf{X}_j]$ και $\mathbf{d}_j = \text{Cov}[\mathbf{W}_j, \mathbf{W}_j]$ τους πίνακες των διασπορών-συνδιασπορών των τυχαίων διανυσματικών μεταβλητών \mathbf{X}_j και \mathbf{W}_j αντίστοιχα, τα στοιχεία των οποίων δίδονται από τις σχέσεις

$$c_j^{l,f} = \text{Cov}[X_j^l, X_j^f] \quad \text{για} \quad l, f = 1, \dots, n \quad , \quad j = 1, \dots, k \quad (5.19)$$

$$d_j^{l,f} = \text{Cov}[W_j^l, W_j^f] \quad \text{για} \quad l, f = 1, \dots, n \quad , \quad j = 1, \dots, k \quad (5.20)$$

και $\mathbf{g}_j = \text{Cov}[\mathbf{X}_j, \mathbf{X}_{j-1}]$, $\mathbf{h}_j = \text{Cov}[\mathbf{W}_j, \mathbf{W}_{j-1}]$ τους πίνακες των συνδιασπορών για μοναδιαίο βήμα χρονικής μετατόπισης των τυχαίων διανυσματικών μεταβλητών \mathbf{X}_j και \mathbf{W}_j αντίστοιχα, τα στοιχεία των οποίων δίδονται από τις σχέσεις

$$g_j^{l,f} = \text{Cov}[X_j^l, X_{j-1}^f] \quad \text{για } l, f = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, k \quad (5.21)$$

$$h_j^{l,f} = \text{Cov}[W_j^l, W_{j-1}^f] \quad \text{για } l, f = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, k \quad (5.22)$$

Κατόπιν αλγεβρικών υπολογισμών καταλήγουμε στις σχέσεις,

$$d_j^{l,f} = \frac{c_j^{l,f}}{\sum_{r=-q}^q \alpha_{|r|}^l \alpha_{|r|}^f} \quad \text{για } l, f = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, k \quad (5.23)$$

$$h_j^{l,f} = \frac{g_j^{l,f}}{\sum_{r=-q}^q \alpha_{|r|}^l \alpha_{|r|}^f} \quad \text{για } l, f = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, k \quad (5.24)$$

από τις οποίες μπορούμε να προσδιορίσουμε τα στοιχεία των πινάκων \mathbf{d}_j και \mathbf{h}_j συναρτήσει των στοιχείων των πινάκων \mathbf{c}_j και \mathbf{g}_j .

Το διάνυσμα των συντελεστών ασυμμετρίας $\xi_{w_j} = [\xi_{w_j}^1, \xi_{w_j}^2, \dots, \xi_{w_j}^n]^T$ ($j = 1, \dots, k$) της τυχαίας διανυσματικής μεταβλητής $\mathbf{W}_j = [W_j^1, W_j^2, \dots, W_j^n]^T$, είναι δυνατόν να προσδιοριστεί ως συνάρτηση του διανύσματος ασυμμετρίας $\xi_{x_j} = [\xi_{x_j}^1, \xi_{x_j}^2, \dots, \xi_{x_j}^n]^T$ ($j = 1, \dots, k$) της τυχαίας διανυσματικής μεταβλητής $\mathbf{X}_j = [X_j^1, X_j^2, \dots, X_j^n]^T$ με χρήση του αναδρομικού τύπου,

$$\xi_{w_j}^l = \frac{\xi_{x_j}^l}{\sum_{r=-q}^q (\alpha_{|r|}^l)^3} \quad \text{για } l = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, k \quad (5.25)$$

Σύμφωνα με όσα μέχρι στιγμής αναφέρθηκαν, το μοντέλο (5.18) έχει οριστεί πλήρως και περιγράφεται από τις σχέσεις,

$$\mathbf{a}_j = \mathbf{h}_j \{\mathbf{d}_{j-1}\}^{-1} \quad \text{για } j = 1, \dots, k \quad (5.26)$$

$$\mathbf{b}_j(\mathbf{b}_j)^T = \mathbf{d}_j - \mathbf{a}_j \mathbf{d}_{j-1} (\mathbf{a}_j)^T \quad \text{για } j = 1, \dots, k \quad (5.27)$$

$$E[\mathbf{V}_j] = \mathbf{0} \quad \text{για } j = 1, \dots, k \quad (5.28)$$

$$\text{Var}[\mathbf{V}_j] = [\mathbf{1}, \dots, \mathbf{1}]^T \quad \text{για } j = 1, \dots, k \quad (5.29)$$

$$\xi_{vj} = \mu_3[\mathbf{V}_j] = (\mathbf{b}_j^{(3)})^{-1} \{ \xi_{wj} - \mu_3[\mathbf{a}_j \mathbf{W}_{j-1}] \} \quad \text{για } j = 1, \dots, k \quad (5.30)$$

Με τον άνω δείκτη T συμβολίζεται το ανάστροφο ενός μητρώου, με \mathbf{b}_j^{-1} το αντίστροφο του μητρώου \mathbf{b}_j και με $\mathbf{b}_j^{(3)}$ το μητρώο που έχει ως στοιχεία τους κύβους των στοιχείων του μητρώου \mathbf{b}_j . Για τον υπολογισμό του μητρώου \mathbf{b}_j από την (5.27) απαιτείται η επίλυση του προβλήματος της ευρέσεως της τετραγωνικής ρίζας πίνακα, το οποίο αναλύεται στο εδάφιο 3.1.5.

Χαρακτηριστικά μοντέλου MPARSMAF

Με χρήση λοιπόν του μοντέλου MPAR(1) (5.18), σε συνδυασμό με το φίλτρο SMA (5.9) και με χρήση του γραμμικού μετασχηματισμού (5.12), επιτυγχάνουμε:

- την αναπαραγωγή των k σε αριθμό (όπου k η βασική περίοδος της ανεξίτητης) εποχιακών (μηνιαίων) μέσων τιμών των συσχετισμένων ιστορικών χρονοσειρών των θέσεων ενδιαφέροντος l ($l = 1, \dots, n$),
- την αναπαραγωγή των k σε αριθμό (όπου k η βασική περίοδος της ανεξίτητης) εποχιακών (μηνιαίων) τυπικών αποκλίσεων των συσχετισμένων ιστορικών χρονοσειρών των θέσεων ενδιαφέροντος l ($l = 1, \dots, n$),
- την αναπαραγωγή των k σε αριθμό (όπου k η βασική περίοδος της ανεξίτητης) εποχιακών (μηνιαίων) συντελεστών ασυμμετρίας των συσχετισμένων ιστορικών χρονοσειρών των θέσεων ενδιαφέροντος l ($l = 1, \dots, n$),
- την αναπαραγωγή των συντελεστών αυτοσυσχέτισης κάθε θέσεως ενδιαφέροντος l ($l = 1, \dots, n$) έως και για μοναδιαίο βήμα χρονικής μετατόπισης,
- την αναπαραγωγή των συντελεστών ετεροσυσχέτισης κάθε θέσεως ενδιαφέροντος l ($l = 1, \dots, n$) με όλες τις υπόλοιπες θέσεις ενδιαφέροντος έως και για μοναδιαίο βήμα χρονικής μετατόπισης,

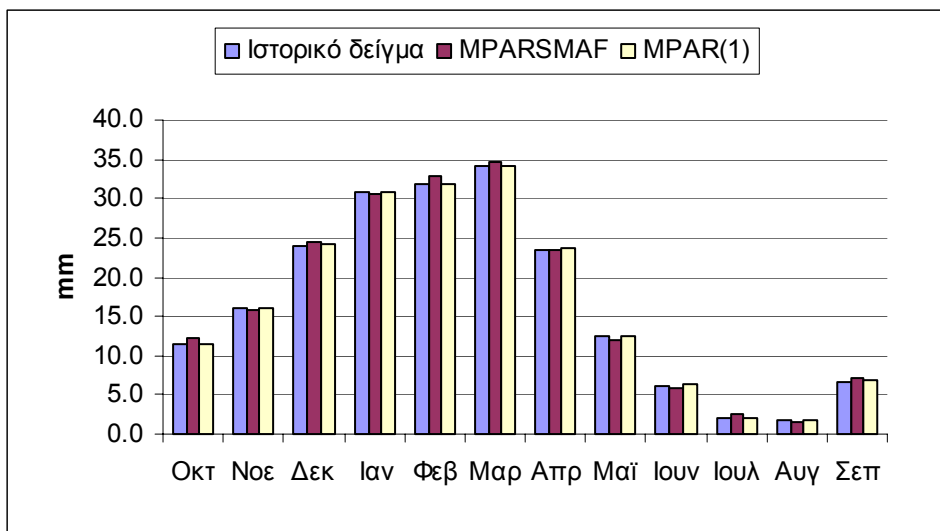
- την αναπαραγωγή των μέσων τιμών των ετήσιων ιστορικών χρονοσειρών των θέσεων ενδιαφέροντος l ($l = 1, \dots, n$),
- την αναπαραγωγή της μακροπρόθεσμης εμμονής της ετήσιας ιστορικής χρονοσειράς κάθε θέσεως ενδιαφέροντος l ($l = 1, \dots, n$) βάσει κάποιου θεωρητικού αυτοσυσχετογράμματος (π.χ. FGN).

5.2 Εφαρμογή και έλεγχος του μοντέλου

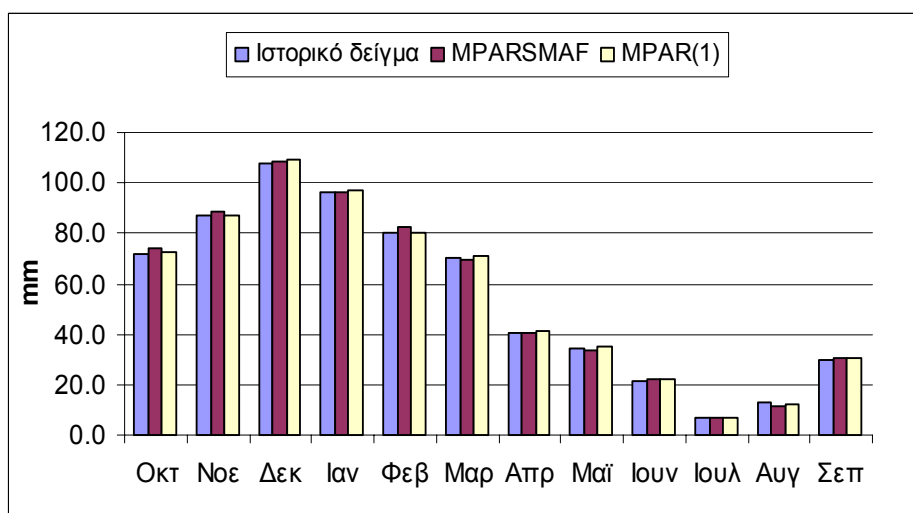
Στην συνέχεια παρατίθενται τα διαγράμματα σύγκρισης των στατιστικών χαρακτηριστικών δύο συσχετισμένων ιστορικών χρονοσειρών με τα στατιστικά χαρακτηριστικά των συσχετισμένων συνθετικών χρονοσειρών που παρήχθησαν με χρήση των μοντέλων MPARSMAF και MPAR(1) για δύο θέσεις ενδιαφέροντος (δύο μεταβλητές). Σκοπός μας είναι ο έλεγχος του μοντέλου MPARSMAF, καθώς και η σύγκρισή του με το απλό μοντέλο MPAR(1). Οι συσχετισμένες ιστορικές χρονοσειρές που χρησιμοποιήθηκαν είναι: (1) η ιστορική χρονοσειρά μηνιαίων υψών απορροής του Βοιωτικού Κηφισού στην θέση εξόδου του στην διώρυγα Καρδίτσας³ (θέση 1) και (2) η ιστορική χρονοσειρά μηνιαίων υψών σημειακής βροχοπτώσεως στον σταθμό Αλιάρτου (θέση 2). Για την εφαρμογή και τον έλεγχο του μοντέλου MPARSMAF στη συνθετική αναπαραγωγή των βραχυπρόθεσμων και μακροπρόθεσμων στατιστικών χαρακτηριστικών συσχετισμένων κυκλοστάσιμων ιστορικών χρονοσειρών, αναπτύχθηκε πρόγραμμα που παρατίθεται στο παράρτημα Ε. Το πρόγραμμα του μοντέλου MPAR(1) που αναπτύχθηκε στα πλαίσια του παραδείγματος της ενότητας 2.5, παρατίθεται στο παράρτημα Δ. Επισημαίνεται ότι τα στατιστικά χαρακτηριστικά των συνθετικών χρονοσειρών έχουν προέλθει από στοχαστική προσομοίωση μήκους 5000 ετών.

Στα Σχήματα 5.2, 5.3, 5.4, 5.5, 5.6 και 5.7 μπορούμε να παρατηρήσουμε την επιτυχή αναπαραγωγή των μέσων τιμών, των τυπικών αποκλίσεων και των συντελεστών ασυμμετρίας των μηνών των δύο θέσεων ενδιαφέροντος τόσο από το μοντέλο MPAR(1) όσο και από το μοντέλο MPARSMAF.

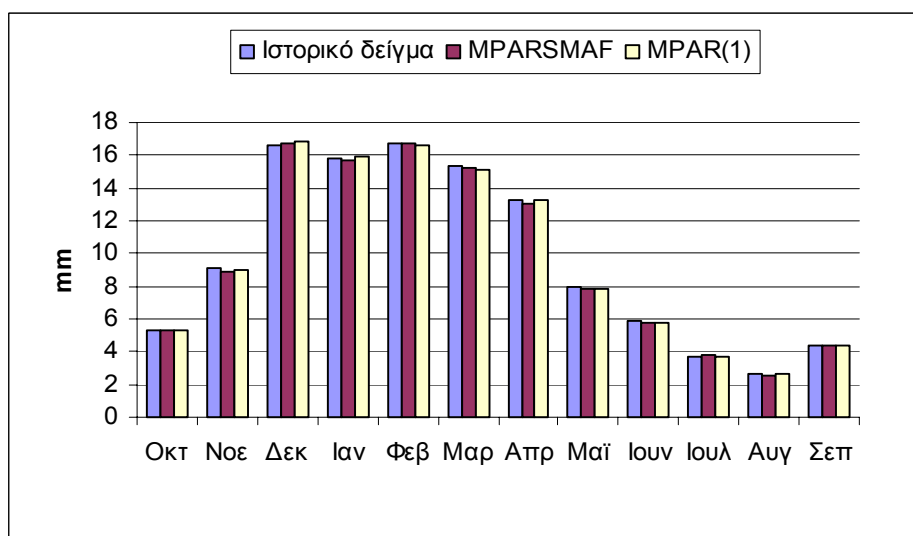
³ για περισσότερες πληροφορίες βλέπε ενότητα 4.2



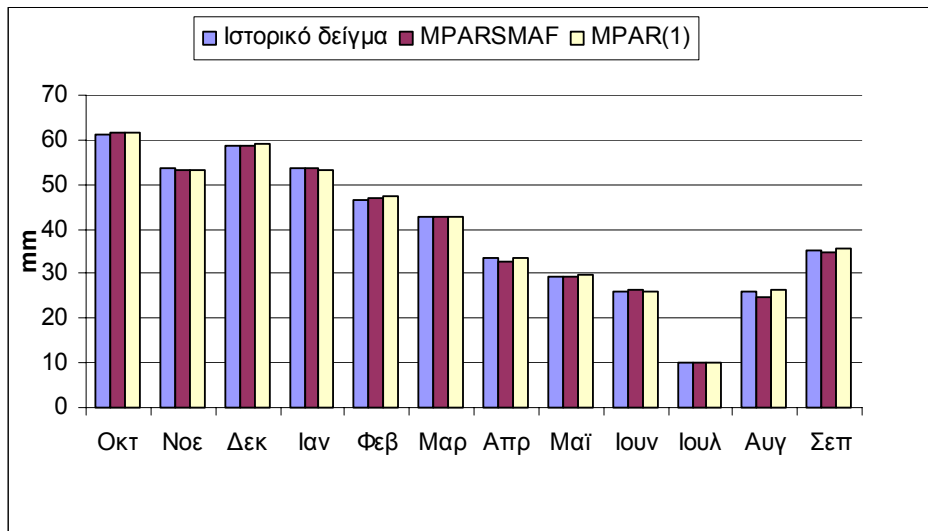
Σχήμα 5.2 Ραβδόγραμμα σύγκρισης των μηνιαίων μέσων τιμών του ιστορικού και του συνθετικού δείγματος απορροών



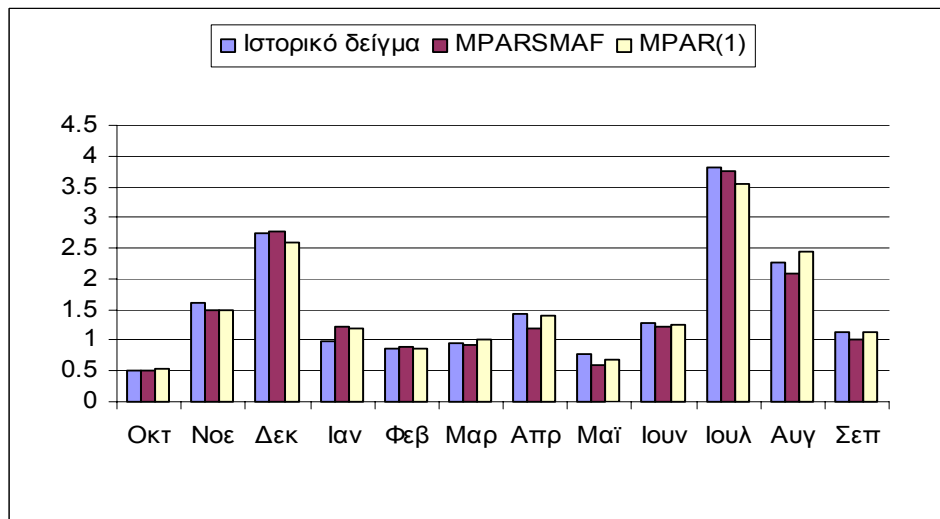
Σχήμα 5.3 Ραβδόγραμμα σύγκρισης των μηνιαίων μέσων τιμών του ιστορικού και του συνθετικού δείγματος βροχοπτώσεων



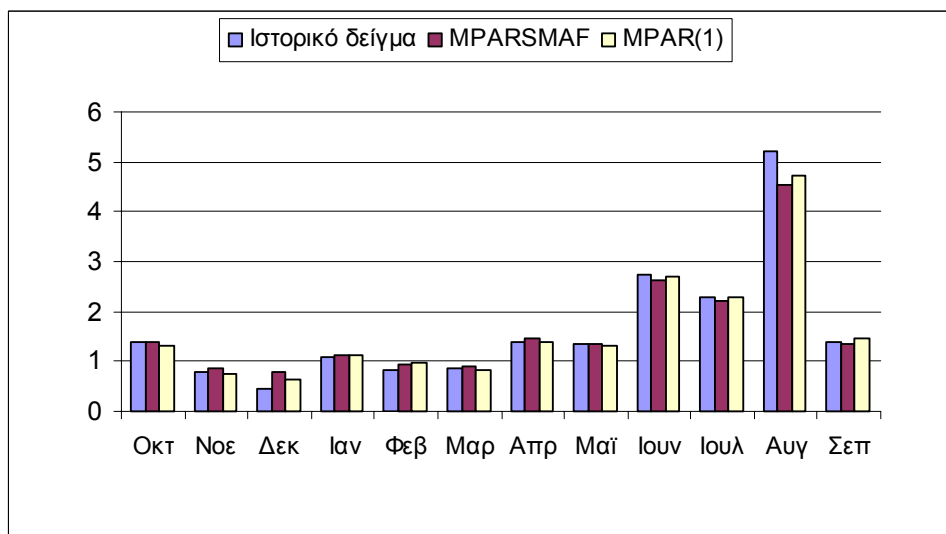
Σχήμα 5.4 Ραβδόγραμμα σύγκρισης των μηνιαίων τυπικών αποκλίσεων του ιστορικού και του συνθετικού δείγματος απορροών



Σχήμα 5.5 Ραβδόγραμμα σύγκρισης των μηνιαίων τυπικών αποκλίσεων του ιστορικού και του συνθετικού δείγματος βροχοπτώσεων

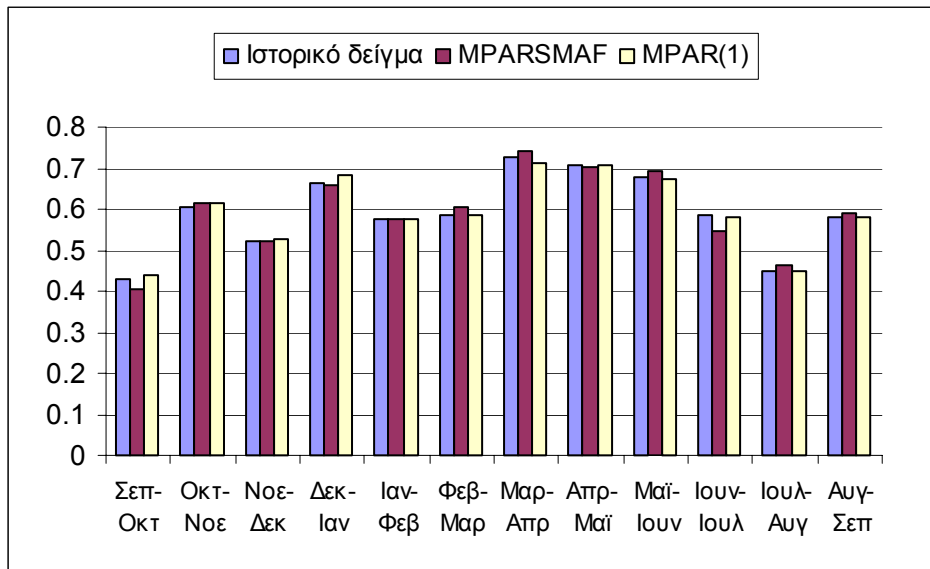


Σχήμα 5.6 Ραβδόγραμμα σύγκρισης των μηνιαίων συντελεστών ασυμμετρίας του ιστορικού και του συνθετικού δείγματος απορροών

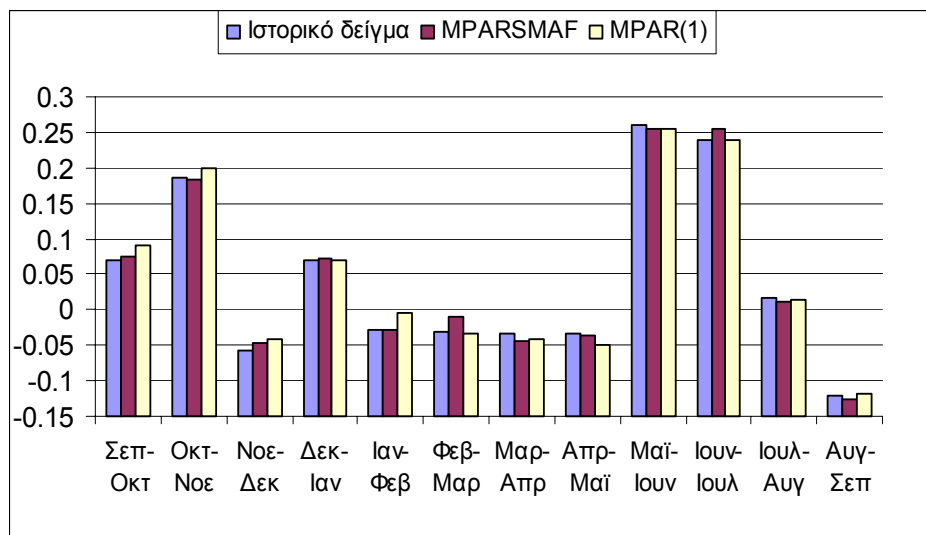


Σχήμα 5.7 Ραβδόγραμμα σύγκρισης των μηνιαίων συντελεστών ασυμμετρίας του ιστορικού και του συνθετικού δείγματος βροχοπτώσεων

Στα Σχήματα 5.8 και 5.9 παρουσιάζονται τα διαγράμματα σύγκρισης των συντελεστών αυτοσυσχέτισης της κάθε θέσεως ενδιαφέροντος για μοναδιαίο βήμα χρονικής μετατόπισης, τόσο για το ιστορικό όσο και για το συνθετικό δείγμα. Όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε τόσο το μοντέλο MPARSMAF όσο και το μοντέλο MPAR(1) αναπαράγουν αξιόπιστα τα εν λόγω στατιστικά χαρακτηριστικά του ιστορικού δείγματος.

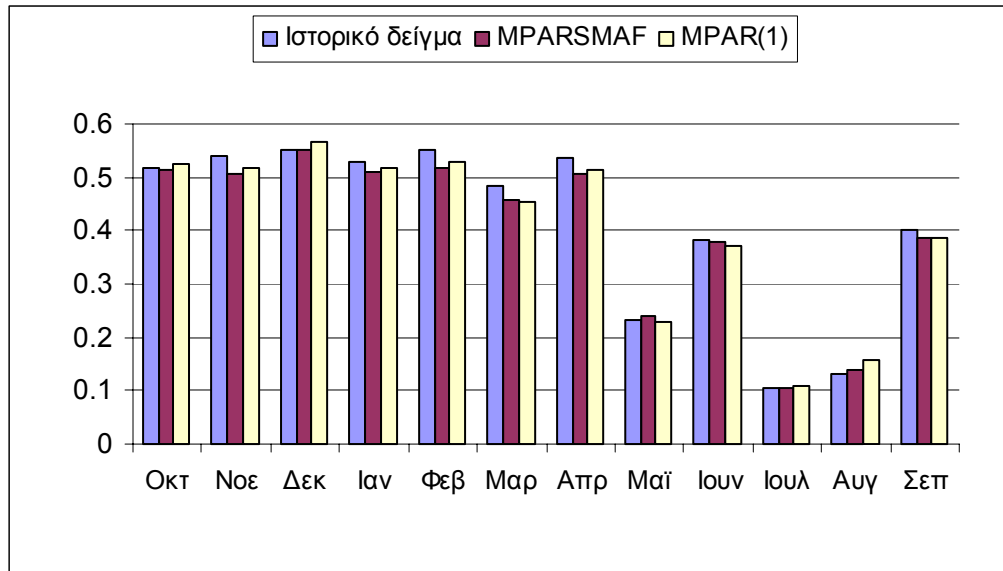


Σχήμα 5.8 Ραβδόγραμμα σύγκρισης των συντελεστών συσχέτισης για μοναδιαίο βήμα χρονικής μετατόπισης, των μηνών του ιστορικού και του συνθετικού δείγματος απορροών (συντελεστές συσχέτισης των απορροών ενός μήνα με τις απορροές του προηγούμενου μήνα)

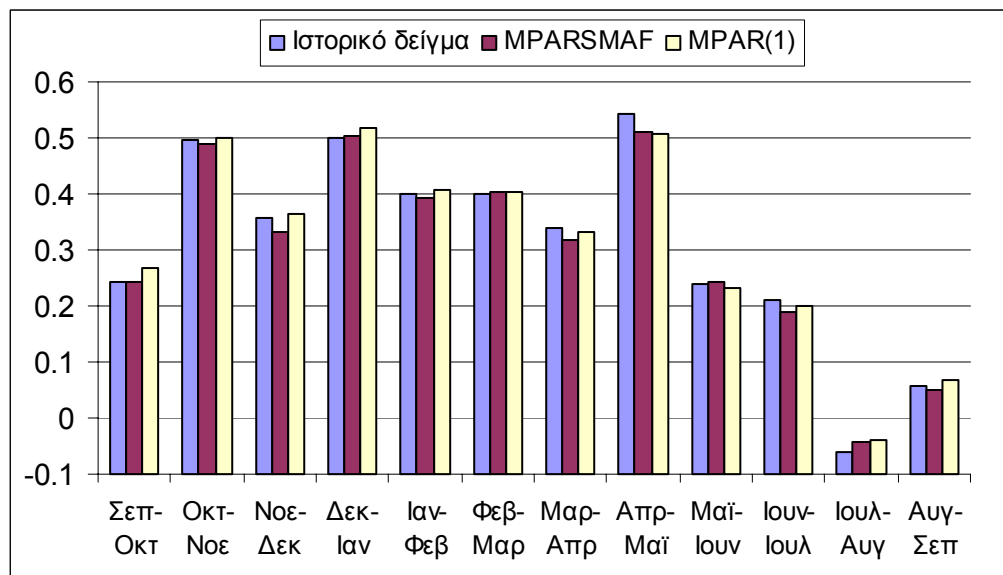


Σχήμα 5.9 Ραβδόγραμμα σύγκρισης των συντελεστών συσχέτισης για μοναδιαίο βήμα χρονικής μετατόπισης, των μηνών του ιστορικού και του συνθετικού δείγματος βροχοπτώσεων (συντελεστές συσχέτισης των βροχοπτώσεων ενός μήνα με τις βροχοπτώσεις του προηγούμενου μήνα)

Στα Σχήματα 5.10 και 5.11 παρουσιάζονται τα διαγράμματα σύγκρισης των συντελεστών ετεροσυσχέτισης μεταξύ των θέσεων ενδιαφέροντος για μηδενικό και μοναδιαίο βήμα χρονικής μετατόπισης, τόσο για το ιστορικό όσο και για το συνθετικό δείγμα. Όπως διαπιστώνεται, η αναπαραγωγή που επιτυγχάνουν τόσο το μοντέλο MPARSMAF όσο και το μοντέλο MPAR(1) είναι ιδιαίτερα ακριβής.



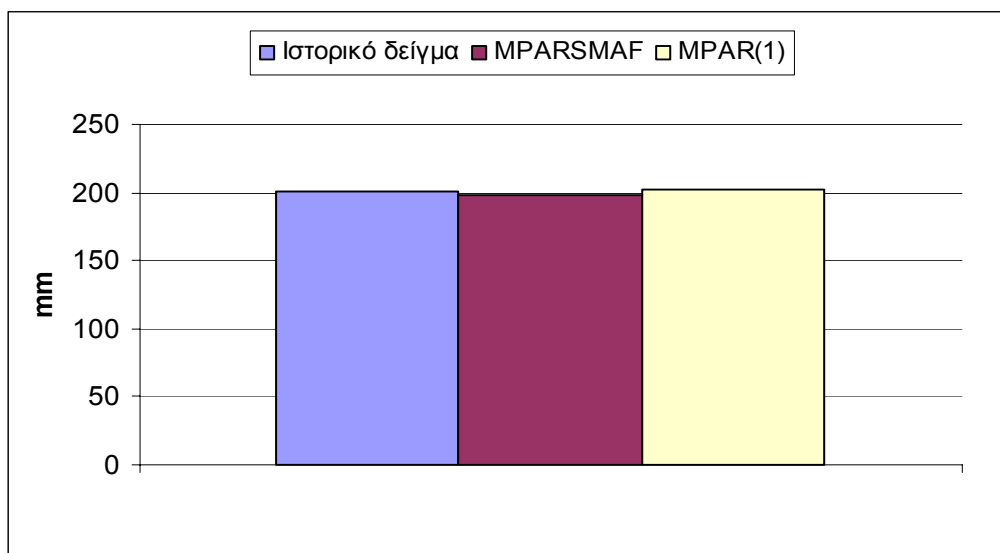
Σχήμα 5.10 Ραβδόγραμμα σύγκρισης των συντελεστών ετεροσυσχέτισης για μηδενικό βήμα χρονικής μετατόπισης των μηνών του ιστορικού και του συνθετικού δείγματος (συντελεστές ετεροσυσχέτισης των απορροών ενός μήνα με τις βροχοπτώσεις του ίδιου μήνα)



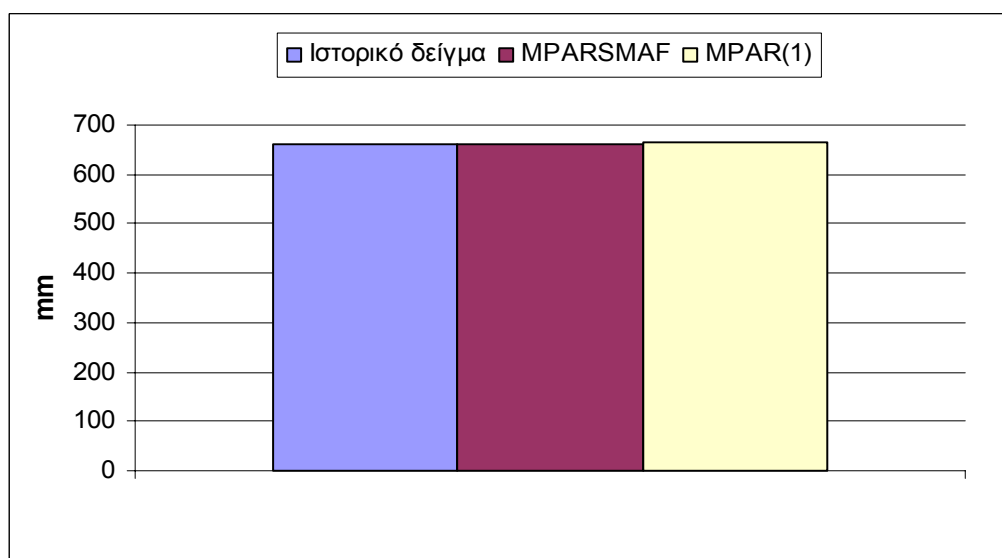
Σχήμα 5.11 Ραβδόγραμμα σύγκρισης των συντελεστών ετεροσυσχέτισης για μοναδιαίο βήμα χρονικής μετατόπισης των μηνών του ιστορικού και του συνθετικού δείγματος (συντελεστές ετεροσυσχέτισης των απορροών ενός μήνα με τις βροχοπτώσεις του προηγούμενου μήνα)

Στη συνέχεια παρατίθενται τα διαγράμματα σύγκρισης των μέσων τιμών, τυπικών αποκλίσεων και συντελεστών ασυμμετρίας των ετήσιων ιστορικών και συνθετικών

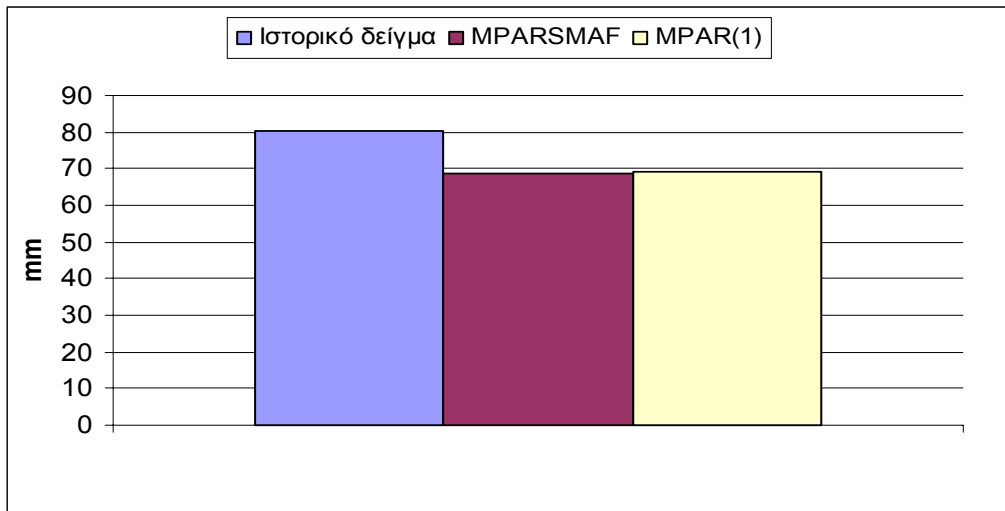
χρονοσειρών (Σχήματα 5.12, 5.13, 5.14, 5.15, 5.16 και 5.17). Αξίζει να παρατηρήσουμε (Σχήματα 5.12 και 5.13), ότι η γραμμικότητα της εκτιμήτριας της μέσης τιμής επιτρέπει την αξιόπιστη αναπαραγωγή των μέσων τιμών των ετήσιων χρονοσειρών, με μόνη μέριμνα την διατήρηση των μέσων τιμών των μηνών της εκάστοτε θέσεως.



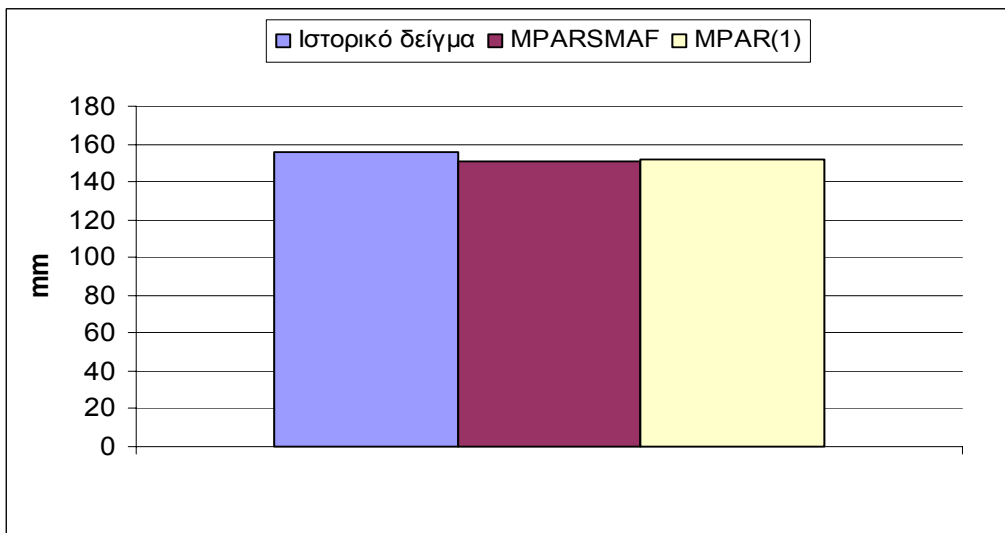
Σχήμα 5.12 Ραβδόγραμμα σύγκρισης των ετήσιων μέσων τιμών του ιστορικού και του συνθετικού δείγματος απορροών



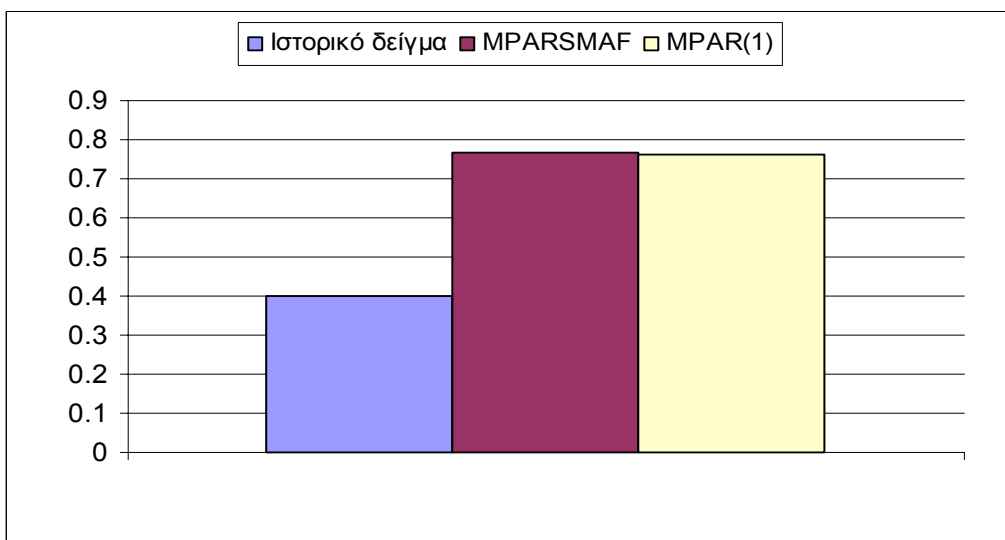
Σχήμα 5.13 Ραβδόγραμμα σύγκρισης των ετήσιων μέσων τιμών του ιστορικού και του συνθετικού δείγματος βροχοπτώσεων



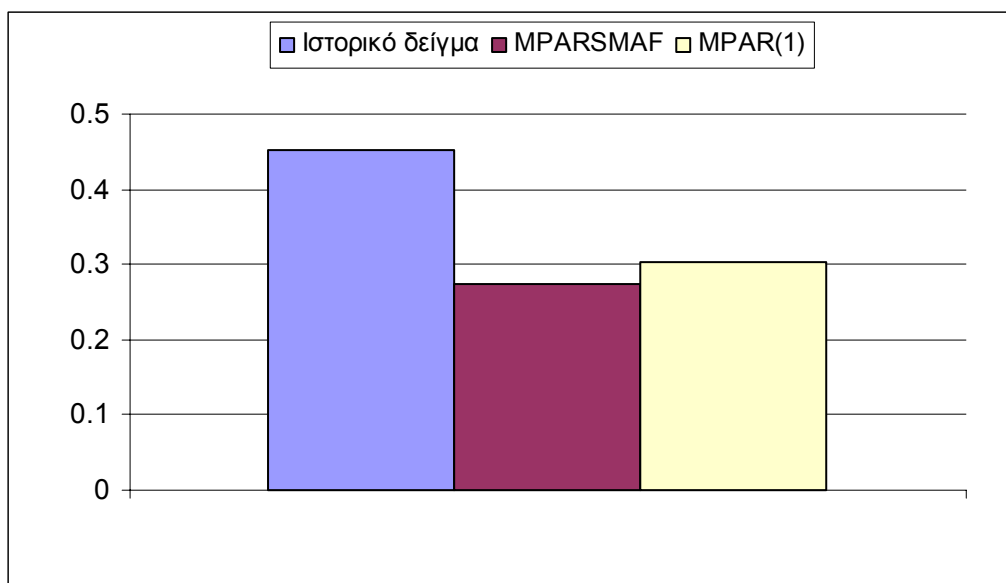
Σχήμα 5.14 Ραβδόγραμμα σύγκρισης των ετήσιων τυπικών αποκλίσεων του ιστορικού και του συνθετικού δείγματος απορροών



Σχήμα 5.15 Ραβδόγραμμα σύγκρισης των ετήσιων τυπικών αποκλίσεων του ιστορικού και του συνθετικού δείγματος βροχοπτώσεων



Σχήμα 5.16 Ραβδόγραμμα σύγκρισης των ετήσιων συντελεστών ασυμμετρίας του ιστορικού και του συνθετικού δείγματος απορροών

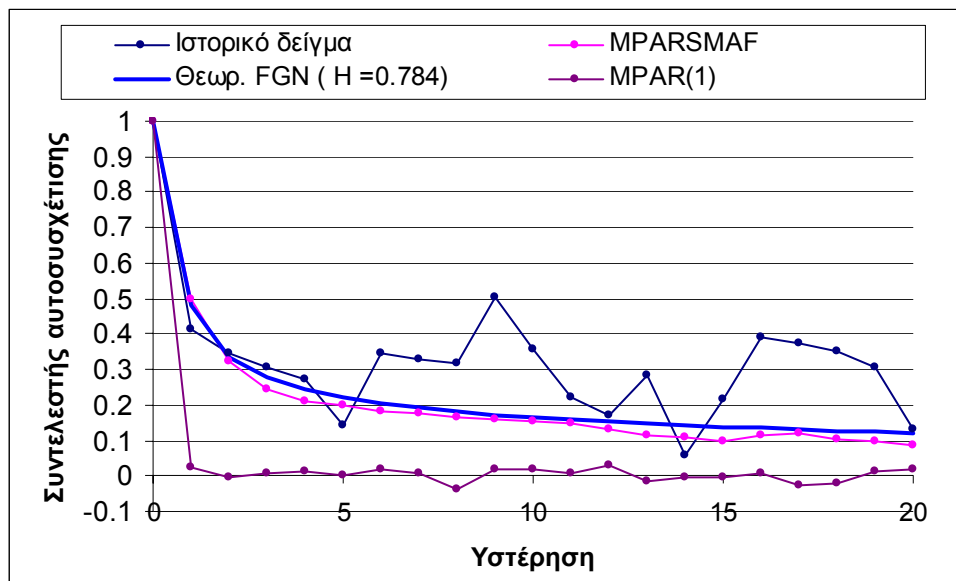


Σχήμα 5.17 Ραβδόγραμμα σύγκρισης των ετήσιων συντελεστών ασυμμετρίας του ιστορικού και του συνθετικού δείγματος βροχοπτώσεων

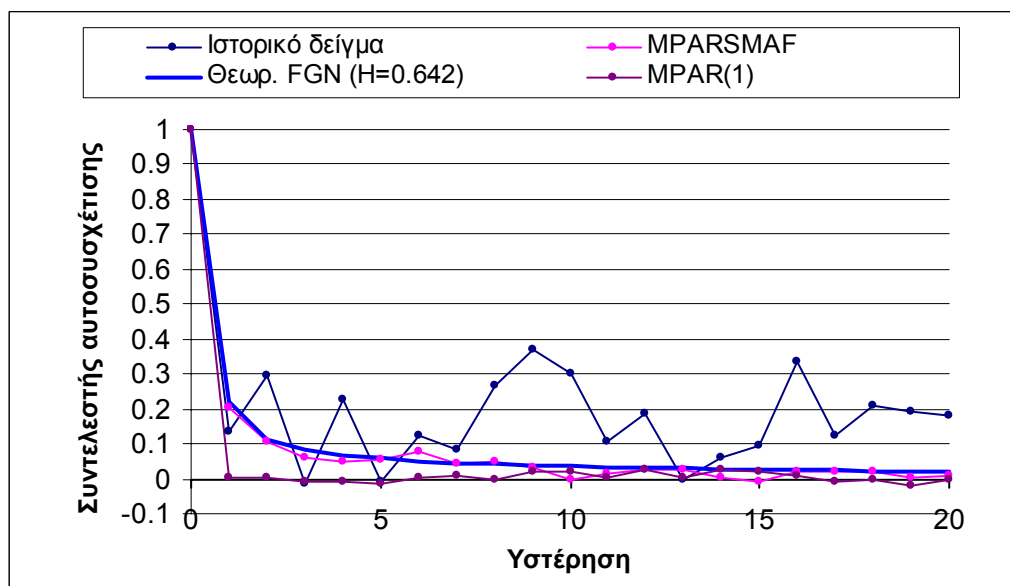
Αναφερόμενοι στα Σχήματα 5.14 και 5.15 αξίζει να παρατηρήσουμε ότι ακόμα και αν τα μοντέλα MPARSMAF και MPAR(1) «θεωρητικά» δεν μπορούν να διατηρήσουν τις τυπικές αποκλίσεις των ετήσιων χρονοσειρών των θέσεων, κατά την εφαρμογή τους επιτυγχάνεται μία αρκετά καλή προσέγγιση των εν λόγω στατιστικών μεγεθών. Το προαναφερθέν γεγονός οφείλεται στην διατήρηση των συσχετίσεων μεταξύ των μηνών κάθε θέσεως για μοναδιαίο βήμα χρονικής μετατόπισης. Βέβαια, για την αξιόπιστη αναπαραγωγή των ετήσιων τυπικών αποκλίσεων θα έπρεπε να εξασφαλίζεται η διατήρηση των συσχετίσεων μεταξύ των μηνών κάθε θέσεως έως και $12^{η}$ τάξεως βήμα χρονικής μετατόπισης, κάτι που είναι ιδιαίτερα δυσχερές. Το ανάλογο δεν θα μπορούσε να ειπωθεί για τους συντελεστές ασυμμετρίας των ετήσιων χρονοσειρών (Σχήματα 5.16 και 5.17), αφού μία τέτοια αναπαραγωγή θα απαιτούσε την διατήρηση των αναμενόμενων τιμών τρίτης τάξεως γινομένων που σε καμία περίπτωση δεν μπορεί να εξασφαλιστεί από απλά μοντέλα MPAR.

Στα Σχήματα 5.18 και 5.19 παρουσιάζονται τα διαγράμματα σύγκρισης των εμπειρικών αυτοσυσχετογραμμάτων των ετήσιων ιστορικών χρονοσειρών, με τα θεωρητικά αυτοσυσχετογράμματα FGN (όπως αυτά προκύπτουν συναρτήσει του συντελεστή Hurst της κάθε θέσεως) και με τα εμπειρικά αυτοσυσχετογράμματα των ετήσιων συνθετικών χρονοσειρών που προέκυψαν από την εφαρμογή των μοντέλων MPARSMAF και MPAR(1). Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε την επιτυχία του μοντέλου MPARSMAF στην διατήρηση της μακροπρόθεσμης εμμονής των ετήσιων

ιστορικών χρονοσειρών, σε αντίθεση με το μοντέλο MPAR(1) που δεν μπορεί να επιτύχει μία τέτοια αναπαραγωγή.



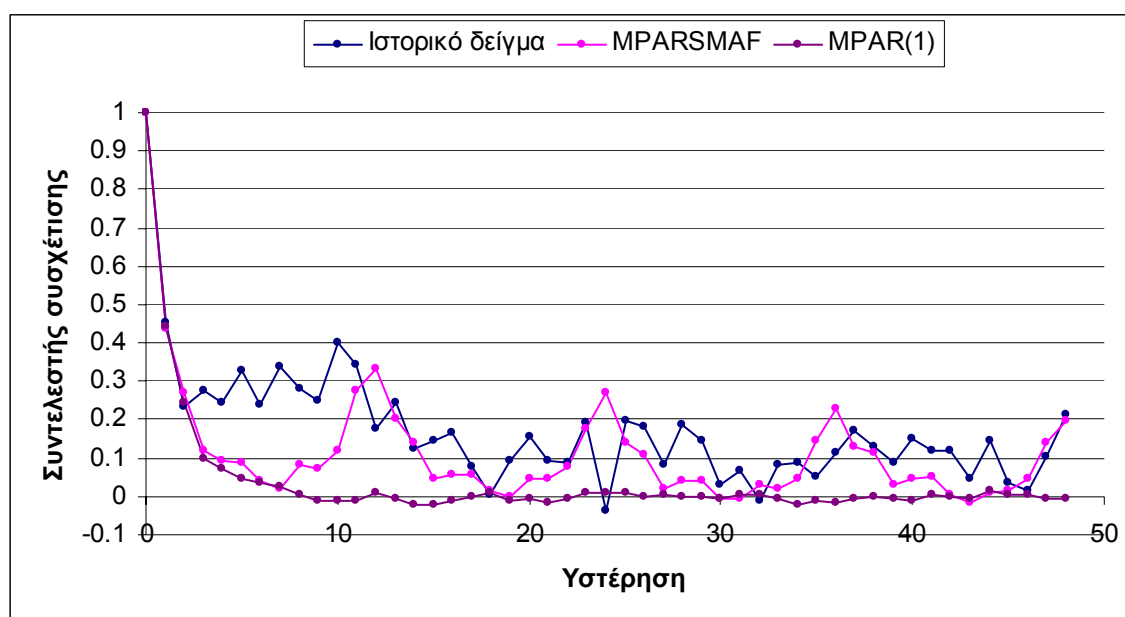
Σχήμα 5.18 Διάγραμμα σύγκρισης των συντελεστών αυτοσυσχέτισης για τα πρώτα 20 βήματα χρονικής μετατόπισης των ετήσιων ιστορικών και συνθετικών χρονοσειρών απορροών



Σχήμα 5.19 Διάγραμμα σύγκρισης των συντελεστών αυτοσυσχέτισης για τα πρώτα 20 βήματα χρονικής μετατόπισης των ετήσιων ιστορικών και συνθετικών χρονοσειρών βροχοπτώσεων

Αν και δεν είναι άμεσου ενδιαφέροντος, θα ήταν χρήσιμο να γνωρίζουμε τόσο για το ιστορικό όσο και για το συνθετικό δείγμα τη μορφή των διαγραμμάτων των συντελεστών συσχέτισης των μηνών της κάθε θέσεως με προηγούμενους μήνες της ίδιας θέσεως. Στο Σχήμα 5.20 παρουσιάζεται το διάγραμμα των συντελεστών συσχέτισης του μήνα Οκτωβρίου με προηγούμενους αυτού μήνες τόσο για την ιστορική όσο και για τις

συνθετικές χρονοσειρές απορροών, και στο οποίο είναι δυνατόν να παρατηρήσουμε την επιρροή του φίλτρου SMA πάνω στο μοντέλο MPAR(1).



Σχήμα 5.20 Διάγραμμα συντελεστών συσχέτισης του μήνα Οκτωβρίου με προηγούμενους αυτού μήνες, για την ιστορική και την συνθετική χρονοσειρά απορροών

Ως γνωστόν, η μικρής τάξεως μνήμη του μοντέλου MPAR(1) έχει ως αποτέλεσμα των μηδενισμό των συντελεστών συσχέτισης μεταξύ των μηνών ακόμα και για μικρά βήματα χρονικής μετατόπισης (lags). Με την εφαρμογή του φίλτρου SMA πάνω στις συνθετικές χρονοσειρές των μηνών που έχουν ήδη παραχθεί με το μοντέλο MPAR(1), πραγματοποιείται περιοδική (δωδεκάμηνη) ανύψωση του διαγράμματος των συντελεστών συσχέτισης μεταξύ των μηνών, η οποία εξασφαλίζει την διατήρηση της μακροπρόθεσμης εμμονής των ιστορικών χρονοσειρών σε ετήσια κλίμακα.

5.3 Σχόλια πάνω στο μοντέλο

Το βασικό πλεονέκτημα του μοντέλου MPARSMAF είναι ότι οι παράμετροι του εκτιμώνται αναλυτικά και άμεσα χωρίς να απαιτείται βελτιστοποίηση, κάτι που το καθιστά ιδιαίτερα γρήγορο στην παραγωγή συνθετικών χρονοσειρών σε μηνιαία κλίμακα ακόμη και στην περίπτωση που ο αριθμός των θέσεων (αριθμός μεταβλητών) είναι μεγάλος. Επιτυγχάνει αναπαραγωγή της κυκλοστασιμότητας και της βραχυπρόθεσμης μνήμης κατά τρόπο απλό, ενώ οι συντελεστές αυτοσυσχέτισης των ετήσιων συνθετικών

χρονοσειρών παραμένουν υψηλοί ακόμα και για μεγάλα βήματα χρονικής μετατόπισης (ανάλογα με τον χρησιμοποιούμενο αριθμό παραμέτρων του φίλτρου SMA⁴).

Τα μειονεκτήματα του υπό μελέτη μοντέλου θα μπορούσαν να συνοψιστούν στη μη διατήρηση των τυπικών αποκλίσεων⁵ και των συντελεστών ασυμμετρίας των ετήσιων χρονοσειρών, καθώς και στην ιδιάζουσα μορφή (δωδεκάμηνη περιοδικότητα) του διαγράμματος των συντελεστών συσχέτισης των μηνών της κάθε θέσεως με τους προηγούμενους μήνες της ίδιας θέσεως (Σχήμα 5.20).

Κάτι που πρέπει να προσεχθεί ιδιαίτερα κατά την εφαρμογή του μοντέλου MPARSMAF, έχει σχέση με τις συνθετικές χρονοσειρές των εποχών κάθε θέσεως που παράγονται με χρήση του μοντέλου MPAR(1) και οι οποίες πρέπει να παρουσιάζουν μικρούς συντελεστές αυτοσυσχέτισης ώστε να είναι δυνατή η εφαρμογή, χωρίς κάποιο συστηματικό σφάλμα, του φίλτρου SMA. Για να επιτευχθεί κάτι τέτοιο πρέπει ο αριθμός των εποχών k να είναι υψηλός και σίγουρα ίσος ή μεγαλύτερος του 4 ($k \geq 4$).

Πάντως, τα μειονεκτήματα του μοντέλου MPARSMAF μπορούν να θεωρηθούν σχετικά μικρής σημασίας αν λάβουμε υπ' όψιν την απλότητά του, την ταχύτητά του και την αξιοπιστία αναπαραγωγής της κυκλοστασιμότητας και της μακροπρόθεσμης εμμονής των ιστορικών χρονοσειρών.

⁴ Βλέπε και ενότητα 2.7.

⁵ Όπως είδαμε, κατά την εφαρμογή του μοντέλου επιτυγχάνεται μία ικανοποιητική προσέγγιση των τυπικών αποκλίσεων των ετήσιων χρονοσειρών (Σχήματα 5.14 και 5.15).

6 Ανάπτυξη μονομεταβλητού μοντέλου SMA με περιοδικά μεταβαλλόμενες παραμέτρους (PSMA)

Στις ενότητες 2.7 και 2.8, αναφερθήκαμε στην αναπαραγωγή της μακροπρόθεσμης εμμονής στάσιμων στοχαστικών ανελίξεων με χρήση του μοντέλου SMA (Symmetric Moving Average model). Κατά παρόμοιο τρόπο, θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ότι είναι δυνατόν να αναπαράγουμε την κυκλοστασιμότητα, την βραχυπρόθεσμη μνήμη και την μακροπρόθεσμη εμμονή κυκλοστάσιμων στοχαστικών ανελίξεων με την υιοθέτηση ενός μοντέλου συμμετρικά κινούμενου μέσου όρου με περιοδικά μεταβαλλόμενες παραμέτρους PSMA (Periodic Symmetric Moving Average model). Στην συνέχεια θα παρουσιαστεί, θα εφαρμοστεί και θα ελεγχθεί το μοντέλο PSMA που αναπτύχθηκε στα πλαίσια της παρούσας εργασίας.

6.1 Παρουσίαση μοντέλου

Έστω κυκλοστάσιμη στοχαστική ανέλιξη X_i με περίοδο k (ίση με τον αριθμό των εποχών του έτους), όπου i το χρονικό διάστημα αναφοράς. Αν s ($s = 1, \dots, k$) ο αύξων αριθμός της εποχής, τότε για σταθερό κάθε φορά s και $i = 1, 2, \dots$ η στοχαστική ανέλιξη $X_{(i-1)k+s}$ είναι στάσιμη και μπορεί κατ' αναλογία με το απλό μοντέλο SMA να περιγραφεί από την εξίσωση,

$$X_{(i-1)k+s} = \sum_{j=-q}^q \alpha^s_{|j|} V_{(i-1)k+j+s-1} \quad \text{για } s = 1, \dots, k \quad (6.1)$$

όπου α^s_j ($j = 0, \dots, q$) είναι οι παράμετροι του μοντέλου PSMA της εποχής s ($s = 1, \dots, k$) και V_i στάσιμη στοχαστική ανέλιξη με μηδενική συσχέτιση ως προς τον χρόνο i (δηλαδή $\text{Cov}[V_i, V_j] = 0$ για $i \neq j$) (μεταβλητή λευκού θορύβου).

Θεωρούμε, ότι οι τυχαίες μεταβλητές $X_{(i-1)k+s}$ και V_i έχουν μέση τιμή μηδέν, ήτοι

$$E[X_{(i-1)k+s}] = 0 \quad \text{για } s = 1, \dots, k \quad (6.2)$$

$$E[V_i] = 0 \quad (6.3)$$

Επισημαίνεται ότι η παραπάνω θεώρηση δεν δημιουργεί πρόβλημα στην συνθετική αναπαραγωγή των μέσων τιμών των εποχών s ($s = 1, \dots, k$), αφού με εφαρμογή του γραμμικού μετασχηματισμού

$$Y_{(i-1)k+s} = X_{(i-1)k+s} + \mu_s \quad \text{για } s = 1, \dots, k \quad (6.4)$$

μπορούμε να αναπαράγουμε τόσο τις εποχιακές μέσες τιμές μ_s ($s = 1, \dots, k$), όσο και την ετήσια μέση τιμή¹.

Γίνεται επίσης η παραδοχή ότι η τυχαία μεταβλητή λευκού θορύβου V_i έχει μοναδιαία διασπορά,

$$\text{Var}[V_i] = 1 \quad (6.5)$$

και τρίτη ροπή,

$$\mu_3[V_i] = \zeta_v \quad (6.6)$$

Στην συνέχεια θα παρουσιάσουμε τις εξισώσεις που πρέπει να τηρούνται ώστε το μοντέλο PSMA να επιτυγχάνει αξιόπιστη αναπαραγωγή:

- της τυπικής αποκλίσεως κάθε εποχής s ($s = 1, \dots, k$),
- του συντελεστή ασυμμετρίας κάθε εποχής s ($s = 1, \dots, k$),
- του συντελεστή αυτοσυσχέτισης κάθε εποχής s ($s = 1, \dots, k$) με την προηγούμενή της $s-1$,
- της τυπικής αποκλίσεως της ετήσιας χρονοσειράς,
- της ασυμμετρίας της ετήσιας χρονοσειράς,
- της μακροπρόθεσμης εμμονής της ετήσιας χρονοσειράς.

¹ Λόγω της γραμμικότητας που διέπει την εκτιμήτρια της μέσης τιμής, είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι η διατήρηση των εποχιακών μέσων τιμών συνεπάγεται την διατήρηση της μέσης τιμής του έτους.

Εξίσωση διατήρησης διασποράς εποχών

Όπως αποδεικνύεται στην συνέχεια, η διασπορά κάθε εποχής s ($s = 1, \dots, k$) του μοντέλου (6.1) δίδεται από την εξίσωση,

$$\text{Var}[X_{(i-1)k+s}] = \sum_{j=-q}^q (\alpha^s_{|j|})^2 \quad \text{για } s = 1, \dots, k \quad (6.7)$$

Απόδειξη

$$X_{(i-1)k+s} X_{(i-1)k+s} = \left(\sum_{j=-q}^q \alpha^s_{|j|} V_{(i-1)k+j+s-1} \right)^2 \quad \text{για } s = 1, \dots, k \quad (6.7.1)$$

Λαμβάνοντας υπ όψιν ότι $\text{Var}[V_i] = 1$ και $\text{Cov}[V_i, V_j] = 0$ για $i \neq j$, κατόπιν αλγεβρικών υπολογισμών καταλήγουμε στην εξίσωση

$$E[X_{(i-1)k+s} X_{(i-1)k+s}] = \text{Cov}[X_{(i-1)k+s}, X_{(i-1)k+s}] = \sum_{j=-q}^q (\alpha^s_{|j|})^2 \quad \text{για } s = 1, \dots, k \quad (6.7.2)$$

που ισοδυναμεί με την εξίσωση,

$$\text{Var}[X_{(i-1)k+s}] = \sum_{j=-q}^q (\alpha^s_{|j|})^2 \quad \text{για } s = 1, \dots, k \quad (6.7.3)$$

Εξίσωση διατήρησης ασυμμετρίας εποχών

Όπως αποδεικνύεται στην συνέχεια, η ασυμμετρία κάθε εποχής s ($s = 1, \dots, k$) του μοντέλου (6.1) δίδεται από την εξίσωση

$$\mu_3[X_{(i-1)k+s}] = \left(\sum_{j=-q}^q (\alpha^s_{|j|})^3 \right) \zeta_v \quad \text{για } s = 1, \dots, k \quad (6.8)$$

Απόδειξη

$$\mu_3[X_{(i-1)k+s}] = \mu_3 \left[\sum_{j=-q}^q \alpha^s_{|j|} V_{(i-1)k+j+s-1} \right] \quad \text{για } s = 1, \dots, k \quad (6.8.1)$$

Λαμβάνοντας υπ όψιν ότι $\mu_3[V_i] = \xi_v$ και $\text{Cov}[V_i, V_j] = 0$ για $i \neq j$, κατόπιν αλγεβρικών υπολογισμών καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\mu_3[X_{(i-1)k+s}] = \left(\sum_{j=-q}^q (\alpha^s_{|j|})^3 \right) \xi_v \quad \text{για } s = 1, \dots, k \quad (6.8.2)$$

Εξίσωση διατήρησης της συνδιασποράς μίας εποχής με την προηγούμενή της

Όπως αποδεικνύεται στην συνέχεια, η συνδιασπορά της κάθε εποχής s ($s = 1, \dots, k$) με την προηγούμενή της $s-1$ δίδεται από την εξίσωση,

$$\text{Cov}[X_{(i-1)k+s}, X_{(i-1)k+s-1}] = \sum_{j=0}^{q-1} (\alpha^{s-1}_{|j|} \alpha^s_{|j+1|} + \alpha^s_{|j|} \alpha^{s-1}_{|j+1|}) \quad \text{για } s = 1, \dots, k \quad (6.9)$$

Απόδειξη

$$X_{(i-1)k+s} X_{(i-1)k+s-1} = \left(\sum_{j=-q}^q \alpha^s_{|j|} V_{(i-1)k+j+s-1} \right) \left(\sum_{j=-q}^q \alpha^{s-1}_{|j|} V_{(i-1)k+j+s-2} \right) \quad \text{για } s = 1, \dots, k \quad (6.9.1)$$

Λαμβάνοντας υπ όψιν ότι $\text{Var}[V_i] = 1$ και $\text{Cov}[V_i, V_j] = 0$ για $i \neq j$, κατόπιν αλγεβρικών υπολογισμών καταλήγουμε στην εξίσωση

$$E[X_{(i-1)k+s} X_{(i-1)k+s-1}] = \text{Cov}[X_{(i-1)k+s}, X_{(i-1)k+s-1}] = \sum_{j=0}^{q-1} (\alpha^{s-1}_{|j|} \alpha^s_{|j+1|} + \alpha^s_{|j|} \alpha^{s-1}_{|j+1|})$$

για $s = 1, \dots, k$ (6.9.2)

Εξίσωση διατήρησης ετήσιας διασποράς και ετήσιων αυτοσυνδιασπορών (διατήρηση μακροπρόθεσμης εμμονής)

Έχοντας ορίσει την τυχαία μεταβλητή X_i , μπορούμε να ορίσουμε την τυχαία μεταβλητή Z_i που προκύπτει ως άθροισμα k διαδοχικών τυχαίων μεταβλητών X_i ,

$$Z_i = \sum_{j=(i-1)k+1}^{ik} X_j \quad (6.10)$$

Η στοχαστική ανέλιξη Z_i είναι στάσιμη, γεγονός που οφείλεται στο ότι κάθε τυχαία μεταβλητή Z_i προκύπτει ως άθροισμα των k διαδοχικών τυχαίων μεταβλητών X_i μίας περιόδου. Κατά αυτόν τον τρόπο η κυκλοστασιμότητα της μεταβλητής X_i απαλείφεται μέσω της πραγματοποιούμενης εποχιακής συναθροίσεως.

Τροποποιώντας ελαφρά την (6.10) οδηγούμαστε στην σχέση,

$$Z_i = \sum_{s=1}^k X_{(i-1)k+s} \quad (6.11)$$

της οποίας το δεύτερο μέλος εκφράζει την στοχαστική ανέλιξη Z_i ως άθροισμα k στασίμων στοχαστικών ανελιξεων $X_{(i-1)k+s}$.

Όπως αποδεικνύεται στην συνέχεια, οι αυτοσυνδιασπορές της τυχαίας μεταβλητής Z_i για διάφορα βήματα χρονικής μετατόπισης p ($p \geq 0$) δίδονται από την εξίσωση,

$$\gamma_p = \text{Cov}[Z_i, Z_{i-p}] = \sum_{l=1}^{2q+k(1-p)} g^l g^{l+kp} \quad \text{για } p = 0, 1, \dots \quad (6.12)$$

όπου,

$$g^l = \sum_{s=1}^k \alpha^s_{|q+s-l|} U(q - |q+s-l|) \quad (6.13)$$

Με $U(x)$ συμβολίζεται η βηματική συνάρτηση Heaviside για την οποία ισχύει $U(x) = 1 \forall x \in [0, \infty)$ και $U(x) = 0 \forall x \in (-\infty, 0)$.

Απόδειξη

$$Z_i Z_{i-p} = \left(\sum_{s=1}^k \sum_{j=-q}^q \alpha^s_{|j|} V_{(i-1)k+j+s-1} \right) \left(\sum_{s=1}^k \sum_{j=-q}^q \alpha^s_{|j|} V_{(i-p-1)k+j+s-1} \right) \quad (6.12.1)$$

Λαμβάνοντας υπ όψιν ότι $\text{Var}[V_i] = 1$ και $\text{Cov}[V_i, V_j] = 0$ για $i \neq j$, κατόπιν αλγεβρικών υπολογισμών καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\gamma_p = \text{Cov}[Z_i, Z_{i-p}] = \sum_{l=1}^{2q+k(1-p)} g^l g^{l+kp} \quad \text{για } p = 0, 1, \dots \quad (6.12.2)$$

όπου,

$$g^l = \sum_{s=1}^k \alpha^s_{|q+s-l|} U(q - |q+s-l|) \quad (6.12.3)$$

Διατήρηση ασυμμετρίας έτους

Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $\mu_3[V_i] = \zeta_v$ και $\text{Cov}[V_i, V_j] = 0$ για $i \neq j$, αποδεικνύεται ότι η ασυμμετρία της τυχαίας μεταβλητής Z_i (ασυμμετρία έτους) δίδεται από την εξίσωση,

$$\mu_3[Z_i] = \left(\sum_{l=1}^{2q+k} (g^l)^3 \right) \zeta_v \quad (6.14)$$

όπου,

$$g^l = \sum_{s=1}^k \alpha^s_{|q+s-l|} U(q - |q+s-l|) \quad (6.15)$$

Προσδιορισμός παραμέτρων μοντέλου

Έχοντας πλέον διατυπώσει τις απαραίτητες εξισώσεις που πρέπει να τηρούνται ώστε το μοντέλο PSMA να επιτυγχάνει αναπαραγωγή των στατιστικών χαρακτηριστικών ενδιαφέροντος της ιστορικής χρονοσειράς, το επόμενο βήμα είναι ο προσδιορισμός των παραμέτρων του μοντέλου α^s_j ($j = 0, \dots, q$ και $s = 1, \dots, k$) καθώς και ο προσδιορισμός του συντελεστή ασυμμετρίας του λευκού θορύβου ζ_v .

Αν υποθέσουμε ότι θέλουμε να διατηρήσουμε τις αυτοσυνδιασπορές της τυχαίας μεταβλητής Z_i έως και χρονικό βήμα μετατόπισης $p = n$ (δηλαδή $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$) με βάση κάποιο δεδομένο αυτοσυσχετόγραμμα (π.χ. FGN)², το πρόβλημα του προσδιορισμού των παραμέτρων του μοντέλου ανάγεται στην επίλυση ενός μη γραμμικού συστήματος $3k+n+2$ εξισώσεων με $k(q+1)+1$ αγνώστους. Ένας τρόπος προσδιορισμού μίας λύσεως

² Βλέπε και ενότητα 2.6

του παραπάνω συστήματος είναι η εφαρμογή κάποιας από τις έμμεσες μεθόδους μη γραμμικής βελτιστοποίησης που περιγράφησαν στα εδάφια 3.3.5 και 3.3.6. Σε αυτήν την περίπτωση, είναι απαραίτητος ο ορισμός ενός μέτρου επιδόσεως της λύσεως που έχει επιτευχθεί σε κάθε βήμα του αλγορίθμου της εφαρμοζόμενης μεθόδου βελτιστοποίησης. Το εν λόγω μέτρο (αντικειμενική συνάρτηση), θα λαμβάνει τιμή ίση με μηδέν στην περίπτωση που οι εξισώσεις (6.7) – (6.15) τηρούνται επακριβώς και μία θετική τιμή στην αντίθετη περίπτωση. Στην συνέχεια θα παρουσιασθεί η προτεινόμενη για το μοντέλο PSMA αντικειμενική συνάρτηση, καθώς και η αναλυτική έκφραση της παραγώγου της. Ο λόγος για τον οποίο παρατίθεται η παράγωγος της αντικειμενικής συναρτήσεως, οφείλεται στο ότι η γνώση της αναλυτικής εκφράσεως αυτής αυξάνει κατά πολύ την ταχύτητα των έμμεσων μεθόδων μη γραμμικής βελτιστοποίησης. Ως γνωστόν, ο αριθμητικός προσδιορισμός της παραγώγου εμφανίζεται ιδιαίτερα αργός στην περίπτωση που υπάρχει ένας αξιόλογος αριθμός μεταβλητών ελέγχου, καθώς και ανακριβής στην περίπτωση προβλημάτων με τραχεία εφικτή περιοχή.

Αντικειμενική συνάρτηση

Ορίζουμε ζ το προς βελτιστοποίηση διάνυσμα των παραμέτρων του μοντέλου διαστάσεως $k(q+1)+1$,

$$\zeta = [\alpha_0^1, \alpha_1^1, \dots, \alpha_q^1, \alpha_0^2, \alpha_1^2, \dots, \alpha_q^2, \dots, \dots, \alpha_0^k, \alpha_1^k, \dots, \alpha_q^k, \zeta_v]^T \quad (6.16)$$

όπου με τον άνω δείκτη T συμβολίζεται το ανάστροφο ενός διανύσματος ή πίνακα. Ορίζουμε ακόμη τα μεγέθη

$$\theta_1 = [\text{Var}[X_1], \text{Var}[X_2], \dots, \text{Var}[X_k]]^T \quad (6.17)$$

$$\theta_2 = [\mu_3[X_1], \mu_3[X_2], \dots, \mu_3[X_k]]^T \quad (6.18)$$

$$\theta_3 = [\text{Cov}[X_k, X_1], \text{Cov}[X_1, X_2], \dots, \text{Cov}[X_{k-1}, X_k]]^T \quad (6.19)$$

$$\theta_4 = [\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n]^T = [\text{Cov}[Z_i, Z_i], \text{Cov}[Z_i, Z_{i-1}], \dots, \text{Cov}[Z_i, Z_{i-n}]]^T \quad (6.20)$$

$$\theta_5 = \mu_3[Z_i] \quad (6.21)$$

των στατιστικών χαρακτηριστικών του ιστορικού δείγματος, καθώς και τα μεγέθη $\tilde{\theta}_1(\zeta)$, $\tilde{\theta}_2(\zeta)$, $\tilde{\theta}_3(\zeta)$, $\tilde{\theta}_4(\zeta)$, $\tilde{\theta}_5(\zeta)$ που ορίζονται κατ' αντιστοιχία με τα μεγέθη $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5$ και μπορούν να προσδιοριστούν από τις εξισώσεις (6.7) – (6.15) του μοντέλου (6.1).

Στην περίπτωση αυτή η προς ελαχιστοποίηση αντικειμενική συνάρτηση λαμβάνει την μορφή

$$f(\zeta^*) = \min[f(\zeta)] = \lambda_1 \|\tilde{\theta}_1(\zeta) - \theta_1\|^2 + \lambda_2 \|\tilde{\theta}_2(\zeta) - \theta_2\|^2 + \lambda_3 \|\tilde{\theta}_3(\zeta) - \theta_3\|^2 + \lambda_4 \|\tilde{\theta}_4(\zeta) - \theta_4\|^2 + \lambda_5 \{\tilde{\theta}_5(\zeta) - \theta_5\}^2 \quad (6.22)$$

όπου $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ και λ_5 θετικοί συντελεστές βάρους της αντικειμενικής συναρτήσεως και $\|\cdot\|$ η ευκλείδεια νόρμα διανύσματος. Η αντικειμενική συνάρτηση $f(\zeta)$ λαμβάνει την τιμή μηδέν στην περίπτωση που οι εξισώσεις (6.7) – (6.15) τηρούνται επακριβώς και μία θετική τιμή στην αντίθετη περίπτωση, το μέτρο της οποίας εξαρτάται από το τους υιοθετούμενους συντελεστές βάρους $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ και λ_5 καθώς και από την απόκλιση των μεγεθών $\tilde{\theta}_1(\zeta), \tilde{\theta}_2(\zeta), \tilde{\theta}_3(\zeta), \tilde{\theta}_4(\zeta), \tilde{\theta}_5(\zeta)$ από τα θεωρητικά μεγέθη (όπως προκύπτουν από τα στατιστικά χαρακτηριστικά του ιστορικού δείγματος) $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5$.

Παράγωγος αντικειμενικής συναρτήσεως

Η αναλυτική έκφραση της παραγώγου της αντικειμενικής συναρτήσεως (6.22) δίδεται από την εξίσωση,

$$\frac{df(\zeta)}{d\zeta} = 2 \lambda_1 \{\tilde{\theta}_1(\zeta) - \theta_1\}^T \mathbf{p}_1 + 2 \lambda_2 \{\tilde{\theta}_2(\zeta) - \theta_2\}^T \mathbf{p}_2 + 2 \lambda_3 \{\tilde{\theta}_3(\zeta) - \theta_3\}^T \mathbf{p}_3 + 2 \lambda_4 \{\tilde{\theta}_4(\zeta) - \theta_4\}^T \mathbf{p}_4 + 2 \lambda_5 \{\tilde{\theta}_5(\zeta) - \theta_5\} \boldsymbol{\varphi}_5^T \quad (6.23)$$

όπου $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ και \mathbf{p}_3 , πίνακες διαστάσεων $k \times k(q+1)+1$, \mathbf{p}_4 πίνακας διαστάσεων $n+1 \times k(q+1)+1$ και $\boldsymbol{\varphi}_5$ διάνυσμα διαστάσεως $k(q+1)+1$. Στην συνέχεια παρατίθενται τα στοιχεία των πινάκων $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4$ καθώς και του διανύσματος $\boldsymbol{\varphi}_5$, όπως αυτά προέκυψαν μετά από αλγεβρικούς υπολογισμούς.

Τα στοιχεία του πίνακα \mathbf{p}_1 δίδονται από τον τύπο,

$$p_1^{i,j} = \frac{h^{ij}}{2} [2 - U\{-|j - q(i-1) - i|\}] \quad \text{για } i = 1, \dots, k \text{ και } j = 1, \dots, k(q+1)+1 \quad (6.24)$$

όπου,

$$h^{ij} = 4 a_{j-q(i-1)-i}^i U\{i(q+1)-j\} U\{j-q(i-1)-i\} \quad (6.25)$$

και $U(x)$ η βηματική συνάρτηση Heaviside για την οποία ισχύει $U(x) = 1 \forall x \in [0, \infty)$ και $U(x) = 0 \forall x \in (-\infty, 0)$.

Τα στοιχεία του πίνακα \mathbf{p}_2 δίδονται από τον τύπο,

$$p_2^{i,j} = \frac{g^{ij}}{2} [2 - U\{-|j - q(i-1)-i|\}] + U\{j-k(q+1)-1\} \sum_{l=q}^j (\alpha_{|l|}^i)^3 \quad \text{για } i = 1, \dots, k \text{ και} \\ j = 1, \dots, k(q+1)+1 \quad (6.26)$$

όπου,

$$g^{ij} = 6 \zeta_v (a_{j-q(i-1)-i}^i)^2 U\{i(q+1)-j\} U\{j-q(i-1)-i\} \quad (6.27)$$

Τα στοιχεία του πίνακα \mathbf{p}_3 δίδονται από τον τύπο,

$$p_3^{i,j} = U(1-i) [\{\alpha_j^k U(q-j) + \alpha_{|j-2|}^k U(j-2)\} U(q+1-j) + \{\alpha_{j-(k-1)(q+1)}^1 U(k(q+1)-j-1) + \\ \alpha_{|j-(k-1)(q+1)-2|}^1 U(j-(k-1)(q+1)-2)\} U(j-(k-1)(q+1)-1) U(k(q+1)-j)] + \\ U(i-2) [\{\alpha_{j-(i-2)(q+1)}^i U(q-j+(i-2)(q+1)) + \alpha_{|j-(i-2)(q+1)-2|}^i U(j-(i-2)(q+1)-2)\} \\ U(j-(i-2)(q+1)-1) U((i-1)(q+1)-j) + \{\alpha_{j-(i-1)(q+1)}^{i-1} U(q-j+(i-1)(q+1)) + \\ \alpha_{|j-(i-1)(q+1)-2|}^{i-1} U(j-(i-1)(q+1)-2)\} U(j-(i-1)(q+1)-1) U(i(q+1)-j)] \\ \text{για } i = 1, \dots, k \text{ και } j = 1, \dots, k(q+1)+1 \quad (6.28)$$

Τα μη μηδενικά στοιχεία του πίνακα \mathbf{p}_4 δίδονται από τους τύπους,

$$j = q(s-1) + s + m \quad \text{για } m = 0, 1, \dots, q \text{ και } s = 1, \dots, k \quad (6.29)$$

$$p_4^{i+1,j} = \frac{\lambda^{ij}}{2} [2 - U\{-|j - q(s-1)-s|\}] \quad \text{για } i = 0, 1, \dots, n \quad (6.30)$$

όπου,

$$\lambda^{ij} = \sum_{l=1}^k [a^l_{|ki-s+m+l|} U(q-|ki-s+m+l|) + a^l_{|ki-s-m+l|} U(q-|ki-s-m+l|) + a^l_{|ki+s-m-l|} U(q-|ki+s-m-l|) + a^l_{|ki+s+m-l|} U(q-|ki+s+m-l|)] \quad (6.31)$$

Τα στοιχεία του διανύσματος φ_5 δίδονται από τους τύπους,

$$j = q(s-1) + s + m \text{ για } m = 0, 1, \dots, q \text{ και } s = 1, \dots, k \quad (6.32)$$

$$\varphi_5^j = \frac{\delta^j}{2} [2 - U\{|j - q(s-1) - s|\}] \quad (6.33)$$

όπου,

$$\delta^j = 3 \zeta_v \left[\left(\sum_{l=1}^k a^l_{|m-s+l|} U(q-|m-s+l|) \right)^2 + \left(\sum_{l=1}^k a^l_{|m+s-l|} U(q-|m+s-l|) \right)^2 \right] \quad (6.34)$$

και

$$\varphi_5^{k(q+1)+1} = \sum_{l=1}^{2q+k} \left(\sum_{s=1}^k a^s_{|q+1-l|} U(q-|q+1-l|) \right)^3 \quad (6.35)$$

Χαρακτηριστικά μοντέλου PSMA

Με χρήση του μοντέλου PSMA (6.1) σε συνδυασμό με τον γραμμικό μετασχηματισμό (6.4) επιτυγχάνουμε:

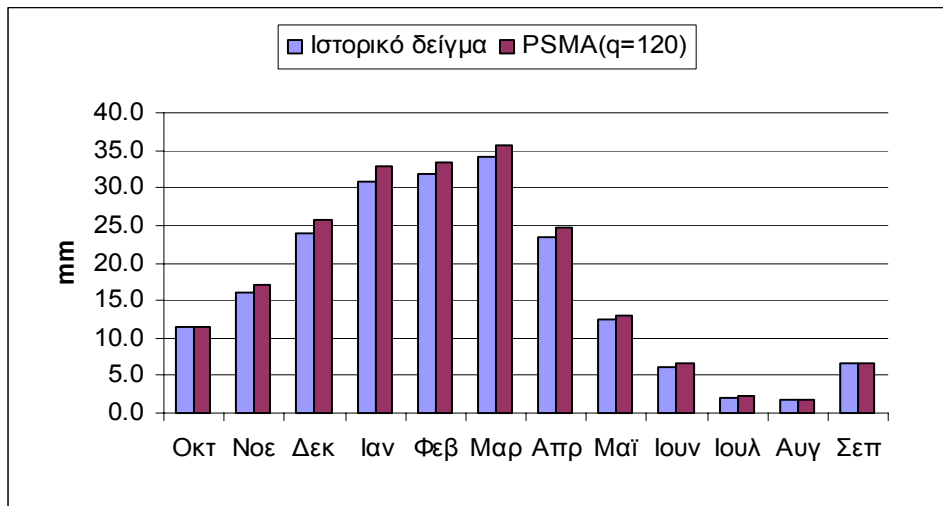
- την αναπαραγωγή των k σε αριθμό εποχιακών μέσων τιμών της ιστορικής χρονοσειράς,
- την αναπαραγωγή των k αριθμό εποχιακών τυπικών αποκλίσεων της ιστορικής χρονοσειράς,
- την αναπαραγωγή των k σε αριθμό εποχιακών συντελεστών ασυμμετρίας της ιστορικής χρονοσειράς,
- την αναπαραγωγή των συντελεστών συσχέτισης μεταξύ των εποχών της ιστορικής χρονοσειράς για μοναδιαίο βήμα χρονικής μετατόπισης (συντελεστής συσχέτισης μίας αποχής με την προηγούμενή της),

- την αναπαραγωγή της ετήσιας μέσης τιμής της ιστορικής χρονοσειράς,
- την αναπαραγωγή της ετήσιας τυπικής απόκλισης της ιστορικής χρονοσειράς,
- την αναπαραγωγή του ετήσιου συντελεστή ασυμμετρίας της ιστορικής χρονοσειράς,
- την αναπαραγωγή της μακροπρόθεσμης εμμονής της ετήσιας ιστορικής χρονοσειράς βάσει κάποιου θεωρητικού αυτοσυσχετογράμματος (π.χ. FGN).

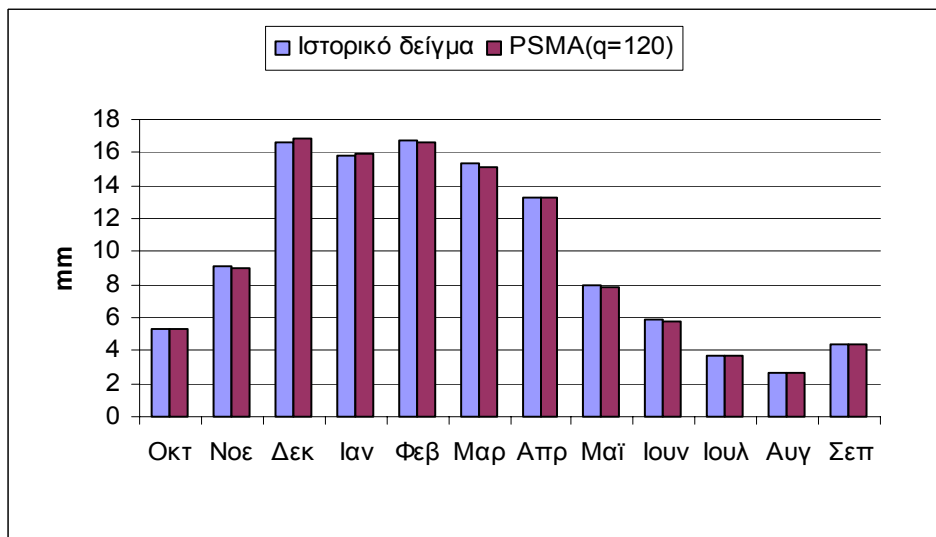
6.2 Εφαρμογή και έλεγχος του μοντέλου

Το μοντέλο PSMA εφαρμόστηκε στην αναπαραγωγή των βραχυπρόθεσμων και μακροπρόθεσμων στατιστικών χαρακτηριστικών της ιστορικής χρονοσειράς μηνιαίων υψών απορροής του Βοιωτικού Κηφισού στην θέση εξόδου του στην διώρυγα Καρδίτσας. Στα πλαίσια της εν λόγω εφαρμογής αναπτύχθηκε πρόγραμμα που παρατίθεται στο παράρτημα ΣΤ, και το οποίο χρησιμοποιεί τις εξισώσεις (6.1) – (6.35) για την βελτιστοποίηση των παραμέτρων του μοντέλου και την παραγωγή μηνιαίων συνθετικών χρονοσειρών δεδομένων στατιστικών χαρακτηριστικών. Ο αριθμός των παραμέτρων α_j^s του μοντέλου για κάθε μήνα s ($s = 1, \dots, 12$) λήφθηκε ίσος με 121 ($q = 120$). Για τον προσδιορισμό των παραμέτρων α_j^s ($s = 1, \dots, 12$ και $j = 0, 1, \dots, 120$) καθώς και της ασυμμετρίας του λευκού θορύβου ζ_v , χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος των συζυγών κλίσεων στην οποία αναφερθήκαμε στο εδάφιο 3.3.6. Στην συνέχεια παρατίθενται τα διαγράμματα σύγκρισης των στατιστικών χαρακτηριστικών του ιστορικού δείγματος με τα στατιστικά χαρακτηριστικά της συνθετικής χρονοσειράς που παρήχθη με χρήση του μοντέλου (6.1). Επισημαίνεται ότι τα στατιστικά χαρακτηριστικά της συνθετικής χρονοσειράς έχουν προέλθει από στοχαστική προσομοίωση μήκους 5000 ετών.

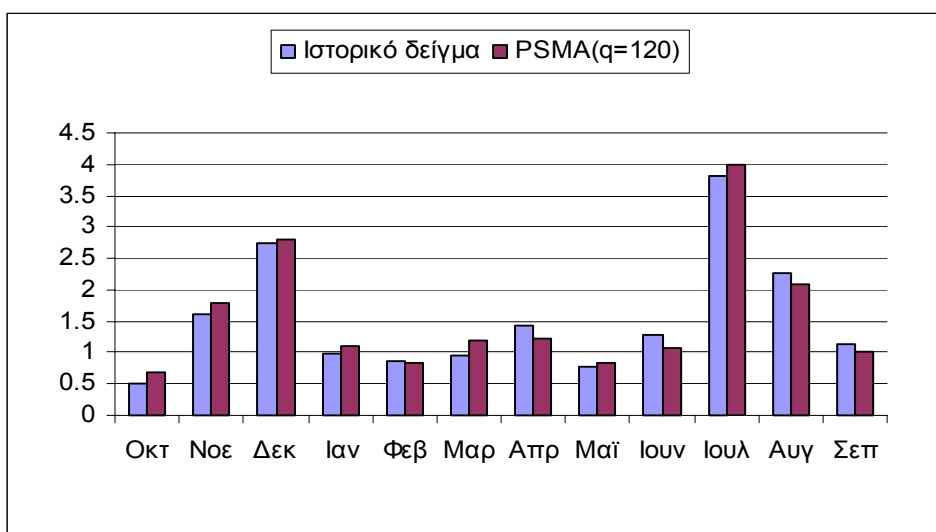
Στα Σχήματα 6.1, 6.2 και 6.3 μπορούμε να παρατηρήσουμε την αξιόπιστη αναπαραγωγή των μέσων τιμών, των τυπικών αποκλίσεων και των συντελεστών ασυμμετρίας των μηνών του ιστορικού δείγματος από το μοντέλο PSMA.



Σχήμα 6.1 Ραβδόγραμμα σύγκρισης των μηνιαίων μέσων τιμών του ιστορικού και του συνθετικού δείγματος απορροών

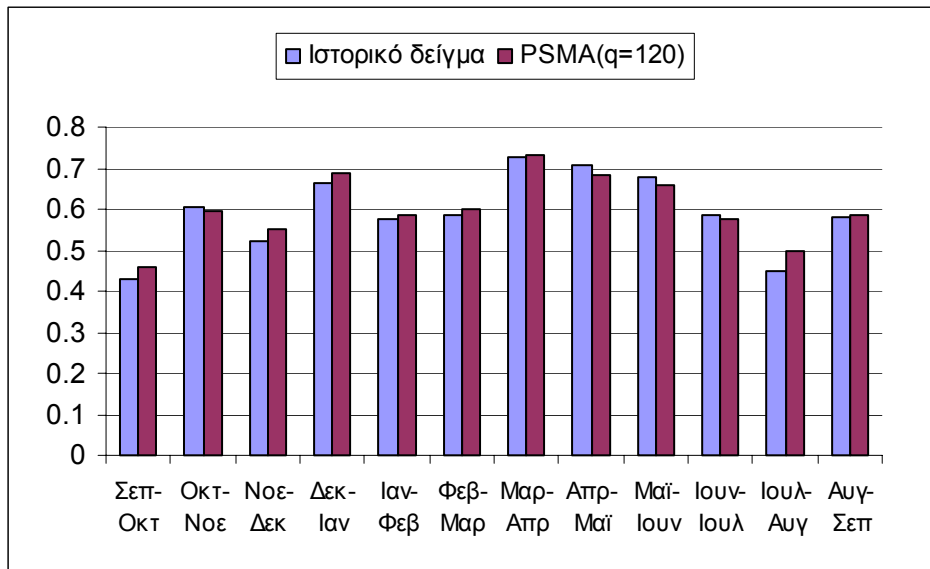


Σχήμα 6.2 Ραβδόγραμμα σύγκρισης των μηνιαίων τυπικών αποκλίσεων του ιστορικού και του συνθετικού δείγματος απορροών



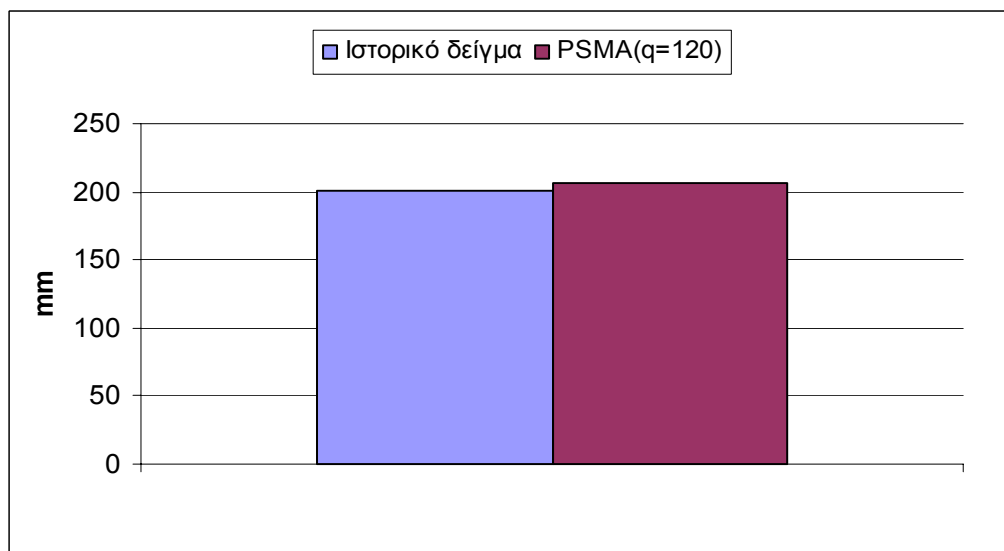
Σχήμα 6.3 Ραβδόγραμμα σύγκρισης των μηνιαίων συντελεστών ασυμμετρίας του ιστορικού και του συνθετικού δείγματος απορροών

Στο Σχήμα 6.4 παρουσιάζονται οι συντελεστές συσχέτισης για μοναδιαίο βήμα χρονικής μετατόπισης των μηνών του ιστορικού και του συνθετικού δείγματος απορροών. Η αναπαραγωγή των εν λόγω στατιστικών μεγεθών από το μοντέλο PSMA είναι αρκετά ακριβής.

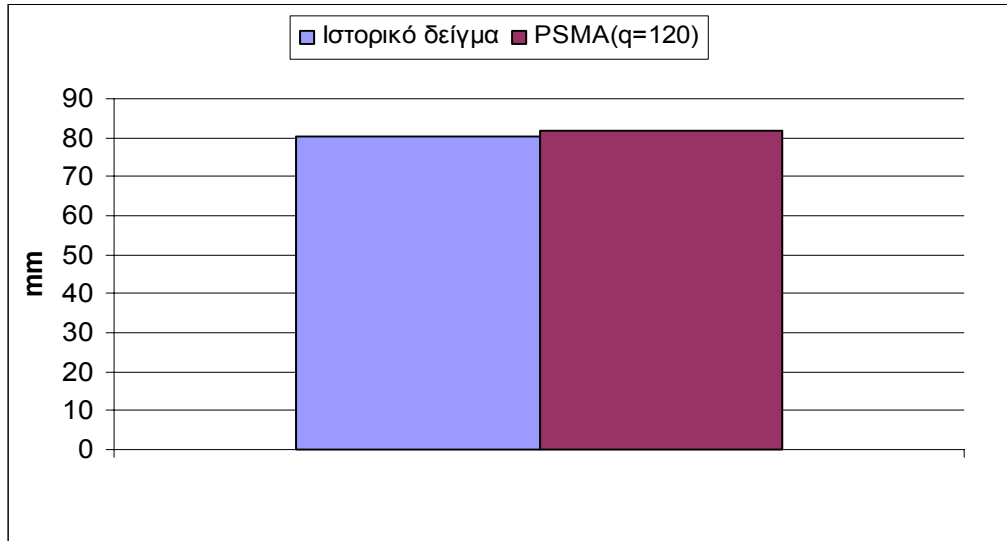


Σχήμα 6.4 Ραβδόγραμμα σύγκρισης των συντελεστών συσχέτισης για μοναδιαίο βήμα χρονικής μετατόπισης των μηνών του ιστορικού και του συνθετικού δείγματος απορροών (συντελεστές συσχέτισης των απορροών ενός μήνα με τις απορροές του προηγούμενου μήνα)

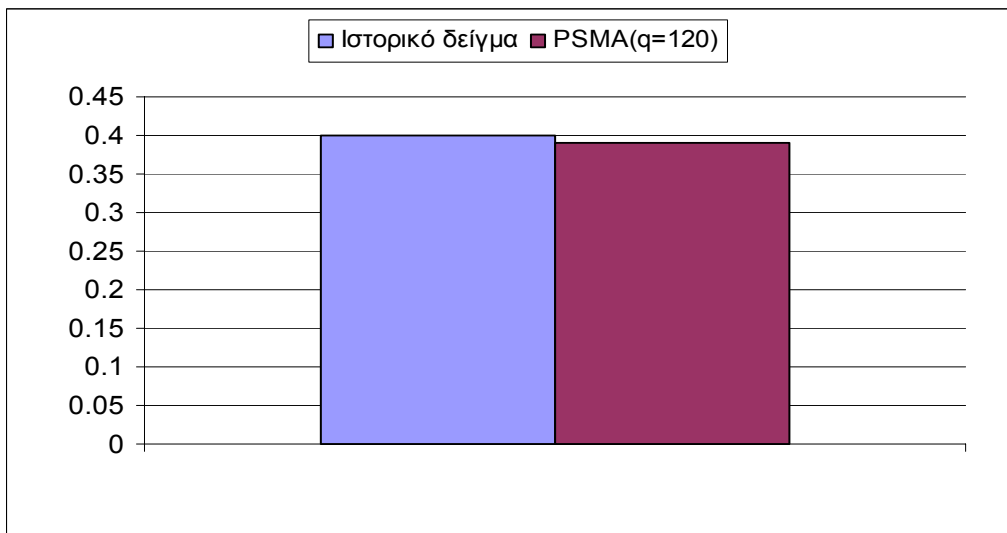
Στα Σχήματα 6.5, 6.6 και 6.7 πραγματοποιείται η σύγκριση της μέσης τιμής, της τυπικής απόκλισης και του συντελεστή ασυμμετρίας της ετήσιας ιστορικής χρονοσειράς με τα αντίστοιχα στατιστικά χαρακτηριστικά της συνθετικής χρονοσειράς.



Σχήμα 6.5 Ραβδόγραμμα σύγκρισης των ετήσιων μέσων τιμών του ιστορικού και του συνθετικού δείγματος απορροών

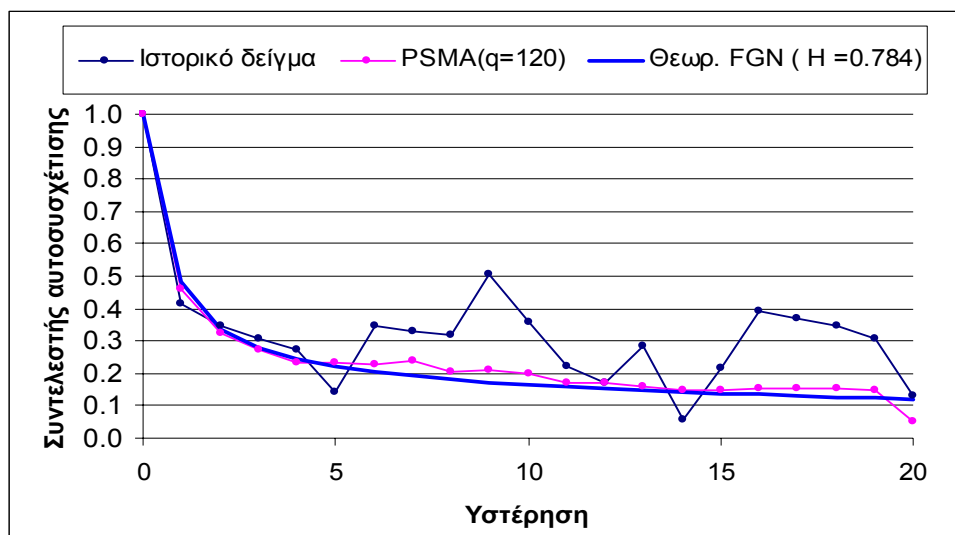


Σχήμα 6.6 Ραβδόγραμμα σύγκρισης των ετήσιων τυπικών αποκλίσεων του ιστορικού και του συνθετικού δείγματος απορροών



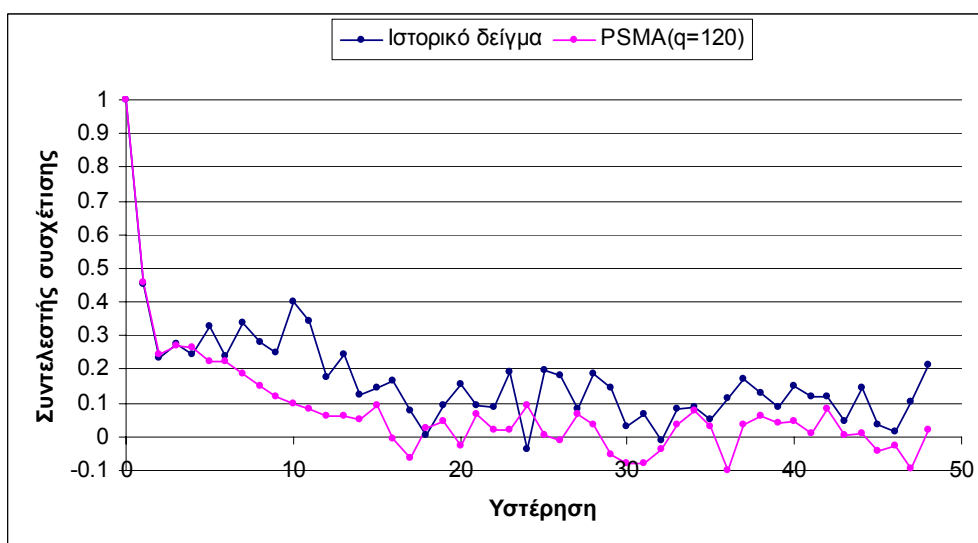
Σχήμα 6.7 Ραβδόγραμμα σύγκρισης των ετήσιων συντελεστών ασυμμετρίας του ιστορικού και του συνθετικού δείγματος απορροών

Στο Σχήμα 6.8 παρουσιάζεται το διάγραμμα σύγκρισης του εμπειρικού αυτοσυσχετογράμματος της ετήσιας ιστορικής χρονοσειράς, με το θεωρητικό αυτοσυσχετόγραμμα FGN (όπως αυτό προκύπτει συναρτήσει του συντελεστή Hurst της χρονοσειράς των απορροών) και με το εμπειρικό αυτοσυσχετόγραμμα της ετήσιας συνθετικής χρονοσειράς που προέκυψε από την εφαρμογή του μοντέλου PSMA. Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε την επιτυχία του μοντέλου στην διατήρηση της μακροπρόθεσμης εμμονής της ετήσιας ιστορικής χρονοσειράς.



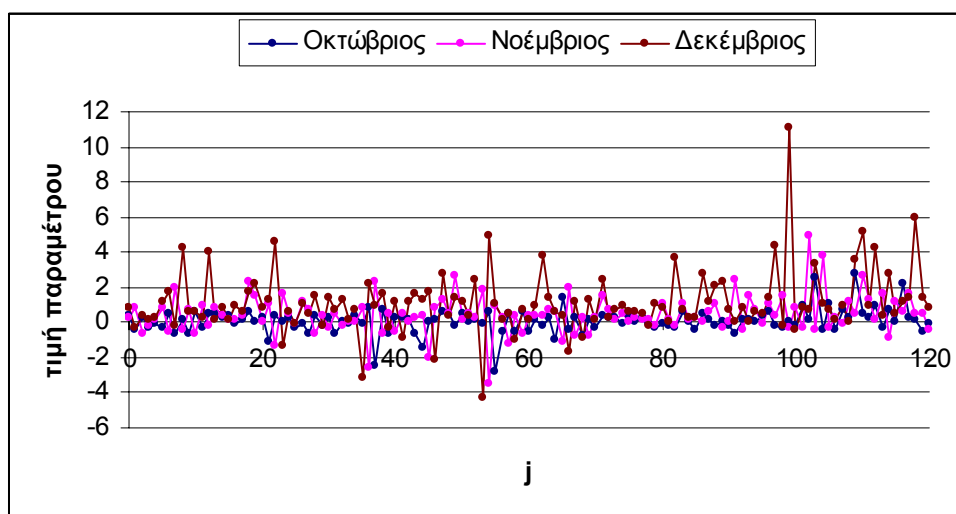
Σχήμα 6.8 Διάγραμμα σύγκρισης των συντελεστών αυτοσυσχέτισης για τα πρώτα 20 βήματα χρονικής μετατόπισης, της ετήσιας ιστορικής και συνθετικής χρονοσειράς απορροών

Αν και όχι άμεσου ενδιαφέροντος, θα ήταν χρήσιμο να γνωρίζουμε τόσο για το ιστορικό όσο και για το συνθετικό δείγμα τη μορφή των διαγραμμάτων των συντελεστών συσχέτισης κάθε μήνα με τους προηγούμενους αυτού μήνες. Στο Σχήμα 6.9 παρουσιάζεται το διάγραμμα των συντελεστών συσχέτισης του μήνα Οκτωβρίου με προηγούμενους αυτού μήνες τόσο για την ιστορική όσο και για τη συνθετική χρονοσειρά απορροών. Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι το διάγραμμα των συντελεστών συσχέτισης της συνθετικής χρονοσειράς παρουσιάζει μία εν γένει ομαλή μορφή που οφείλεται στην εξίσωση (6.1) του μοντέλου PSMA, σύμφωνα με την οποία κάθε πραγματοποίηση της μηνιαίας συνθετικής χρονοσειράς προκύπτει ως γραμμική συσχέτιση διαδοχικών πραγματοποιήσεων του λευκού θορύβου.



Σχήμα 6.9 Διάγραμμα συντελεστών συσχέτισης του μήνα Οκτωβρίου με προηγούμενους αυτού μήνες, για την ιστορική και την συνθετική χρονοσειρά απορροών

Αρκετές πληροφορίες για την συμπεριφορά του υπό μελέτη μοντέλου μπορούμε να αντλήσουμε από τα διαγράμματα των παραμέτρων του α_j^s ($s = 1, \dots, 12$ και $j = 0, 1, \dots, 120$). Στο Σχήμα 6.10 παρατίθενται ενδεικτικά τα διαγράμματα των παραμέτρων α_j^s ($s = 1, 2, 3$ και $j = 0, 1, \dots, 120$) του μοντέλου PSMA για τους μήνες Οκτώβριο, Νοέμβριο και Δεκέμβριο όπως αυτά προέκυψαν κατόπιν βελτιστοποίησης για τα στατιστικά χαρακτηριστικά της ιστορικής χρονοσειράς μηνιαίων υψών απορροής του Βοιωτικού Κηφισού.



Σχήμα 6.10 Διάγραμμα των παραμέτρων α_j^s μοντέλου για τους μήνες Οκτώβριος, Νοέμβριος και Δεκέμβριος

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι τα διαγράμματα των παραμέτρων του μοντέλου παρουσιάζουν μία ομοιότητα μεταξύ των μηνών. Το εν λόγω γεγονός μπορεί να μας οδηγήσει στο συμπέρασμα ότι είναι πιθανόν δυνατή η εύρεση μίας παραμετρικής εκφράσεως βάσει της οποίας θα είναι δυνατός ο προσδιορισμός των παραμέτρων του μοντέλου για κάθε μήνα. Κατά αυτόν τον τρόπο, θα μπορούσαμε να ανάγουμε το πρόβλημα βελτιστοποίησης των παραμέτρων του μοντέλου σε πρόβλημα βελτιστοποίησης των παραμέτρων της χρησιμοποιούμενης μαθηματικής εκφράσεως. Το όφελος από μία τέτοια προσέγγιση είναι η σαφής μείωση των προς βελτιστοποίηση μεταβλητών ελέγχου, που συνεπάγεται σημαντική μείωση του απαιτούμενου υπολογιστικού φόρτου.

6.3 Σχόλια πάνω στο μοντέλο

Από τα Σχήματα 6.1 - 6.9 μπορούμε να διαπιστώσουμε την μεγάλη αξιοπιστία του μοντέλου PSMA στην διατήρηση των εποχιακών μέσων τιμών, τυπικών αποκλίσεων, συντελεστών ασυμμετρίας και 1^{ης} τάξεως συντελεστών συσχέτισης μεταξύ των εποχών, καθώς και στην αναπαραγωγή της ετήσιας μέσης τιμής, της ετήσιας τυπικής απόκλισης, του ετήσιου συντελεστή ασυμμετρίας και της μακροπρόθεσμης εμμονής ιστορικών κυκλοστάσιμων χρονοσειρών.

Αν και αρκετά ακριβές το μοντέλο PSMA απαιτεί βελτιστοποίηση των παραμέτρων του α_j^s ($j = 0, \dots, q$ και $s = 1, \dots, k$) γεγονός που το καθιστά αργό στην περίπτωση που ο αριθμός q είναι ιδιαίτερα υψηλός. Κάτι τέτοιο είναι δυνατόν να συμβεί στην περίπτωση που θελήσουμε να διατηρήσουμε τις αυτοσυσχετίσεις της ετήσιας συνθετικής χρονοσειράς για μεγάλα βήματα χρονικής μετατόπισης (lags) βάσει κάποιου θεωρητικού αυτοσυσχετογράμματος (π.χ. FGN). Η παραπάνω παρατήρηση δεν φαίνεται να δημιουργεί ιδιαίτερο πρόβλημα καθώς οι βελτιστοποιημένες παράμετροι δύνανται να αποθηκευθούν, με άμεση συνέπεια την απαίτηση μίας και μόνο βελτιστοποίησης για ένα δεδομένο ιστορικό δείγμα και την μετέπειτα κατ' επανάληψη χρήση των βελτιστοποιημένων παραμέτρων για παραγωγή συνθετικών χρονοσειρών δεδομένων στατιστικών χαρακτηριστικών.

Λόγω της μεγάλης ακρίβειας του μοντέλου και δεδομένου ότι οι παράμετροι α_j^s ($j = 0, \dots, q$ και $s = 1, \dots, k$) του μοντέλου PSMA παρουσιάζουν ομοιότητα μεταξύ των μηνών (βλέπε Σχήμα 6.10), έγιναν αρκετές προσπάθειες εξεύρεσης μίας μαθηματικής εκφράσεως βάσει της οποίας θα ήταν δυνατός ο προσδιορισμός των παραμέτρων α_j^s ($j = 0, \dots, q$ και $s = 1, \dots, k$). Σκοπός των εν λόγω προσπαθειών ήταν η αναγωγή του προβλήματος βελτιστοποίησης των παραμέτρων του μοντέλου σε πρόβλημα βελτιστοποίησης των παραμέτρων της χρησιμοποιούμενης μαθηματικής εκφράσεως. Το όφελος από μία τέτοια προσέγγιση είναι η σαφής μείωση των προς βελτιστοποίηση παραμέτρων που συνεπάγεται σημαντική μείωση του απαιτούμενου υπολογιστικού φόρτου. Μία πρώτη τέτοια προσπάθεια παρατίθεται στο παράρτημα Α, η οποία είχε ως αποτέλεσμα την εξεύρεση μίας μαθηματικής εκφράσεως που επιτυγχάνει την αναπαραγωγή όλων των στατιστικών χαρακτηριστικών ενδιαφέροντος (βλέπε ενότητα 6.2) πλην των εποχιακών ασυμμετριών και της ετήσιας ασυμμετρίας. Απαιτείται, λοιπόν, μεγαλύτερη διερεύνηση, κάτι που δεν είναι εφικτό μέσα στα περιορισμένα χρονικά πλαίσια της παρούσας εργασίας.

7 Ανάπτυξη μονομεταβλητού μοντέλου που βασίζεται στον διαχωρισμό της κυκλοστασιμότητας και της μακροπρόθεσμης μνήμης (Splitmodel)

Το μοντέλο που αναπτύσσεται στο κεφάλαιο αυτό βασίζεται στην θεώρηση ότι είναι δυνατόν να αναπαράγουμε την κυκλοστασιμότητα και την μακροπρόθεσμη εμμονή μίας χρονοσειράς ως ένα σταθμισμένο άθροισμα μίας στάσιμης στοχαστικής ανελίξεως που διατηρεί μακρά μνήμη και μίας κυκλοστάσιμης στοχαστικής ανελίξεως που διατηρεί βραχυπρόθεσμη μνήμη. Κατά αυτόν τον τρόπο, αναπτύχθηκε ένα μονομεταβλητό μοντέλο που αναπαράγει την κυκλοστασιμότητα, την βραχυπρόθεσμη μνήμη και την μακροπρόθεσμη εμμονή κυκλοστάσιμων στοχαστικών ανελίξεων (Splitmodel), το οποίο παρουσιάζεται και ελέγχεται στις σελίδες που ακολουθούν.

7.1 Παρουσίαση μοντέλου

Έστω κυκλοστάσιμη στοχαστική ανέλιξη X_i με περίοδο k (ίση με τον αριθμό των εποχών του έτους), όπου i το χρονικό διάστημα αναφοράς. Αν s ($s = 1, \dots, k$) ο αύξων αριθμός της εποχής, τότε για $i = 1, \dots$ και σταθερό κάθε φορά s η στοχαστική ανέλιξη $X_{(i-1)k+s}$ είναι στάσιμη. Στην συνέχεια γίνεται η παραδοχή ότι η τυχαία μεταβλητή X_i έχει μέση τιμή μηδέν, ήτοι

$$E[X_{(i-1)k+s}] = 0 \quad \text{για } s = 1, \dots, k \quad (7.1)$$

Επισημαίνεται ότι η παραπάνω παραδοχή, δεν δημιουργεί πρόβλημα στην συνθετική αναπαραγωγή των μέσων τιμών των εποχών s ($s = 1, \dots, k$), αφού με εφαρμογή του γραμμικού μετασχηματισμού,

$$Q_{(i-1)k+s} = X_{(i-1)k+s} + \mu_s \quad \text{για } s = 1, \dots, k \quad (7.2)$$

μπορούμε να αναπαράγουμε τόσο τις εποχιακές μέσες τιμές μ_s ($s = 1, \dots, k$), όσο και την ετήσια μέση τιμή.

Θεωρούμε τώρα ότι η κυκλοστάσιμη στοχαστική ανάλιξη X_i μπορεί να επιμεριστεί σε δύο συνιστώσες στοχαστικές ανελίξεις σύμφωνα με την εξίσωση,

$$X_i = e_i Y_i + W_i \quad (7.3)$$

όπου e_i περιοδικά μεταβαλλόμενη παράμετρος του μοντέλου, για την οποία ισχύει

$$e_i = e_{i+kl} \text{ για } i = 1, \dots, k \text{ και } l \in \mathbb{Z}. \quad (7.4)$$

Η στοχαστική ανάλιξη Y_i είναι στάσιμη, στοχαστικά ανεξάρτητη από την ανάλιξη W_i , οπότε

$$\text{Cov}[Y_i, W_j] = 0 \quad \forall i, j \quad (7.5)$$

με μακρά “μνήμη”, οπότε

$$\gamma_p = \text{Cov}[Y_i, Y_{i-p}] \neq 0 \quad (7.6)$$

(για μεγάλες τιμές της υστέρησης p), και μηδενική μέση τιμή, ήτοι

$$E[Y_i] = 0 \quad (7.7)$$

Η στοχαστική ανάλιξη W_i είναι κυκλοστάσιμη με περίοδο k (ίση με τον αριθμό των εποχών του έτους), διατηρεί μόνο μηδενικής και πρώτης τάξεως αυτοσυσχετίσεις (μικρής τάξεως μνήμη),

$$\delta_p^s = \text{Cov}[W_{(i-1)k+s}, W_{(i-1)k+s-p}] \neq 0 \text{ για } s = 1, \dots, k \text{ και } p = 0, 1 \quad (7.8)$$

$$\delta_p^s = \text{Cov}[W_{(i-1)k+s}, W_{(i-1)k+s-p}] = 0 \text{ για } s = 1, \dots, k \text{ και } p = 2, \dots \quad (7.9)$$

και έχει μηδενική μέση τιμή

$$E[W_{(i-1)k+s}] = 0 \text{ για } s = 1, \dots, k \quad (7.10)$$

Στην συνέχεια θα παρουσιάσουμε τις εξισώσεις προσδιορισμού των στατιστικών χαρακτηριστικών των μεταβλητών W_i και Y_i , καθώς και των παραμέτρων e_i ($i = 1, \dots, k$) ώστε το Splitmodel να επιτυγχάνει αξιόπιστη αναπαραγωγή:

- της τυπικής αποκλίσεως κάθε εποχής s ($s = 1, \dots, k$),
- του συντελεστή ασυμμετρίας κάθε εποχής s ($s = 1, \dots, k$),
- του συντελεστή αυτοσυσχέτισης κάθε εποχής s ($s = 1, \dots, k$), με την προηγούμενή της $s-1$,
- της τυπικής αποκλίσεως της ετήσιας χρονοσειράς,
- της μακροπρόθεσμης εμμονής της ετήσιας χρονοσειράς βάσει κάποιου θεωρητικού αυτοσυσχετογράμματος (π.χ. FGN¹).

Εξίσωση διατήρησης διασποράς εποχών

Όπως αποδεικνύεται στη συνέχεια, η διασπορά κάθε εποχής s ($s = 1, \dots, k$) του μοντέλου (7.3) δίδεται από την εξίσωση,

$$\text{Var}[X_{(i-1)k+s}] = (e_s)^2 \gamma_0 + \delta^s_0 \quad \text{για } s = 1, \dots, k \quad (7.11)$$

Απόδειξη

$$X_{(i-1)k+s} X_{(i-1)k+s} = (e_{(i-1)k+s} Y_{(i-1)k+s} + W_{(i-1)k+s}) (e_{(i-1)k+s} Y_{(i-1)k+s} + W_{(i-1)k+s}) \quad (7.11.1)$$

δεδομένου ότι οι μεταβλητές $Y_{(i-1)k+s}$ και $W_{(i-1)k+s}$ είναι στοχαστικά ανεξάρτητες (7.5), οδηγούμαστε στην σχέση,

$$E[X_{(i-1)k+s} X_{(i-1)k+s}] = (e_{(i-1)k+s})^2 E[Y_{(i-1)k+s} Y_{(i-1)k+s}] + E[W_{(i-1)k+s} W_{(i-1)k+s}] \quad (7.11.2)$$

λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι η στοχαστική ανέλιξη Y_i είναι στάσιμη, καθώς και ότι η παράμετρος e_i είναι περιοδικά μεταβαλλόμενη με περίοδο k , οδηγούμαστε στην σχέση

$$E[X_{(i-1)k+s} X_{(i-1)k+s}] = (e_s)^2 E[Y_i Y_i] + E[W_{(i-1)k+s} W_{(i-1)k+s}] \quad (7.11.3)$$

οπότε

¹ Βλέπε και ενότητα 2.6

$$\text{Cov}[X_{(i-1)k+s}, X_{(i-1)k+s}] = (e_s)^2 \text{Cov}[Y_i, Y_i] + \text{Cov}[W_{(i-1)k+s}, W_{(i-1)k+s}] \quad (7.11.4)$$

και

$$\text{Var}[X_{(i-1)k+s}] = (e_s)^2 \text{Var}[Y_i] + \text{Var}[W_{(i-1)k+s}] = (e_s)^2 \gamma_0 + \delta^s_0 \quad \text{για } s = 1, \dots, k \quad (7.11.5)$$

Εξίσωση διατήρησης ασυμμετρίας εποχών

Δεδομένου ότι οι μεταβλητές $Y_{(i-1)k+s}$ και $W_{(i-1)k+s}$ είναι στοχαστικά ανεξάρτητες (7.5), η στοχαστική ανέλιξη Y_i είναι στάσιμη, καθώς και ότι η παράμετρος e_i είναι περιοδικά μεταβαλλόμενη με περίοδο k , αποδεικνύεται εύκολα ότι

$$\mu_3[X_{(i-1)k+s}] = (e_s)^3 \mu_3[Y_i] + \mu_3[W_{(i-1)k+s}] \quad \text{για } s = 1, \dots, k \quad (7.12)$$

Εξίσωση διατήρησης της συνδιασποράς μίας εποχής με την προηγούμενή της

Όπως αποδεικνύεται στην συνέχεια, η συνδιασπορά της κάθε εποχής s ($s = 1, \dots, k$) με την προηγούμενή της $s-1$ δίδεται από την εξίσωση

$$\text{Cov}[X_{(i-1)k+s}, X_{(i-1)k+s-1}] = e_s e_{s-1} \gamma_1 + \delta^s_1 \quad \text{για } s = 1, \dots, k \quad (7.13)$$

Απόδειξη

$$X_{(i-1)k+s} X_{(i-1)k+s-1} = (e_{(i-1)k+s} Y_{(i-1)k+s} + W_{(i-1)k+s}) (e_{(i-1)k+s-1} Y_{(i-1)k+s-1} + W_{(i-1)k+s-1}) \quad (7.13.1)$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν την (7.5) καταλήγουμε στην εξίσωση,

$$E[X_{(i-1)k+s} X_{(i-1)k+s-1}] = e_{(i-1)k+s} e_{(i-1)k+s-1} E[Y_{(i-1)k+s} Y_{(i-1)k+s-1}] + E[W_{(i-1)k+s} W_{(i-1)k+s-1}] \quad (7.13.2)$$

Δεδομένου ότι η στοχαστική ανέλιξη Y_i είναι στάσιμη, καθώς και ότι η παράμετρος e_i είναι περιοδικά μεταβαλλόμενη με περίοδο k , οδηγούμαστε στην σχέση

$$\text{Cov}[X_{(i-1)k+s}, X_{(i-1)k+s-1}] = e_s e_{s-1} \text{Cov}[Y_i, Y_{i-1}] + \text{Cov}[W_{(i-1)k+s}, W_{(i-1)k+s-1}] \quad (7.13.3)$$

ή ισοδύναμα

$$\text{Cov}[X_{(i-1)k+s}, X_{(i-1)k+s-1}] = e_s e_{s-1} \gamma_1 + \delta^s_1 \quad \text{για } s = 1, \dots, k \quad (7.13.4)$$

Εξίσωση διατήρησης ετήσιας διασποράς

Έχοντας ορίσει την τυχαία μεταβλητή X_i , μπορούμε να ορίσουμε την τυχαία μεταβλητή Z_i που προκύπτει ως άθροισμα k διαδοχικών τυχαίων μεταβλητών X_i ,

$$Z_i = \sum_{j=(i-1)k+1}^{ik} X_j \quad (7.14)$$

Η στοχαστική ανάλυση Z_i είναι στάσιμη, γεγονός που οφείλεται στο ότι κάθε τυχαία μεταβλητή Z_i προκύπτει ως άθροισμα των k διαδοχικών τυχαίων μεταβλητών X_i μίας περιόδου. Κατά αυτόν τον τρόπο, η κυκλοστασιμότητα της μεταβλητής X_i απαλείφεται μέσω της πραγματοποιούμενης εποχιακής συναθροίσεως.

Τροποποιώντας ελάχιστα την (7.14) οδηγούμαστε στην σχέση,

$$Z_i = \sum_{s=1}^k X_{(i-1)k+s} \quad (7.15)$$

της οποίας το δεύτερο μέλος εκφράζει την στοχαστική ανάλυση Z_i ως άθροισμα k στασίμων στοχαστικών ανελίξεων $X_{(i-1)k+s}$. Όπως αποδεικνύεται στην συνέχεια, η διασπορά της τυχαίας μεταβλητής Z_i , δίδεται από την εξίσωση

$$\text{Var}[Z_i] = \gamma_0 \left(\sum_{s=1}^k (e_s)^2 \right) + 2 \sum_{s=1}^{k-1} \left(\sum_{j=s+1}^k e_s e_j \gamma_{j-s} \right) + \left(\sum_{s=1}^k \delta^s_0 \right) + 2 \left(\sum_{s=2}^k \delta^s_1 \right) \quad (7.16)$$

Απόδειξη

$$Z_i Z_i = \left(\sum_{j=(i-1)k+1}^{ik} X_j \right) \left(\sum_{j=(i-1)k+1}^{ik} X_j \right) \quad (7.16.1)$$

$$Z_i Z_i = \left(\sum_{j=(i-1)k+1}^{ik} (e_j Y_j + W_j) \right) \left(\sum_{j=(i-1)k+1}^{ik} (e_j Y_j + W_j) \right) \quad (7.16.2)$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τις (7.5) και (7.9) σε συνδυασμό με το ότι η στοχαστική ανέλιξη Y_i είναι στάσιμη, καθώς και ότι η παράμετρος e_i είναι περιοδικά μεταβαλλόμενη με περίοδο k , οδηγούμαστε στην σχέση

$$E[Z_i Z_i] = E[Y_i Y_i] \left(\sum_{s=1}^k (e_s)^2 \right) + 2 \sum_{s=1}^{k-1} \left(\sum_{j=s+1}^k e_s e_j E[Y_i Y_{i-(j-s)}] \right) + \left(\sum_{s=1}^k E[W_s W_s] \right) + 2 \left(\sum_{s=2}^k E[W_s W_{s-1}] \right) \quad (7.16.3)$$

ή ισοδύναμα στις σχέσεις

$$\text{Var}[Z_i] = \text{Cov}[Z_i, Z_i] = \text{Cov}[Y_i, Y_i] \left(\sum_{s=1}^k (e_s)^2 \right) + 2 \sum_{s=1}^{k-1} \left(\sum_{j=s+1}^k e_s e_j \text{Cov}[Y_i, Y_{i-(j-s)}] \right) + \left(\sum_{s=1}^k \text{Cov}[W_s, W_s] \right) + 2 \left(\sum_{s=2}^k \text{Cov}[W_s, W_{s-1}] \right) \quad (7.16.4)$$

$$\text{Var}[Z_i] = \text{Cov}[Z_i, Z_i] = \gamma_0 \left(\sum_{s=1}^k (e_s)^2 \right) + 2 \sum_{s=1}^{k-1} \left(\sum_{j=s+1}^k e_s e_j \gamma_{j-s} \right) + \left(\sum_{s=1}^k \delta^s_0 \right) + 2 \left(\sum_{s=2}^k \delta^s_1 \right) \quad (7.16.5)$$

Εξίσωση διατήρησης ετήσιων αυτοσυνδιασπορών (διατήρηση μακροπρόθεσμης εμμονής)

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τις (7.5) και (7.9) σε συνδυασμό με το ότι η στοχαστική ανέλιξη Y_i είναι στάσιμη καθώς και ότι η παράμετρος e_i είναι περιοδικά μεταβαλλόμενη με περίοδο k , αποδεικνύεται ότι οι αυτοσυνδιασπορές της μεταβλητής Z_i για διάφορα βήματα χρονικής μετατόπισης $p > 0$ δίδονται από την εξίσωση,

$$\text{Cov}[Z_i, Z_{i-p}] = \text{Cov}[Z_i, Z_{i+p}] = \sum_{j=1}^k \sum_{s=1}^k (e_j e_s \gamma_{kp-s+j}) + U(1-p) \delta^1_1 \quad \text{για } p > 0 \quad (7.17)$$

όπου $U(x)$ η βηματική συνάρτηση Heaviside για την οποία ισχύει $U(x) = 1 \forall x \in [0, \infty)$ και $U(x) = 0 \forall x \in (-\infty, 0)$.

Από την (7.17) με αλγεβρικές πράξεις καταλήγουμε στην εξίσωση,

$$\text{Cov}[Z_i, Z_{i-p}] = \sum_{j=1}^k \sum_{s=1}^k (e_j e_{k+1-s} \gamma_{k(p-1)+s+j-1}) + U(1-p) \delta^1_1 \quad \text{για } p > 0 \quad (7.18)$$

και στην συνέχεια στην εξίσωση,

$$\text{Cov}[Z_i, Z_{i-p}] = \sum_{l=1}^{k-1} \left[\left(\sum_{s=1}^{k-l} e_s e_{s+l} \right) (\gamma_{kp-l} + \gamma_{kp+l}) \right] + \gamma_{kp} \left(\sum_{s=1}^k (e_s)^2 \right) + U(1-p) \delta^1_1$$

για $p > 0$ (7.19)

η οποία είναι ισοδύναμη με την εξίσωση,

$$\text{Cov}[Z_i, Z_{i-p}] = \left\{ \sum_{l=1}^{k-1} \left[\left(\sum_{s=1}^l e_s e_{s+k-l} \right) \gamma_{k(p-1)+l} \right] \right\} + \left\{ \sum_{l=1}^{k-1} \left[\left(\sum_{s=1}^{k-l} e_s e_{s+l} \right) \gamma_{kp+l} \right] \right\} +$$

$\gamma_{kp} \left(\sum_{s=1}^k (e_s)^2 \right) + U(1-p) \delta^1_1 \quad \text{για } p > 0$ (7.20)

7.1.1 Προσδιορισμός των παραμέτρων του Splitmodel

Έχοντας διατυπώσει τις απαραίτητες εξισώσεις που πρέπει να τηρούνται ώστε το Splitmodel να επιτυγχάνει αναπαραγωγή των στατιστικών χαρακτηριστικών ενδιαφέροντος της ιστορικής χρονοσειράς, το επόμενο βήμα είναι ο προσδιορισμός των στατιστικών χαρακτηριστικών των τυχαίων μεταβλητών Y_i και W_i , καθώς και των παραμέτρων e_s ($s = 1, \dots, k$), ώστε να οριστεί πλήρως το μοντέλο (7.3).

Αν υποθέσουμε ότι θέλουμε να διατηρήσουμε τις αυτοσυνδιασπορές της τυχαίας μεταβλητής Z_i έως και χρονικό βήμα μετατόπισης $p = n \geq 1$ (δηλαδή $\text{Cov}[Z_i, Z_i]$, $\text{Cov}[Z_i, Z_{i-1}]$, ..., $\text{Cov}[Z_i, Z_{i-n}]$) με βάση κάποιο θεωρητικό αυτοσυσχετόγραμμα (π.χ. FGN), το πρόβλημα του προσδιορισμού των στατιστικών χαρακτηριστικών των μεταβλητών Y_i , W_i και των παραμέτρων e_s ($s = 1, \dots, k$) του μοντέλου ανάγεται στην επίλυση ενός μη γραμμικού συστήματος $3k+n+1$ εξισώσεων με $k(n+5)+1$ αγνώστους. Ένας τρόπος προσδιορισμού μίας λύσεως του παραπάνω συστήματος είναι η εφαρμογή κάποιας από

τις έμμεσες μεθόδους μη γραμμικής βελτιστοποίησης που περιγράφησαν στα εδάφια 3.3.5 και 3.3.6. Σε αυτήν την περίπτωση, είναι απαραίτητος ο ορισμός ενός μέτρου επιδόσεως της λύσεως που έχει επιτευχθεί σε κάθε βήμα του αλγορίθμου. Το εν λόγω μέτρο επιδόσεως (αντικειμενική συνάρτηση) θα λαμβάνει τιμή ίση με το μηδέν μόνο στην περίπτωση που οι εξισώσεις (7.11) - (7.20) τηρούνται επακριβώς και ταυτόχρονα οι προσδιορισθείσες κατά την βελτιστοποίηση μεταβλητές ελέγχου βρίσκονται εντός του χώρου των δυνατών λύσεων. Στην περίπτωση που δεν συμβαίνει κάτι τέτοιο, η αντικειμενική συνάρτηση λαμβάνει μία θετική τιμή. Ο εν λόγω τρόπος μόρφωσης της αντικειμενικής συναρτήσεως αποσκοπεί στην μετατροπή ενός προβλήματος βελτιστοποίησης με περιορισμούς σε πρόβλημα βελτιστοποίησης χωρίς περιορισμούς. Κατά αυτόν τον τρόπο, οι περιορισμοί του προβλήματος που ορίζουν το χώρο των δυνατών λύσεων αυτού ενσωματώνονται υπό την μορφή ποινών στην αντικειμενική συνάρτηση (μέθοδος των ποινών). Στην συνέχεια θα παρουσιαστούν οι απαιτούμενοι για το Splitmodel περιορισμοί, η αντικειμενική συνάρτηση που προτείνεται για αυτό, καθώς και η αναλυτική έκφραση της παραγώγου αυτής².

Περιορισμοί

Λόγω του ότι η βελτιστοποίηση των στατιστικών χαρακτηριστικών των μεταβλητών Y_i και W_i του μοντέλου (7.3) δεν παρουσιάζει κάποιο φυσικό νόημα, είναι δυνατόν κατά την βελτιστοποίηση να προκύψουν μη δυνατές τιμές αυτών των μεγεθών. Έτσι, κρίθηκε αναγκαία η εισαγωγή κάποιων περιορισμών υπό την μορφή ποινών στην αντικειμενική συνάρτηση, ώστε να αποκλειστεί έμμεσα ο χώρος των λύσεων που δεν έχουν φυσικό νόημα.

Ως γνωστόν, οι k σε αριθμό διασπορές της κυκλοστάσιμης στοχαστικής ανέλιξης W_i πρέπει να λαμβάνουν τιμές στο διάστημα $(0, \infty)$. Έτσι ένας πρώτος περιορισμός δίδεται από την σχέση,

$$\text{Var}[W_s] = \delta_0^s \geq \varepsilon_1 \text{ για } s = 1, \dots, k \text{ και } \varepsilon_1 > 0 \quad (7.21)$$

Επίσης, η διασπορά της τυχαίας μεταβλητής Y_i πρέπει να λαμβάνει τιμή στο διάστημα $(0, \infty)$, ήτοι

² Η αναλυτική έκφραση της παραγώγου της αντικειμενικής συναρτήσεως παρατίθεται με σκοπό την αποφυγή αριθμητικής παραγώγισης που επιβραδύνει τον αλγόριθμό των έμμεσων μεθόδων βελτιστοποίησης.

$$\text{Var}[Y_i] = \gamma_0 \geq \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 > 0 \quad (7.22)$$

Ακόμη, οι k σε αριθμό 1^{ns} τάξεως συντελεστές αυτοσυσχέτισης της κυκλοστάσιμης τυχαίας μεταβλητής W_i πρέπει να λαμβάνουν τιμές στο διάστημα $(-1, 1)$,

$$\left| \frac{\delta_1^s}{\sqrt{\delta_0^s \delta^{s-1}_0}} \right| \leq r_{max} \quad \text{για } s = 1, \dots, k \quad \text{και } r_{max} \in [0, 1) \quad (7.23)$$

όπου με $|\cdot|$ συμβολίζεται η απόλυτη τιμή.

Ο τέταρτος κατά σειρά περιορισμός, σχετίζεται με τις αυτοσυνδιασπορές της στάσιμης τυχαίας μεταβλητής Y_i για τα πρώτα $k(n+1)-1$ βήματα χρονικής μετατόπισης (δηλαδή $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{k(n+1)-1}$). Ως γνωστόν, οι αυτοσυνδιασπορές γ_p ($p = 1, \dots, k(n+1)-1$) της τυχαίας μεταβλητής Y_i πρέπει να είναι κατά απόλυτη τιμή μικρότερες ή ίσες της διασποράς αυτής γ_0 , ήτοι

$$|\gamma_p| \leq \gamma_0 \quad \text{για } p = 1, \dots, k(n+1)-1 \quad (7.24)$$

Εμείς, όμως, κάνουμε χρήση ενός πιο αυστηρού περιορισμού που δίδεται από τη σχέση

$$\varepsilon_2 \leq \gamma_p \leq r_{max} \gamma_0 \quad \text{για } p = 1, \dots, k(n+1)-1, \quad r_{max} \in [0, 1) \quad \text{και } \varepsilon_2 \geq 0 \quad (7.25)$$

Ο περιορισμός (7.25) υιοθετήθηκε με σκοπό οι συντελεστές αυτοσυσχέτισης της τυχαίας μεταβλητής Y_i να είναι μικρότεροι της μονάδος και ταυτόχρονα θετικοί. Στόχος μας είναι το αυτοσυσχετόγραμμα μίας εποχής s ($s = 1, \dots, k$) της τυχαίας μεταβλητής $X_{(i-1)k+s}$, με προηγούμενες αυτής εποχές³ να παρουσιάζει θετικές τιμές και κατά το δυνατόν ομαλή μορφή (βλέπε Σχήμα 7.12).

Ένας επιπλέον περιορισμός που πρέπει να τεθεί, σχετίζεται με τους k σε αριθμό συντελεστές ασυμμετρίας της κυκλοστάσιμης στοχαστικής ανελίξεως W_i ,

$$|\zeta_w^s| = \left| \frac{\mu_3[W_s]}{(\delta_0^s)^{3/2}} \right| \leq \zeta_{max} \quad \text{για } s = 1, \dots, k \quad \text{και } \zeta_{max} > 0 \quad (7.26)$$

³ Βλέπε Σχήματα 5.20 και 6.9 των ενοτήτων 5.2 και 6.2 αντίστοιχα.

οι απόλυτες τιμές των οποίων πρέπει να έχουν ένα άνω όριο ξ_{max} με σκοπό να είναι δυνατή⁴ η συνθετική αναπαραγωγή τους από το μοντέλο του εδαφίου 7.1.4.

Όσον αφορά τα όρια ε_1 , ε_2 , r_{max} , και ξ_{max} επισημαίνουμε ότι δεν μπορούν να οριστούν κάποιες σταθερές τιμές. Κατά την εφαρμογή του μοντέλου (ενότητα 7.2) υιοθετήθηκαν οι τιμές $\varepsilon_1 = 0.05$, $\varepsilon_2 = 0.001$, $r_{max} = 0.9$ και $\xi_{max} = 5$ που έδωσαν ικανοποιητικά αποτελέσματα κατά την βελτιστοποίηση. Αξίζει να τονίσουμε ότι το όριο ξ_{max} είναι το πιο ευαίσθητο από όλα τα προαναφερθέντα όρια, αφού εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τα στατιστικά χαρακτηριστικά του ιστορικού δείγματος του οποίου τις ασυμμετρίες θέλουμε να αναπαράγουμε συνθετικά. Μάλιστα, το όριο ξ_{max} πρέπει να είναι μεγαλύτερο του μεγαλύτερου κατά απόλυτη τιμή εποχιακού συντελεστή ασυμμετρίας της ιστορικής χρονοσειράς.

Αντικειμενική συνάρτηση

Ορίζουμε ως ζ το προς βελτιστοποίηση διάνυσμα, διαστάσεως $k(n+5)+1$, των στατιστικών χαρακτηριστικών των μεταβλητών Y_i , W_i και των παραμέτρων e_s ($s = 1, \dots, k$) του μοντέλου (7.3),

$$\zeta = [e_1, \dots, e_k, \delta^1_0, \dots, \delta^k_0, \delta^1_1, \dots, \delta^k_1, \mu_3[Y], \mu_3[W_1], \dots, \mu_3[W_k], \gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{k(n+1)-1}]^T$$

για $n \geq 1$ (7.27)

όπου με τον άνω δείκτη T συμβολίζεται το ανάστροφο ενός διανύσματος ή πίνακα. Ορίζουμε ακόμη τα μεγέθη,

$$\theta_1 = [\text{Var}[X_1], \text{Var}[X_2], \dots, \text{Var}[X_k]]^T \quad (7.28)$$

$$\theta_2 = [\mu_3[X_1], \mu_3[X_2], \dots, \mu_3[X_k]]^T \quad (7.29)$$

$$\theta_3 = [\text{Cov}[X_k, X_1], \text{Cov}[X_1, X_2], \dots, \text{Cov}[X_{k-1}, X_k]]^T \quad (7.30)$$

$$\theta_4 = [\text{Cov}[Z_i, Z_i], \text{Cov}[Z_i, Z_{i-1}], \dots, \text{Cov}[Z_i, Z_{i-n}]]^T \quad (7.31)$$

⁴ Αφύσικα υψηλοί συντελεστές ασυμμετρίας είναι δύσκολο να αναπαραχθούν λόγω του πεπερασμένου μήκους των πραγματοποιήσεων του λευκού θορύβου που είναι δυνατόν να παράγουμε συνθετικά (Todini 1980).

των στατιστικών χαρακτηριστικών του ιστορικού δείγματος, καθώς και τα μεγέθη $\tilde{\theta}_1(\zeta)$, $\tilde{\theta}_2(\zeta)$, $\tilde{\theta}_3(\zeta)$, $\tilde{\theta}_4(\zeta)$, που ορίζονται κατ' αντιστοιχία με τα μεγέθη θ_1 , θ_2 , θ_3 , θ_4 και μπορούν να προσδιοριστούν από τις εξισώσεις (7.11) - (7.20), του μοντέλου (7.3).

Σε αυτήν την περίπτωση, η προς ελαχιστοποίηση αντικειμενική συνάρτηση λαμβάνει την μορφή,

$$J(\zeta^*) = \min[J(\zeta)] = \lambda_1 \|\tilde{\theta}_1(\zeta) - \theta_1\|^2 + \lambda_2 \|\tilde{\theta}_2(\zeta) - \theta_2\|^2 + \lambda_3 \|\tilde{\theta}_3(\zeta) - \theta_3\|^2 + \lambda_4 \|\tilde{\theta}_4(\zeta) - \theta_4\|^2 + h_1(\zeta) + h_2(\zeta) + h_3(\zeta) + h_4(\zeta) + h_5(\zeta) \quad (7.32)$$

όπου $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ και λ_4 θετικοί συντελεστές βάρους της αντικειμενικής συναρτήσεως, $\|\cdot\|$ η ευκλείδεια νόρμα διανύσματος και $h_1(\zeta), h_2(\zeta), h_3(\zeta), h_4(\zeta), h_5(\zeta)$ όροι ποινής για την μη τήρηση των περιορισμών (7.21), (7.22), (7.23), (7.25) και (7.26).

Ο όρος $h_1(\zeta)$ εξασφαλίζει την τήρηση των περιορισμών (7.21), (7.22) και δίδεται από την εξίσωση,

$$h_1(\zeta) = \kappa_1 \left[\sum_{s=1}^k (U(\varepsilon_1 - \delta^s_0) (\delta^s_0 - \varepsilon_1)^2) + U(\varepsilon_1 - \gamma_0) (\gamma_0 - \varepsilon_1)^2 \right] \quad (7.33)$$

όπου κ_1 ένας υψηλός θετικός συντελεστής ποινής και $U(x)$ η βηματική συνάρτηση Heaviside, για την οποία ισχύει $U(x) = 1 \forall x \in [0, \infty)$ και $U(x) = 0 \forall x \in (-\infty, 0)$.

Ο όρος $h_2(\zeta)$ εξασφαλίζει την τήρηση του περιορισμού (7.23) και δίδεται από την εξίσωση,

$$h_2(\zeta) = \kappa_2 \|\tilde{\theta}_5(\zeta)\|^2 \quad (7.34)$$

όπου κ_2 ένας υψηλός θετικός συντελεστής ποινής και $\tilde{\theta}_5(\zeta)$ διάνυσμα με k στοιχεία, τα οποία λαμβάνονται από τον αναδρομικό τύπο

$$\theta_5^j = U\{(\delta_1^j)^2 - (r_{max})^2 \delta_0^j \delta_0^{j-1}\} \{(\delta_1^j)^2 - (r_{max})^2 \delta_0^j \delta_0^{j-1}\} \quad \text{για } j = 1, \dots, k \quad (7.35)$$

Οι όροι $h_3(\zeta)$ και $h_4(\zeta)$ εξασφαλίζουν την τήρηση του περιορισμού (7.25). Ο όρος $h_3(\zeta)$ δίδεται από την σχέση,

$$h_3(\zeta) = \kappa_3 \sum_{j=1}^{k(n+1)-1} (U(\varepsilon_2 - \gamma_j) (\gamma_j - \varepsilon_2)^2) \quad (7.36)$$

όπου κ_3 ένας υψηλός θετικός συντελεστής ποινής, και ο όρος $h_4(\zeta)$ από την σχέση,

$$h_4(\zeta) = \kappa_4 \sum_{j=1}^{k(n+1)-1} (U(\gamma_j - r_{max} \gamma_0) (\gamma_j - r_{max} \gamma_0)^2) \quad (7.37)$$

όπου κ_4 ένας επίσης υψηλός θετικός συντελεστής ποινής.

Ο όρος $h_5(\zeta)$ εξασφαλίζει την τήρηση του περιορισμού (7.26) και δίδεται από την εξίσωση,

$$h_5(\zeta) = \kappa_5 \sum_{s=1}^k [U\{(\mu_3[W_s])^2 - (\zeta_{max})^2 (\delta_0^s)^3\} \{(\mu_3[W_s])^2 - (\zeta_{max})^2 (\delta_0^s)^3\}] \quad (7.38)$$

όπου κ_5 ένας υψηλός θετικός συντελεστής ποινής.

Η αντικειμενική συνάρτηση $J(\zeta)$ λαμβάνει την τιμή μηδέν μόνο στην περίπτωση που οι εξισώσεις (7.11) - (7.20) τηρούνται επακριβώς, ενώ ταυτόχρονα τηρούνται οι περιορισμοί (7.21), (7.22), (7.23), (7.25) και (7.26). Στην αντίθετη περίπτωση, η αντικειμενική συνάρτηση λαμβάνει θετική τιμή, το μέτρο της οποίας εξαρτάται από τους υιοθετούμενους συντελεστές βάρους $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ και λ_4 , τους υιοθετούμενους συντελεστές ποινής $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4$ και κ_5 , την απόκλιση των μεγεθών $\tilde{\theta}_1(\zeta), \tilde{\theta}_2(\zeta), \tilde{\theta}_3(\zeta), \tilde{\theta}_4(\zeta)$ από τα μεγέθη του ιστορικού δείγματος $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ και τέλος από την τήρηση ή όχι των περιορισμών του προβλήματος.

Παράγωγος αντικειμενικής συναρτήσεως

Η αναλυτική έκφραση της παραγώγου της αντικειμενικής συναρτήσεως (7.32) δίδεται από την εξίσωση,

$$\frac{dJ(\zeta)}{d\zeta} = 2 \lambda_1 \{\tilde{\theta}_1(\zeta) - \theta_1\}^T \mathbf{p}_1 + 2 \lambda_2 \{\tilde{\theta}_2(\zeta) - \theta_2\}^T \mathbf{p}_2 + 2 \lambda_3 \{\tilde{\theta}_3(\zeta) - \theta_3\}^T \mathbf{p}_3 + 2 \lambda_4 \{\tilde{\theta}_4(\zeta) - \theta_4\}^T \mathbf{p}_4 + \mathbf{\varphi}_1^T + 2 \kappa_2 \tilde{\theta}_5(\zeta)^T \mathbf{p}_5 + \mathbf{\varphi}_3^T + \mathbf{\varphi}_4^T + \mathbf{\varphi}_5^T \quad (7.39)$$

όπου $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ και \mathbf{p}_5 πίνακες διαστάσεων $k \times k(n+5)+1$, \mathbf{p}_4 πίνακας διαστάσεων $n+1 \times k(n+5)+1$ και $\mathbf{\varphi}_1, \mathbf{\varphi}_3, \mathbf{\varphi}_4, \mathbf{\varphi}_5$ διανύσματα διαστάσεως $k(n+5)+1$. Στην συνέχεια παρατίθενται οι τύποι προσδιορισμού των στοιχείων των πινάκων $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4, \mathbf{p}_5$ καθώς

και των διανυσμάτων $\boldsymbol{\varphi}_1$, $\boldsymbol{\varphi}_3$, $\boldsymbol{\varphi}_4$ και $\boldsymbol{\varphi}_5$, όπως αυτοί προέκυψαν μετά από αλγεβρικούς υπολογισμούς.

Τα μη μηδενικά στοιχεία του πίνακα \mathbf{p}_1 δίδονται από τους τύπους,

$$p_1^{i,i} = 2 e_i \gamma_0 \quad \text{για } i = 1, \dots, k \quad (7.40)$$

$$p_1^{i,i+k} = 1 \quad \text{για } i = 1, \dots, k \quad (7.41)$$

$$p_1^{i,4k+2} = (e_i)^2 \quad \text{για } i = 1, \dots, k \quad (7.42)$$

Τα μη μηδενικά στοιχεία του πίνακα \mathbf{p}_2 δίδονται από τους τύπους,

$$p_2^{i,i} = 3 (e_i)^2 \mu_3[Y] \quad \text{για } i = 1, \dots, k \quad (7.43)$$

$$p_2^{i,3k+1} = (e_i)^3 \quad \text{για } i = 1, \dots, k \quad (7.44)$$

$$p_2^{i,3k+i+1} = 1 \quad \text{για } i = 1, \dots, k \quad (7.45)$$

Τα μη μηδενικά στοιχεία του πίνακα \mathbf{p}_3 δίδονται από τους τύπους,

$$p_3^{1,1} = e_k \gamma_1 \quad (7.46)$$

$$p_3^{1,k} = e_1 \gamma_1 \quad (7.47)$$

$$p_3^{1,2k+1} = 1 \quad (7.48)$$

$$p_3^{1,4k+3} = e_1 e_k \quad (7.49)$$

$$p_3^{i,i} = e_{i-1} \gamma_1 \quad \text{για } i = 2, \dots, k \quad (7.50)$$

$$p_3^{i,i-1} = e_i \gamma_1 \quad \text{για } i = 2, \dots, k \quad (7.51)$$

$$p_3^{i,i+2k} = 1 \quad \text{για } i = 2, \dots, k \quad (7.52)$$

$$p_3^{i,4k+3} = e_{i-1} e_i \quad \gamma\alpha \quad i = 2, \dots, k \quad (7.53)$$

Τα μη μηδενικά στοιχεία του πίνακα \mathbf{p}_4 δίδονται από τους τύπους,

$$p_4^{1,j} = 2 \left[e_j \gamma_0 + \left(\sum_{l=j+1}^k e_l \gamma_{l-j} \right) + \left(\sum_{l=1}^{j-1} e_l \gamma_{j-l} \right) \right] \quad \gamma\alpha \quad j = 1, \dots, k \quad (7.54)$$

$$p_4^{1,j} = 1 \quad \gamma\alpha \quad j = k+1, \dots, 2k \quad (7.55)$$

$$p_4^{1,j} = 2 \quad \gamma\alpha \quad j = 2k+2, \dots, 3k \quad (7.56)$$

$$p_4^{1,4k+2} = \sum_{l=1}^k (e_l)^2 \quad (7.57)$$

$$p_4^{1,j} = \sum_{l=1}^{5k-j+2} e_l e_{l+j-4k-2} \quad \gamma\alpha \quad j = 4k+3, \dots, 5k+1 \quad (7.58)$$

$$p_4^{2,2k+1} = 1 \quad (7.59)$$

$$p_4^{i,j} = \sum_{l=1}^k \{e_l (\gamma_{k(i-1)+j-l} + \gamma_{k(i-1)-j+l})\} \quad \gamma\alpha \quad i = 2, \dots, n+1, \quad j = 1, \dots, k \quad (7.60)$$

$$p_4^{i, k(i+2)+l+2} = U(k-1-l) \left[\sum_{s=1}^l e_s e_{k+s-l} \right] + U(-|k-l|) \left[\sum_{s=1}^k (e_s)^2 \right] + U(l-k-1) \left[\sum_{s=l-k+1}^k e_s e_{s-l+k} \right] \\ \gamma\alpha \quad i = 2, \dots, n+1, \quad l = 1, \dots, 2k-1 \quad (7.61)$$

Τα μη μηδενικά στοιχεία του πίνακα \mathbf{p}_5 δίδονται από τους τύπους,

$$p_5^{1,k+1} = - (r_{max})^2 \delta_0^k \quad (7.62)$$

$$p_5^{i,k+i} = - (r_{max})^2 \delta_0^{i-1} \quad \gamma\alpha \quad i = 2, \dots, k \quad (7.63)$$

$$p_5^{1,2k} = - (r_{max})^2 \delta_0^1 \quad (7.64)$$

$$p_5^{i,k+i-1} = - (r_{max})^2 \delta_0^i \quad \gamma\alpha \quad i = 2, \dots, k \quad (7.65)$$

$$p_5^{i, 2k+i} = 2 \delta_1^i \quad \text{για } i = 1, \dots, k \quad (7.66)$$

Τα μη μηδενικά στοιχεία του διανύσματος $\boldsymbol{\varphi}_1$ δίδονται από τους τύπους,

$$\varphi_1^{i+k} = 2 \kappa_1 U(\varepsilon_1 - \delta_0^i) (\delta_0^i - \varepsilon_1) \quad \text{για } i = 1, \dots, k \quad (7.67)$$

$$\varphi_1^{4k+2} = 2 \kappa_1 U(\varepsilon_1 - \gamma_0) (\gamma_0 - \varepsilon_1) \quad (7.68)$$

Τα μη μηδενικά στοιχεία του διανύσματος $\boldsymbol{\varphi}_3$ δίδονται από τον τύπο,

$$\varphi_3^{4k+2+i} = 2 \kappa_3 U(\varepsilon_2 - \gamma_i) (\gamma_i - \varepsilon_2) \quad \text{για } i = 1, \dots, k(n+1)-1 \quad (7.69)$$

Τα μη μηδενικά στοιχεία του διανύσματος $\boldsymbol{\varphi}_4$ δίδονται από τους τύπους,

$$\varphi_4^{4k+2} = -2 \kappa_4 \sum_{l=1}^{k(n+1)-1} [r_{max} U(\gamma_l - r_{max} \gamma_0) (\gamma_l - r_{max} \gamma_0)] \quad (7.70)$$

$$\varphi_4^{4k+2+i} = 2 \kappa_4 U(\gamma_i - r_{max} \gamma_0) (\gamma_i - r_{max} \gamma_0) \quad \text{για } i = 1, \dots, k(n+1)-1 \quad (7.71)$$

Τα μη μηδενικά στοιχεία του διανύσματος $\boldsymbol{\varphi}_5$ δίδονται από τους αναδρομικούς τύπους,

$$\varphi_5^{k+i} = -3 \kappa_5 (\zeta_{max})^2 (\delta_0^i)^2 U\{(\mu_3[W_i])^2 - (\zeta_{max})^2 (\delta_0^i)^3\} \quad \text{για } i = 1, \dots, k \quad (7.72)$$

$$\varphi_5^{3k+i+1} = 2 \kappa_5 \mu_3[W_i] U\{(\mu_3[W_i])^2 - (\zeta_{max})^2 (\delta_0^i)^3\} \quad \text{για } i = 1, \dots, k \quad (7.73)$$

7.1.2 Ελαχιστοποίηση του αριθμού των προς βελτιστοποίηση παραμέτρων του μοντέλου, με χρήση του γενικευμένου αντίστροφου μητρώου ελάχιστης νόρμας

Στις προηγούμενες σελίδες παρουσιάστηκαν η προτεινόμενη αντικειμενική συνάρτηση καθώς και η αναλυτική παράγωγός αυτής, με σκοπό τον προσδιορισμό του διανύσματος $\boldsymbol{\zeta}$ των στατιστικών χαρακτηριστικών των μεταβλητών Y_i , W_i και των

παραμέτρων e_s ($s = 1, \dots, k$) του μοντέλου (7.3), με χρήση έμμεσων μεθόδων μη γραμμικής βελτιστοποίησης.

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, το πλήθος των προς βελτιστοποίηση στοιχείων του διανύσματος ζ εξαρτάται τόσο από τον αριθμό των εποχών k της κυκλοστάσιμης στοχαστικής ανελίξεως, καθώς και από τον επιθυμητό αριθμό $n \geq 1$ των αυτοσυνδιασπορών της μεταβλητής Z_i (δηλαδή $\text{Cov}[Z_i, Z_{i-1}], \dots, \text{Cov}[Z_i, Z_{i-n}]$) που θέλουμε να διατηρήσουμε βάσει κάποιου θεωρητικού αυτοσυσχετογράμματος (π.χ. FGN). Δεδομένου ότι ο αριθμός των στοιχείων του διανύσματος ζ δίδεται από τον τύπο $k(n+5)+1$ μπορούμε να διαπιστώσουμε το μεγάλο πρόβλημα που ανακύπτει όταν ο αριθμός n λάβει υψηλή τιμή με σκοπό την διατήρηση των αυτοσυνδιασπορών της μεταβλητής Z_i για μεγάλο αριθμό βημάτων χρονικής μετατόπισης. Για παράδειγμα αν $k = 12$ (μηνιαία κλίμακα) και $n = 100$, τότε το διάνυσμα ζ έχει 1261 στοιχεία προς βελτιστοποίηση, για τα οποία απαιτείται σχετικά αυξημένος υπολογιστικός χρόνος. Σύμφωνα με όσα έχουν ήδη ειπωθεί, θα ήταν επιθυμητή ανεξαρτητοποίηση του πλήθους των στοιχείων του διανύσματος ζ από το πλήθος των προς αναπαραγωγή αυτοσυσχετίσεων της μεταβλητής Z_i με κύριο στόχο την μείωση του υπολογιστικού χρόνου της βελτιστοποίησης.

Στην συνέχεια προτείνεται μία μέθοδος επέκτασης του αυτοσυσχετογράμματος της στάσιμης τυχαίας μεταβλητής Y_i χωρίς την χρήση βελτιστοποίησης. Έχοντας προσδιορίσει μέσω βελτιστοποίησης την διασπορά και τις συνδιασπορές της μεταβλητής Y_i έως και χρονικό βήμα μετατόπισης $k(n+1)-1$, με $n \geq 1$ (δηλαδή $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{k(n+1)-1}$), είναι δυνατός ο προσδιορισμός των άγνωστων αυτοσυνδιασπορών της μεταβλητής Y_i για τα χρονικά βήματα μετατόπισης $k(n+1), \dots, k(m+1)-1$ με $m > n$ (δηλαδή $\gamma_{k(n+1)}, \dots, \gamma_{k(m+1)-1}$) χωρίς την χρήση βελτιστοποίησης. Το μεγάλο όφελός που αποκομίζουμε από την εν λόγω προσέγγιση είναι η ανεξαρτητοποίηση του πλήθους των προς βελτιστοποίηση στοιχείων του διανύσματος ζ από τον αριθμό των προς διατήρηση αυτοσυνδιασπορών της τυχαίας μεταβλητής Z_i . Κατά αυτόν τον τρόπο, είναι δυνατόν να βελτιστοποιήσουμε το διάνυσμα ζ με τον ελάχιστο δυνατό αριθμό αυτοσυνδιασπορών της τυχαίας μεταβλητής Y_i (δηλαδή $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{2k-1}$), που δίδεται για $\min(n) = 1$, και στην συνέχεια να υπολογίσουμε τις επιπλέον απαιτούμενες αυτοσυνδιασπορές της μεταβλητής Y_i (δηλαδή $\gamma_{2k}, \dots, \gamma_{k(m+1)-1}$) ώστε να επιτύχουμε διατήρηση των αυτοσυνδιασπορών της τυχαίας μεταβλητής Z_i , βάσει κάποιου θεωρητικού αυτοσυσχετογράμματος (π.χ. FGN), έως και χρονικό βήμα μετατόπισης m (δηλαδή $\text{Cov}[Z_i, Z_i], \text{Cov}[Z_i, Z_{i-1}], \dots, \text{Cov}[Z_i, Z_{i-m}]$).

Η μέθοδος η οποία προτείνεται είναι η επίλυση ενός γραμμικού συστήματος $m-n$ εξισώσεων με $k(m-n)$ αγνώστους που περιγράφεται από την εξίσωση,

$$\mathbf{c} \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{d} \quad (7.74)$$

όπου \mathbf{c} πίνακας διαστάσεων $m-n \times k(m-n)$, $\boldsymbol{\gamma} = [\gamma_{k(n+1)}, \gamma_{k(n+1)+1}, \dots, \gamma_{k(m+1)-1}]^T$ το διάνυσμα των άγνωστων αυτοσυνδιασπορών της τυχαίας μεταβλητής Y_i και \mathbf{d} γνωστό διάνυσμα διαστάσεως $m-n$. Στην συνέχεια παρατίθενται οι τύποι υπολογισμού των στοιχείων του πίνακα \mathbf{c} καθώς και του διανύσματος \mathbf{d} , όπως αυτοί προέκυψαν κατόπιν αλγεβρικών υπολογισμών από την (7.20).

Τα μη μηδενικά στοιχεία του πίνακα \mathbf{c} δίδονται από τύπους

$$c^{1,j} = U(1-j) \left[\sum_{s=1}^k (e_s)^2 \right] + U(j-2) U(k-j) \left[\sum_{s=1}^{k-j+1} e_s e_{s+j-1} \right] \quad \text{για } j = 1, \dots, k(m-n) \quad (7.75)$$

$$c^{i, (i-2)k+l+1} = U(k-1-l) \left[\sum_{s=1}^l e_s e_{s+k-l} \right] + U(-|k-l|) \left[\sum_{s=1}^k (e_s)^2 \right] + U(l-k-1) \left[\sum_{s=1}^{2k-l} e_s e_{s+l-k} \right] \\ \text{για } i = 2, \dots, m-n \text{ και } l = 1, \dots, 2k-1 \quad (7.76)$$

όπου $U(x)$ η βηματική συνάρτηση Heaviside.

Τα στοιχεία του διανύσματος \mathbf{d} δίδονται από τον τύπο,

$$d^j = \text{Cov}[Z_i, Z_{i-(n+j)}] - U(1-j) \sum_{l=1}^{k-1} \left\{ \left[\sum_{s=1}^{k-l} e_s e_{s+l} \right] \gamma_{kn+l} \right\} \quad \text{για } j = 1, \dots, m-n \quad (7.77)$$

όπου οι όροι $\text{Cov}[Z_i, Z_{i-(n+j)}]$ ($j = 1, \dots, m-n$) μπορούν να προσδιοριστούν βάσει κάποιου θεωρητικού αυτοσυσχετογράμματος (π.χ. FGN), και ο όρος $\sum_{l=1}^{k-1} \left\{ \left[\sum_{s=1}^{k-l} e_s e_{s+l} \right] \gamma_{kn+l} \right\}$ μπορεί να υπολογιστεί από τις αυτοσυνδιασπορές της μεταβλητής Y_i που έχουν ήδη προσδιοριστεί από την βελτιστοποίηση του διανύσματος $\boldsymbol{\zeta}$.

Η επίλυση του γραμμικού συστήματος (7.74) μπορεί να γίνει με χρήση του γενικευμένου αντίστροφου μητρώου ελάχιστης νόρμας που περιγράφηκε στην ενότητα 3.4. Στην περίπτωση αυτή επιλύεται αρχικά το γραμμικό σύστημα,

$$\tilde{\mathbf{c}} \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{d} \quad (7.78)$$

όπου

$$\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{c} \mathbf{c}^T \quad (7.79)$$

με στόχο τον προσδιορισμό του διανύσματος $\boldsymbol{\lambda}$, και στην συνέχεια προσδιορίζεται το διάνυσμα $\boldsymbol{\gamma}$ από την εξίσωση

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{c}^T \boldsymbol{\lambda} \quad (7.80)$$

Όπως εύκολα μπορεί να αποδειχθεί, λόγω της ειδικής μορφή του πίνακα \mathbf{c} ο προκύπτων πίνακας $\tilde{\mathbf{c}}$ είναι τριςδιαγώνιος και έτσι η επίλυση του συστήματος (7.78) μπορεί να γίνει με την μέθοδο Thomas που περιγράφηκε στο εδάφιο 3.1.4 και η οποία απαιτεί ελάχιστο χρόνο για την επίλυση ακόμα και πολύ μεγάλης διαστάσεως τριςδιαγώνιων συστημάτων.

7.1.3 Αναπαγωγή των στατιστικών χαρακτηριστικών της στάσιμης τυχαίας μεταβλητής Y_i

Έχοντας πλέον προσδιορίσει την τρίτη ροπή της τυχαίας μεταβλητής Y_i μέσω βελτιστοποιήσεως, καθώς και τις αυτοσυνδιασπορές αυτής γ_p ($p = 0, 1, \dots, k(m+1)-1$) με εφαρμογή μη γραμμικής βελτιστοποιήσεως σε συνδυασμό με το γενικευμένο αντίστροφο μητρώο, είναι δυνατόν να περιγράψουμε την εν λόγω τυχαία μεταβλητή μέσω ενός μονομεταβλητού μοντέλου SMA της μορφής⁵,

$$Y_i = \sum_{j=-k(m+1)+1}^{k(m+1)-1} \alpha_{|j|} V_{i+j} \quad (7.81)$$

όπου α_j ($j = 0, \dots, k(m+1)-1$) οι παράμετροι του μοντέλου SMA και V_i στάσιμη στοχαστική ανέλιξη με μηδενική συσχέτιση ως προς τον χρόνο i ,

$$\text{Cov}[V_i, V_j] = 0 \text{ για } i \neq j \quad (7.82)$$

⁵ Βλέπε και ενότητα 2.7

μηδενική μέση τιμή⁶,

$$E[V_i] = 0 \quad (7.83)$$

μοναδιαία διασπορά,

$$\text{Var}[V_i] = 1 \quad (7.84)$$

και συντελεστή ασυμμετρίας ξ_v που δίδεται από την σχέση,

$$\left(\sum_{j=-k(m+1)+1}^{k(m+1)-1} \alpha_j^3 \right) \xi_v = \mu_3[Y_i] \quad (7.85)$$

Ο προσδιορισμός των παραμέτρων α_j ($j = 0, \dots, k(m+1)-1$) του μοντέλου SMA είναι δυνατόν να γίνει αναλυτικά⁷ με χρήση του φάσματος $s_\gamma(\omega)$ των αυτοσυνδιασπορών γ_p ($p = 0, 1, \dots, k(m+1)-1$) της τυχαίας μεταβλητής Y_i . Αρχικά προσδιορίζεται το $s_\gamma(\omega)$ από τον τύπο,

$$s_\gamma(\omega) := 2 \gamma_0 + 4 \sum_{j=1}^{k(m+1)-1} \gamma_j \cos(2\pi j\omega) = 2 \sum_{j=-k(m+1)+1}^{k(m+1)-1} \gamma_j \cos(2\pi j\omega) \quad , \quad \omega \in [0, \frac{1}{2}] \quad (7.86)$$

στην συνέχεια προσδιορίζεται το φάσμα $s_a(\omega)$ των παραμέτρων α_j ($j = 0, \dots, k(m+1)-1$) του μοντέλου SMA από την εξίσωση,

$$s_a(\omega) = \sqrt{2 s_\gamma(\omega)} \quad (7.87)$$

και τέλος με ολοκλήρωση του φάσματος $s_a(\omega)$ στο πεδίο των συχνοτήτων (αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier),

⁶ ως συνέπεια της (7.7)

⁷ Βλέπε και ενότητα 2.7

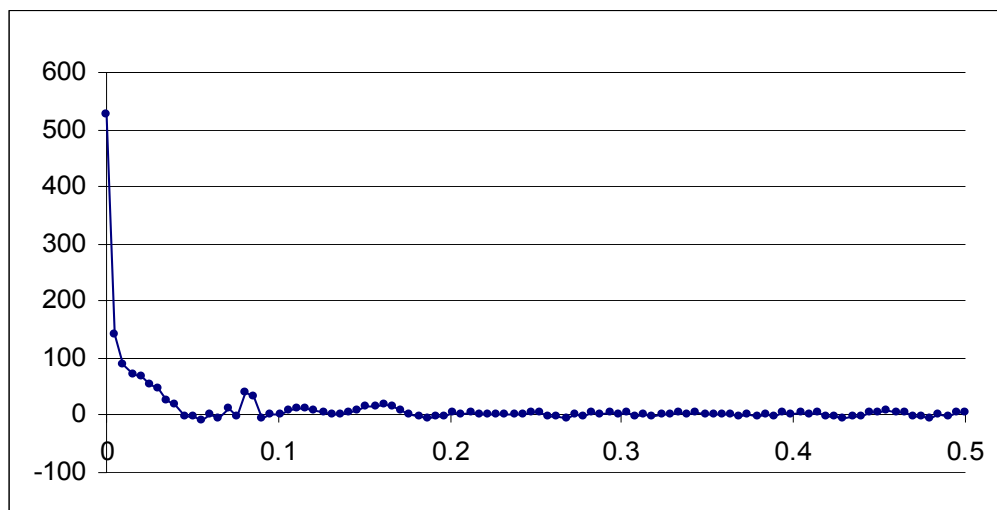
$$\alpha_j = \int_0^{1/2} s_a(\omega) \cos(2\pi j\omega) d\omega \quad \text{για } j=0, 1, 2, \dots, k(m+1)-1 \quad (7.88)$$

προσδιορίζονται οι παράμετροι α_j ($j = 0, \dots, k(m+1)-1$) του μοντέλου SMA. Απαραίτητη προϋπόθεση για τον αναλυτικό προσδιορισμό των παραμέτρων α_j του μοντέλου, είναι ο πίνακας των αυτοσυνδιασπορών της στάσιμης τυχαίας μεταβλητής Y_i να είναι θετικά ορισμένος ή θετικά ημιορισμένος, ώστε

$$s_j(\omega) \geq 0 \quad \forall \omega \in [0, 1/2] \quad (7.89)$$

Στην αντίθετη περίπτωση, ο προσδιορισμός των παραμέτρων του μοντέλου SMA μπορεί να γίνει μέσω μη γραμμικής βελτιστοποίησης που περιγράφηκε στην ενότητα 2.7.

Στο σημείο αυτό αξίζει να τονίσουμε ότι κατά την εφαρμογή του Splitmodel σε φυσικές χρονοσειρές ο πίνακας των αυτοσυνδιασπορών της μεταβλητής Y_i προέκυψε μη θετικά ορισμένος, με αποτέλεσμα το φάσμα των αυτοσυνδιασπορών $s_j(\omega)$ να παρουσιάζει λίγες στο πλήθος και μικρές κατά απόλυτη τιμή αρνητικές τιμές (βλέπε Σχήμα 7.1).



Σχήμα 7.1 Φάσμα ισχύος $s_j(\omega)$ όπως αυτό προκύπτει για τα δεδομένα της εφαρμογής της ενότητας 7.2

Σε αυτήν την περίπτωση, ο προσδιορισμός των παραμέτρων α_j ($j = 0, \dots, k(m+1)-1$) του μοντέλου SMA θα μπορούσε να γίνει μέσω μη γραμμικής βελτιστοποίησης. Κάτι τέτοιο όμως δεν συνιστάται αφού:

- Ο αριθμός των παραμέτρων του μοντέλου είναι ιδιαίτερα υψηλός⁸, με αποτέλεσμα αφενός πολύ μεγάλο υπολογιστικό φόρτο και αφετέρου χαμηλή αξιοπιστία λόγω μη κυρτότητας.
- Το φάσμα $s_\gamma(\omega)$ των αυτοσυνδιασπορών της τυχαίας μεταβλητής Y_i παρουσιάζει λίγες στο πλήθος και μικρές κατά απόλυτη τιμή αρνητικές τιμές, κάτι που σημαίνει ότι τροποποιώντας ελάχιστα τις αυτοσυνδιασπορές γ_p ($p = 0, 1, \dots, k(m+1)-1$) της τυχαίας μεταβλητής Y_i και χωρίς να εισάγουμε κάποιο συστηματικό σφάλμα, μπορούμε να εξασφαλίσουμε την τήρηση του περιορισμού $s_\gamma(\omega) \geq 0 \forall \omega \in [0, \frac{1}{2}]$
- Λόγω του ότι το μητρώο των αυτοσυνδιασπορών είναι μη θετικά ορισμένο και δεν υφίσταται δυνατή λύση, ακόμα και αν εφαρμοζόταν μη γραμμική βελτιστοποίηση, η αντικειμενική συνάρτηση δεν θα μπορούσε να λάβει σε καμία περίπτωση την μηδενική τιμή. Αποτέλεσμα του παραπάνω είναι η ύπαρξη και πάλι κάποιου σφάλματος που σίγουρα δεν θα ήταν μεγαλύτερο από το σφάλμα που εισάγεται από την τροποποίηση των αυτοσυνδιασπορών γ_p ($p = 0, 1, \dots, k(m+1)-1$).

Θέλοντας λοιπόν να αποφύγουμε τον προσδιορισμό των παραμέτρων α_j ($j = 0, \dots, k(m+1)-1$) του μοντέλου SMA με χρήση μη γραμμικής βελτιστοποίησης, έγινε μία προσπάθεια εξεύρεσης μίας μεθόδου τροποποίησης των αυτοσυνδιασπορών γ_p ($p = 0, 1, \dots, k(m+1)-1$) της τυχαίας μεταβλητής Y_i με στόχο τον προσδιορισμό μίας σειράς αυτοσυνδιασπορών $\tilde{\gamma}_p$ ($p = 0, 1, \dots, k(m+1)-1$), η οποία διαφέρει ελάχιστα της γ_p ($p = 0, 1, \dots, k(m+1)-1$), τηρεί τον περιορισμό $s_\gamma(\omega) \geq 0 \forall \omega \in [0, \frac{1}{2}]$ και ταυτόχρονα μηδενίζει την απόκλιση των τροποποιημένων αυτοσυνδιασπορών $\tilde{\gamma}_0$ και $\tilde{\gamma}_1$ από τις συνδιασπορές γ_0 και γ_1 . Ο λόγος για τον οποίο επιζητάται ο μηδενισμός της αποκλίσεως των αυτοσυνδιασπορών $\tilde{\gamma}_0$ και $\tilde{\gamma}_1$ από τις αντίστοιχες γ_0 και γ_1 , οφείλεται στο ότι τα εν λόγω μεγέθη επηρεάζουν εκτός των ετήσιων αυτοσυνδιασπορών τις διασπορές των μηνών, καθώς και τις συνδιασπορές μεταξύ των μηνών για μοναδιαίο βήμα χρονικής μετατόπισης. Κατά αυτό τον τρόπο, επιζητούμε η εν λόγω τροποποίηση να επηρεάσει μόνο τις ετήσιες αυτοσυνδιασπορές και όχι τα εποχιακά στατιστικά χαρακτηριστικά της χρονοσειράς. Η προτεινόμενη διαδικασία για τον προσδιορισμό της σειράς των τροποποιημένων αυτοσυνδιασπορών $\tilde{\gamma}_p$ ($p = 0, 1, \dots, k(m+1)-1$) από την σειρά γ_p ($p = 0, 1, \dots, k(m+1)-1$) είναι η ακόλουθη:

- 1) Προσδιορίζεται το φάσμα $s_\gamma(\omega)$ των αυτοσυνδιασπορών γ_p ($p = 0, 1, \dots, k(m+1)-1$).

⁸ π.χ. για $k = 12$ και $m = 100$, ο αριθμός των παραμέτρων του μοντέλου προκύπτει $12(100+1)-1 = 1211$

- 2) Προσδιορίζεται το φάσμα $s_{\gamma}(\omega)$ των αυτοσυνδιασπορών $\tilde{\gamma}_p$ ($p = 0, 1, \dots, k(m+1)-1$) με χρήση της εξισώσεως,

$$s_{\gamma}(\omega) = \max\{s_{\gamma}(\omega), \varepsilon_3\}, \quad \forall \omega \in [0, 1/2] \text{ και } \varepsilon_3 \geq 0 \quad (7.90)$$

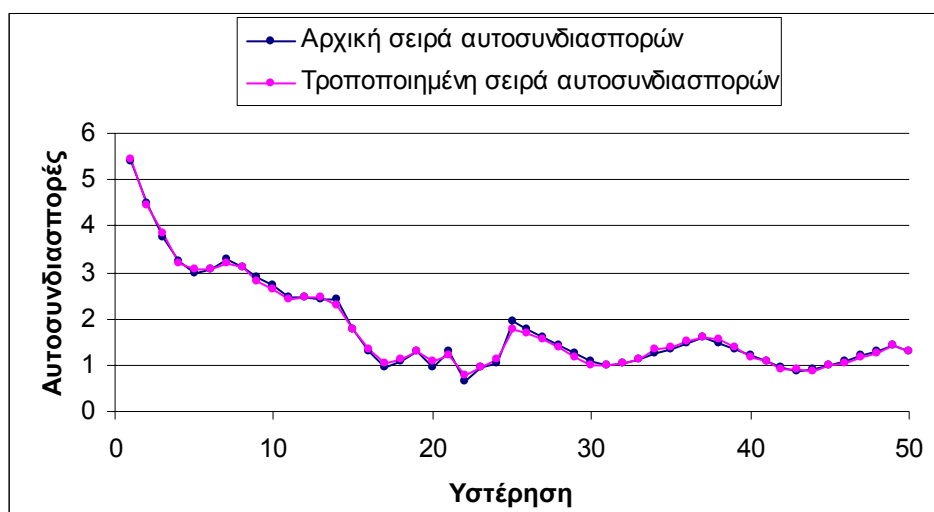
όπου ε_3 ένας μικρός θετικός αριθμός (π.χ. $\varepsilon_3 = 0.001$).

- 3) Προσδιορίζεται η σειρά των τροποποιημένων αυτοσυνδιασπορών $\tilde{\gamma}_p$ ($p = 0, 1, \dots, k(m+1)-1$) με ολοκλήρωση του φάσματος $s_{\gamma}(\omega)$ στο πεδίο των συχνοτήτων (αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier),

$$\tilde{\gamma}_j = \int_0^{1/2} s_{\gamma}(\omega) \cos(2\pi j\omega) d\omega \quad \text{για } j=0, 1, 2, \dots, k(m+1)-1 \quad (7.91)$$

- 4) Αντικαθίστανται τα στοιχεία $\tilde{\gamma}_0$ και $\tilde{\gamma}_1$ της σειράς $\tilde{\gamma}_p$ ($p = 0, 1, \dots, k(m+1)-1$) με τα στοιχεία γ_0 και γ_1 της σειράς γ_p ($p = 0, 1, \dots, k(m+1)-1$).
- 5) Αντικαθιστώντας την σειρά γ_p ($p = 0, 1, \dots, k(m+1)-1$) με την σειρά $\tilde{\gamma}_p$ ($p = 0, 1, \dots, k(m+1)-1$) που προέκυψε από το βήμα 4, επαναλαμβάνουμε τα βήματα 1- 4 έως ότου η απόκλιση των μεγεθών $\tilde{\gamma}_0$ και $\tilde{\gamma}_1$ από τα μεγέθη γ_0 και γ_1 βρεθεί εντός ανεκτών ορίων.

Στην συνέχεια παρουσιάζεται το διάγραμμα σύγκρισης της σειράς των αυτοσυνδιασπορών γ_p ($p = 0, 1, \dots, k(m+1)-1$) με την τροποποιημένη σειρά $\tilde{\gamma}_p$ ($p = 0, 1, \dots, k(m+1)-1$).



Σχήμα 7.2 Διάγραμμα σύγκρισης αυτοσυνδιασπορών πριν και μετά την προτεινόμενη τροποποίηση, για τα δεδομένα της εφαρμογής της ενότητας 7.2

Όπως γίνεται αντιληπτό, η προτεινόμενη τροποποίηση της σειράς των αυτοσυνδιασπορών εισάγει αμελητέο σφάλμα, με αποτέλεσμα να είναι δυνατή η υιοθέτησή της με κύριο στόχο την αποφυγή μη γραμμικής βελτιστοποίησης για τον προσδιορισμό των παραμέτρων α_j ($j = 0, \dots, k(m+1)-1$) του μοντέλου SMA.

7.1.4 Αναπαγωγή των στατιστικών χαρακτηριστικών της κυκλοστάσιμης στοχαστικής ανέλιξης W_i

Έχοντας πλέον προσδιορίσει (μέσω μη γραμμικής βελτιστοποίησης του διανύσματος ζ), τις k σε αριθμό διασπορές (δηλαδή $\delta^1_0, \dots, \delta^k_0$) της τυχαίας μεταβλητής W_i , τις k σε αριθμό τρίτες ροπές αυτής (δηλαδή $\mu_3[W_1], \dots, \mu_3[W_k]$), τις k σε αριθμό αυτοσυνδιασπορές αυτής για μοναδιαίο βήμα χρονικής μετατόπισης (δηλαδή $\delta^1_1, \dots, \delta^k_1$) και δεδομένης της ισχύος της (7.9), η κυκλοστάσιμη τυχαία μεταβλητή W_i , είναι δυνατόν να περιγραφεί από ένα περιοδικό μοντέλο εμπρός κινούμενου μέσου όρου PFMA (Periodic Forward Moving Average model) της μορφής,

$$W_i = f_0^i R_i + f_1^i R_{i+1} \quad (7.92)$$

όπου i το χρονικό διάστημα αναφοράς, f_0^i και f_1^i περιοδικά μεταβαλλόμενες παράμετροι του μοντέλου PFMA για τις οποίες ισχύει

$$f_j^i = f_j^{i+kl} \quad \text{για } j=0, 1, \quad i=1, \dots, k \quad \text{και } l \in \mathbb{Z}. \quad (7.93)$$

και R_i κυκλοστάσιμη στοχαστική ανέλιξη⁹,

$$R_i =_d R_{i+kl} \quad \text{για } i=1, \dots, k \quad \text{και } l \in \mathbb{Z} \quad (7.94)$$

με μηδενική συσχέτιση ως προς τον χρόνο i ,

$$\text{Cov}[R_i, R_j] = 0 \quad \text{για } i \neq j \quad (7.95)$$

⁹ Με το σύμβολο ($=_d$) υποδηλώνεται το στατιστικά όμοιο.

μηδενική μέση τιμή¹⁰,

$$E[R_i] = 0 \text{ για } i = 1, \dots, k \quad (7.96)$$

μοναδιαία διασπορά,

$$\text{Var}[R_i] = 1 \text{ για } i = 1, \dots, k \quad (7.97)$$

και τρίτη ροπή,

$$\mu_3[R_i] = \zeta_r^i \text{ για } i = 1, \dots, k \quad (7.98)$$

Στην συνέχεια παρατίθενται οι εξισώσεις που πρέπει να τηρούνται ώστε το μοντέλο PFMA να αναπαράγει, τις k σε αριθμό διασπορές (δηλαδή $\delta^1_0, \dots, \delta^k_0$) της κυκλοστάσιμης στοχαστικής ανέλιξης W_i , τις k σε αριθμό τρίτες ροπές αυτής (δηλαδή $\mu_3[W_1], \dots, \mu_3[W_k]$) και τις k σε αριθμό αυτοσυνδιασπορές αυτής για μοναδιαίο βήμα χρονικής μετατόπισης (δηλαδή $\delta^1_1, \dots, \delta^k_1$)

Εξίσωση διατήρησης διασποράς εποχών

Όπως αποδεικνύεται στην συνέχεια, η διασπορά κάθε εποχής i ($i = 1, \dots, k$) του μοντέλου (7.92) δίδεται από την εξίσωση,

$$\text{Var}[W_i] = \delta^i_0 = (f_0^i)^2 + (f_1^i)^2 \text{ για } i = 1, \dots, k \quad (7.99)$$

Απόδειξη

$$W_i W_i = (f_0^i R_i + f_1^i R_{i+1}) (f_0^i R_i + f_1^i R_{i+1}) \quad (7.99.1)$$

με χρήση της (7.95) οδηγούμαστε στην εξίσωση,

$$\begin{aligned} E[W_i W_i] = \text{Var}[W_i] &= (f_0^i)^2 E[R_i R_i] + (f_1^i)^2 E[R_{i+1} R_{i+1}] = \\ &= (f_0^i)^2 \text{Var}[R_i] + (f_1^i)^2 \text{Var}[R_{i+1}] \end{aligned} \quad (7.99.2)$$

¹⁰ Ως συνέπεια της (7.10).

και δεδομένης της ισχύος της (7.97) καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\text{Var}[W_i] = \delta_0^i = (f_0^i)^2 + (f_1^i)^2 \text{ για } i = 1, \dots, k \quad (7.99.3)$$

Εξίσωση διατήρησης ασυμμετρίας εποχών

Δεδομένου ότι οι τυχαία μεταβλητή R_i είναι ασυσχέτιστη ως προς τον χρόνο i (7.95), μπορεί να εύκολα να αποδειχθεί ότι οι k σε αριθμό τρίτες ροπές της κυκλοστάσιμης στοχαστικής ανέλιξης W_i δίδονται από την εξίσωση,

$$\mu_3[W_i] = (f_0^i)^3 \zeta_r^i + (f_1^i)^3 \zeta_r^{i+1} \text{ για } i = 1, \dots, k \quad (7.100)$$

Εξίσωση διατήρησης της συνδιασποράς μίας εποχής με την προηγούμενή της

Όπως αποδεικνύεται στην συνέχεια, η συνδιασπορά της κάθε εποχής i ($i = 1, \dots, k$) με την προηγούμενή της $i-1$ δίδεται από την εξίσωση

$$\text{Cov}[W_i, W_{i-1}] = \delta_1^i = f_0^i f_1^{i-1} \text{ για } i = 1, \dots, k \quad (7.101)$$

Απόδειξη

$$W_i W_{i-1} = (f_0^i R_i + f_1^i R_{i+1}) (f_0^{i-1} R_{i-1} + f_1^{i-1} R_i) \quad (7.101.1)$$

με χρήση της (7.95) οδηγούμαστε στην εξίσωση,

$$E[W_i W_{i-1}] = \text{Cov}[W_i, W_{i-1}] = \delta_1^i = f_0^i f_1^{i-1} E[R_i R_i] = f_0^i f_1^{i-1} \text{Var}[R_i] \quad (7.101.2)$$

και δεδομένης της ισχύος της (7.97), καταλήγουμε στην εξίσωση,

$$\text{Cov}[W_i, W_{i-1}] = \delta_1^i = f_0^i f_1^{i-1} \text{ για } i = 1, \dots, k \quad (7.101.3)$$

Προσδιορισμός παραμέτρων μοντέλου PFMA

Έχοντας διατυπώσει τις απαραίτητες εξισώσεις που πρέπει να τηρούνται ώστε το μοντέλο PFMA να επιτυγχάνει αναπαραγωγή των στατιστικών χαρακτηριστικών

ενδιαφέροντος της κυκλοστάσιμης στοχαστικής ανέλιξης W_i , το επόμενο βήμα είναι ο προσδιορισμός των παραμέτρων f_0^i και f_1^i ($i = 1, \dots, k$) του μοντέλου PFMA καθώς και των συντελεστών ασυμμετρίας ζ_r^i ($i = 1, \dots, k$) της τυχαίας μεταβλητής R_i (μεταβλητή λευκού θορύβου).

Το παραπάνω πρόβλημα ανάγεται στην επίλυση ενός μη γραμμικού συστήματος $3k$ εξισώσεων με $3k$ αγνώστους. Το προαναφερθέν σύστημα θα μπορούσε να επιλυθεί με μεθόδους αριθμητικής επίλυσεως μη γραμμικών συστημάτων αν δεν απαιτείτο η υιοθέτηση περιορισμών ως προς τους προκύπτοντες συντελεστές ασυμμετρίας ζ_r^i ($i = 1, \dots, k$) της τυχαίας μεταβλητής R_i , οι οποίοι επιζητούμε να μην υπερβαίνουν κατά απόλυτη τιμή κάποιο μέγιστο ανεκτό όριο. Άλλωστε, αφύσικα υψηλοί συντελεστές ασυμμετρίας είναι δύσκολο να αναπαραχθούν λόγω του πεπερασμένου μήκους των πραγματοποιήσεων του λευκού θορύβου που είναι δυνατόν να παράγουμε συνθετικά (Todini 1980). Έτσι για τον προσδιορισμό των παραμέτρων f_0^i και f_1^i ($i = 1, \dots, k$) του μοντέλου PFMA καθώς και των συντελεστών ασυμμετρίας ζ_r^i ($i = 1, \dots, k$) της κυκλοστάσιμης τυχαίας μεταβλητής R_i , προτείνεται η χρήση κάποιας από τις έμμεσες μεθόδους μη γραμμικής βελτιστοποίησης που περιγράφησαν στα εδάφια 3.3.5 και 3.3.6. Στην συνέχεια παρατίθενται ο απαιτούμενος περιορισμός για τους συντελεστές ασυμμετρίας ζ_r^i ($i = 1, \dots, k$), η προτεινόμενη αντικειμενική συνάρτηση για το μοντέλο PFMA, καθώς και η αναλυτική έκφραση της παραγώγου της.

Περιορισμός για τους προκύπτοντες συντελεστές ασυμμετρίας.

Με σκοπό η απόλυτη τιμή των προκύπτοντων κατά την βελτιστοποίηση συντελεστών ασυμμετρίας ζ_r^i ($i = 1, \dots, k$) να μην υπερβαίνει κάποιο άνω ανεκτό όριο ε_4 , υιοθετείται ο περιορισμός

$$|\zeta_r^i| \leq \varepsilon_4 \quad \text{για } i = 1, \dots, k \text{ και } \varepsilon_4 > 0 \quad (7.102)$$

Αντικειμενική συνάρτηση

Ορίζουμε ως η το προς βελτιστοποίηση διάνυσμα, διαστάσεως $3k$ των παραμέτρων f_0^i και f_1^i ($i = 1, \dots, k$) του μοντέλου PFMA, καθώς και των συντελεστών ασυμμετρίας ζ_r^i ($i = 1, \dots, k$) της μεταβλητής λευκού θορύβου R_i .

$$\boldsymbol{\eta} = [f_0^1, \dots, f_0^k, f_1^1, \dots, f_1^k, \zeta_r^1, \dots, \zeta_r^k]^T \quad (7.103)$$

όπου με τον άνω δείκτη T συμβολίζεται το ανάστροφο ενός διανύσματος ή πίνακα. Ορίζουμε ακόμη τα μεγέθη,

$$\boldsymbol{\theta}_6 = [\delta_0^1, \delta_0^2, \dots, \delta_0^k]^T \quad (7.104)$$

$$\boldsymbol{\theta}_7 = [\delta_1^1, \delta_1^2, \dots, \delta_1^k]^T \quad (7.105)$$

$$\boldsymbol{\theta}_8 = [\zeta_r^1, \zeta_r^2, \dots, \zeta_r^k]^T \quad (7.106)$$

των στατιστικών χαρακτηριστικών της κυκλοστάσιμης στοχαστικής ανέλιξης W_i , καθώς και τα μεγέθη $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_6(\boldsymbol{\eta})$, $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_7(\boldsymbol{\eta})$, $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_8(\boldsymbol{\eta})$, που ορίζονται κατ' αντιστοιχία με τα μεγέθη $\boldsymbol{\theta}_6$, $\boldsymbol{\theta}_7$, $\boldsymbol{\theta}_8$ και μπορούν να προσδιοριστούν από τις εξισώσεις (7.99) – (7.101) του μοντέλου (7.92).

Σε αυτήν την περίπτωση, η προς ελαχιστοποίηση αντικειμενική συνάρτηση λαμβάνει την μορφή,

$$g(\boldsymbol{\eta}^*) = \min[g(\boldsymbol{\eta})] = \lambda_6 \|\tilde{\boldsymbol{\theta}}_6(\boldsymbol{\eta}) - \boldsymbol{\theta}_6\|^2 + \lambda_7 \|\tilde{\boldsymbol{\theta}}_7(\boldsymbol{\eta}) - \boldsymbol{\theta}_7\|^2 + \lambda_8 \|\tilde{\boldsymbol{\theta}}_8(\boldsymbol{\eta}) - \boldsymbol{\theta}_8\|^2 + h_6(\boldsymbol{\eta}) \quad (7.107)$$

όπου λ_6 , λ_7 και λ_8 θετικοί συντελεστές βάρους της αντικειμενικής συναρτήσεως, $\|\cdot\|$ η ευκλείδεια νόρμα διανύσματος και $h_6(\boldsymbol{\eta})$ όρος ποινής για την μη τήρηση του περιορισμού (7.102) που μπορεί να προσδιοριστεί από την εξίσωση

$$h_6(\boldsymbol{\eta}) = \kappa_6 \left[\sum_{s=1}^k (U\{(\zeta_r^s)^2 - (\varepsilon_4)^2\} \{(\zeta_r^s)^2 - (\varepsilon_4)^2\}) \right] \quad (7.108)$$

όπου κ_6 ένας υψηλός θετικός συντελεστής ποινής και $U(x)$ η βηματική συνάρτηση Heaviside για την οποία ισχύει $U(x) = 1 \forall x \in [0, \infty)$ και $U(x) = 0 \forall x \in (-\infty, 0)$.

Παράγωγος αντικειμενικής συναρτήσεως

Η αναλυτική έκφραση της παραγώγου της αντικειμενικής συναρτήσεως (7.107) δίδεται από την εξίσωση,

$$\frac{dg(\boldsymbol{\eta})}{d\boldsymbol{\eta}} = 2 \lambda_6 \{\tilde{\boldsymbol{\theta}}_6(\boldsymbol{\eta}) - \boldsymbol{\theta}_6\}^T \mathbf{p}_6 + 2 \lambda_7 \{\tilde{\boldsymbol{\theta}}_7(\boldsymbol{\eta}) - \boldsymbol{\theta}_7\}^T \mathbf{p}_7 + 2 \lambda_8 \{\tilde{\boldsymbol{\theta}}_8(\boldsymbol{\eta}) - \boldsymbol{\theta}_8\}^T \mathbf{p}_8 + \boldsymbol{\phi}_6^T \quad (7.109)$$

όπου \mathbf{p}_6 , \mathbf{p}_7 , \mathbf{p}_8 πίνακες διαστάσεων $k \times 3k$ και $\mathbf{\Phi}_6$ διάνυσμα διαστάσεως $3k$. Στην συνέχεια παρατίθενται οι τύποι προσδιορισμού των στοιχείων των πινάκων \mathbf{p}_6 , \mathbf{p}_7 , \mathbf{p}_8 καθώς και του διανύσματος $\mathbf{\Phi}_6$, όπως αυτοί προέκυψαν μετά από αλγεβρικούς υπολογισμούς.

Τα μη μηδενικά στοιχεία του πίνακα \mathbf{p}_6 δίδονται από τους τύπους,

$$p_6^{i,i} = 2f_0^i \quad \text{για } i = 1, \dots, k \quad (7.110)$$

$$p_6^{i,i+k} = 2f_1^i \quad \text{για } i = 1, \dots, k \quad (7.111)$$

Τα μη μηδενικά στοιχεία του πίνακα \mathbf{p}_7 δίδονται από τους τύπους,

$$p_7^{1,1} = f_1^k \quad (7.112)$$

$$p_7^{i,i} = f_1^{i-1} \quad \text{για } i = 2, \dots, k \quad (7.113)$$

$$p_7^{1,2k} = f_0^1 \quad (7.114)$$

$$p_7^{i,i+k-1} = f_0^i \quad \text{για } i = 2, \dots, k \quad (7.115)$$

Τα μη μηδενικά στοιχεία του πίνακα \mathbf{p}_8 δίδονται από τους τύπους,

$$p_8^{i,i} = 3(f_0^i)^2 \zeta_r^i \quad \text{για } i = 1, \dots, k \quad (7.116)$$

$$p_8^{i,i+k} = 3(f_1^i)^2 \zeta_r^{i+1} \quad \text{για } i = 1, \dots, k-1 \quad (7.117)$$

$$p_8^{k,2k} = 3(f_1^k)^2 \zeta_r^1 \quad (7.118)$$

$$p_8^{i,i+2k} = (f_0^i)^3 \quad \text{για } i = 1, \dots, k \quad (7.119)$$

$$p_8^{i,i+2k+1} = (f_1^i)^3 \quad \text{για } i = 1, \dots, k-1 \quad (7.120)$$

$$p_8^{k,2k+1} = (f_1^k)^3 \quad (7.121)$$

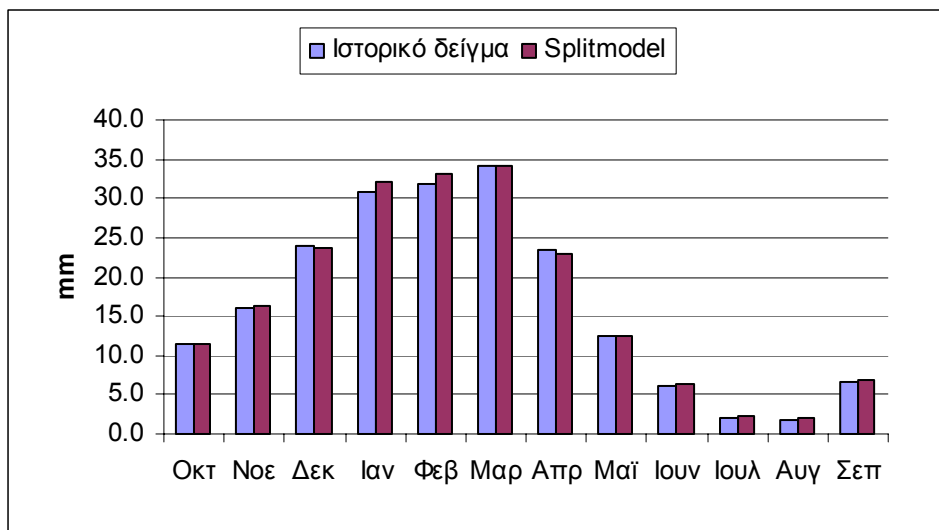
Τα μη μηδενικά στοιχεία του διανύσματος φ_6 δίδονται από τον τύπο,

$$\varphi_6^{2k+i} = 2 \kappa_6 \zeta_r^i U\{(\zeta_r^i)^2 - (\varepsilon_4)^2\} \quad \text{για } i = 1, \dots, k \quad (7.122)$$

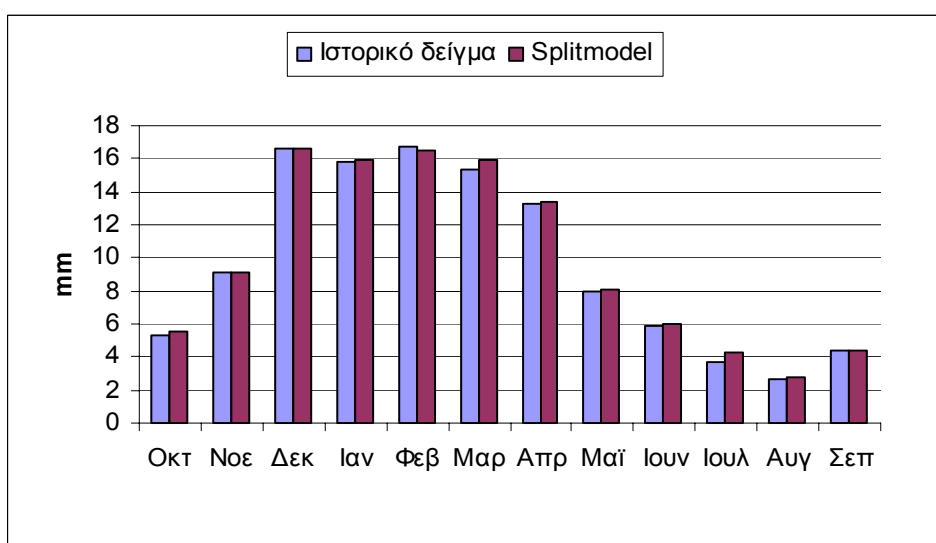
7.2 Εφαρμογή και έλεγχος του μοντέλου

Το Splitmodel εφαρμόστηκε στην αναπαραγωγή των βραχυπρόθεσμων και μακροπρόθεσμων στατιστικών χαρακτηριστικών της ιστορικής χρονοσειράς μηνιαίων υψών απορροής του Βοιωτικού Κηφισού στην θέση εξόδου του στην διώρυγα Καρδίτσας. Στα πλαίσια της εν λόγω εφαρμογής αναπτύχθηκε πρόγραμμα που παρατίθεται στο παράρτημα Z, το οποίο: (1) βελτιστοποιεί τις παραμέτρους e_s ($s = 1, \dots, k$) καθώς και τα στατιστικά χαρακτηριστικά των μεταβλητών Y_i, W_i του μοντέλου (7.3) με χρήση της μεθόδου των συζυγών κλίσεων, (2) προσδιορίζει την σειρά των αυτοσυνδιασπορών της μεταβλητής Y_i με χρήση του γενικευμένου αντίστροφου μητρώου (εδάφιο 7.1.2), (3) προσδιορίζει τις παραμέτρους του μοντέλου SMA για την αναπαραγωγή των στατιστικών χαρακτηριστικών της τυχαίας μεταβλητής Y_i (εδάφιο 7.1.3), (4) βελτιστοποιεί με χρήση της μεθόδου των συζυγών κλίσεων τις παραμέτρους f_0^i και f_1^i ($i = 1, \dots, k$) του μοντέλου PFMA, καθώς και τους συντελεστές ασυμμετρίας ζ_r^i ($i = 1, \dots, k$) της μεταβλητής λευκού θορύβου R_i (εδάφιο 7.1.4), και (5) παράγει συνθετικές χρονοσειρές σε μηνιαία κλίμακα ($k = 12$) που διατηρούν τα στατιστικά χαρακτηριστικά ενδιαφέροντος του ιστορικού δείγματος. Ο αριθμός m των βημάτων χρονικής μετατόπισης που πραγματοποιείται αναπαραγωγή των ετήσιων αυτοσυνδιασπορών επιλέχθηκε ίσος με 300 ($m = 300$). Επίσης κατά την εκτέλεση του προγράμματος λήφθηκε μέριμνα ελαχιστοποιήσεως των στοιχείων του προς βελτιστοποίηση διανύσματος ζ , με υιοθέτηση της ελάχιστης τιμής του n ($\min(n) = 1$). Συνεπώς, οι αυτοσυνδιασπορές γ_p ($p = 0, \dots, 23$) της τυχαίας μεταβλητής Y_i υπολογίστηκαν μέσω βελτιστοποιήσεως, ενώ οι αυτοσυνδιασπορές γ_p ($p = 24, \dots, 3611$) υπολογίστηκαν με χρήση της μεθόδου που περιγράφηκε στο εδάφιο 7.1.2. Στην συνέχεια παρατίθενται τα διαγράμματα σύγκρισης των στατιστικών χαρακτηριστικών του ιστορικού δείγματος με τα στατιστικά χαρακτηριστικά της συνθετικής χρονοσειράς που παρήχθη με χρήση του Splitmodel. Επισημαίνεται ότι τα στατιστικά χαρακτηριστικά της συνθετικής χρονοσειράς έχουν προέλθει από στοχαστική προσομοίωση μήκους 5000 ετών.

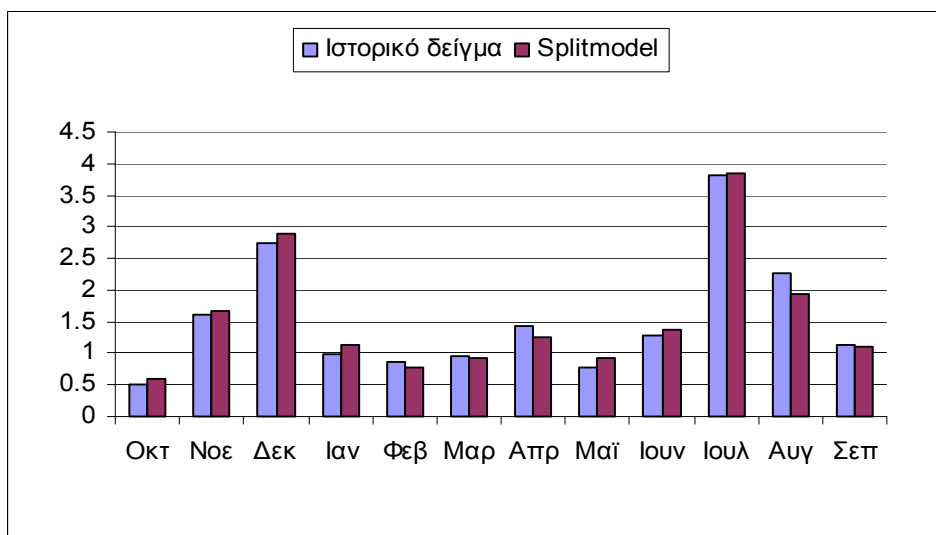
Στα Σχήματα 7.3, 7.4 και 7.5 μπορούμε να παρατηρήσουμε την αξιόπιστη αναπαραγωγή των μέσων τιμών, των τυπικών αποκλίσεων και των συντελεστών ασυμμετρίας των μηνών του ιστορικού δείγματος από το Splitmodel.



Σχήμα 7.3 Ραβδόγραμμα σύγκρισης των μηνιαίων μέσων τιμών του ιστορικού και του συνθετικού δείγματος απορροών

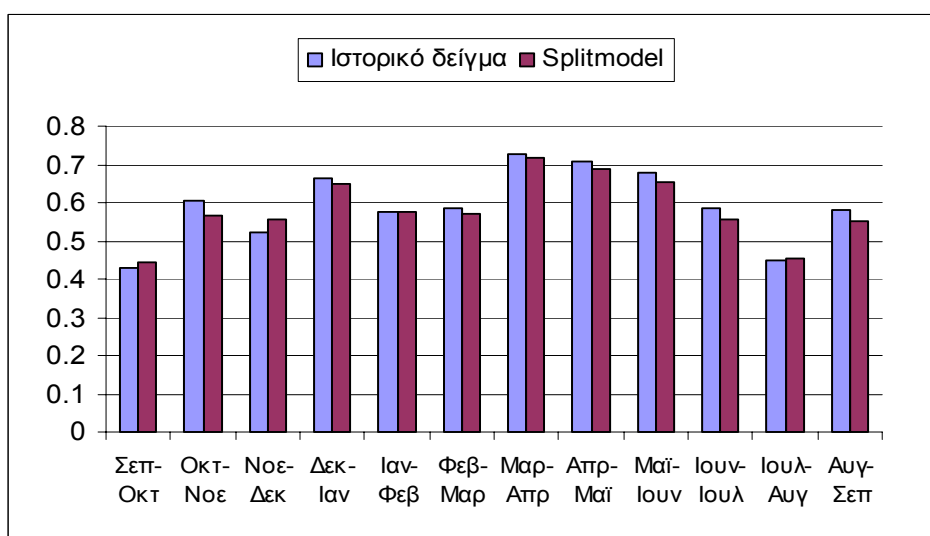


Σχήμα 7.4 Ραβδόγραμμα σύγκρισης των μηνιαίων τυπικών αποκλίσεων του ιστορικού και του συνθετικού δείγματος απορροών



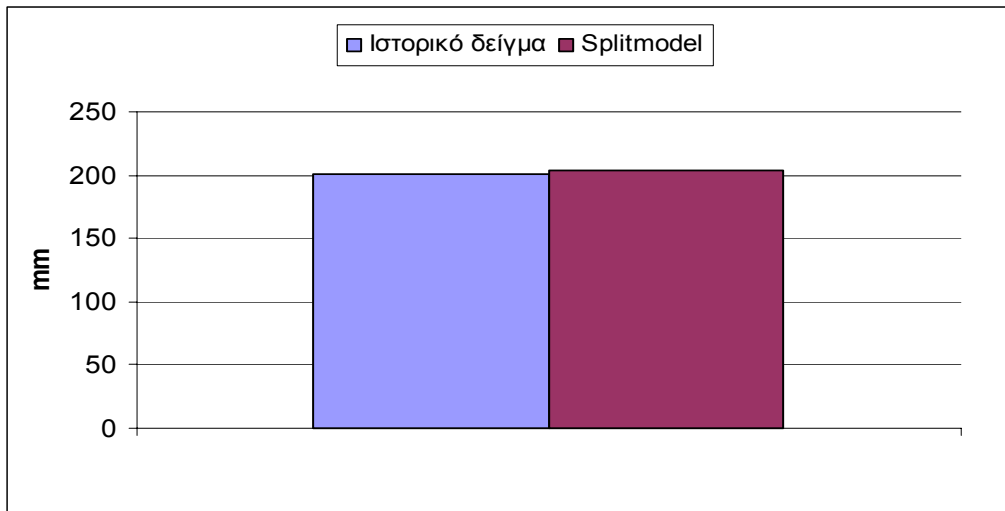
Σχήμα 7.5 Ραβδόγραμμα σύγκρισης των μηνιαίων συντελεστών ασυμμετρίας του ιστορικού και του συνθετικού δείγματος απορροών

Στο Σχήμα 7.6 παρουσιάζονται οι συντελεστές συσχέτισης για μοναδιαίο βήμα χρονικής μετατόπισης των μηνών του ιστορικού και του συνθετικού δείγματος απορροών. Η αναπαραγωγή των εν λόγω στατιστικών μεγεθών από το Splitmodel είναι ακριβής.

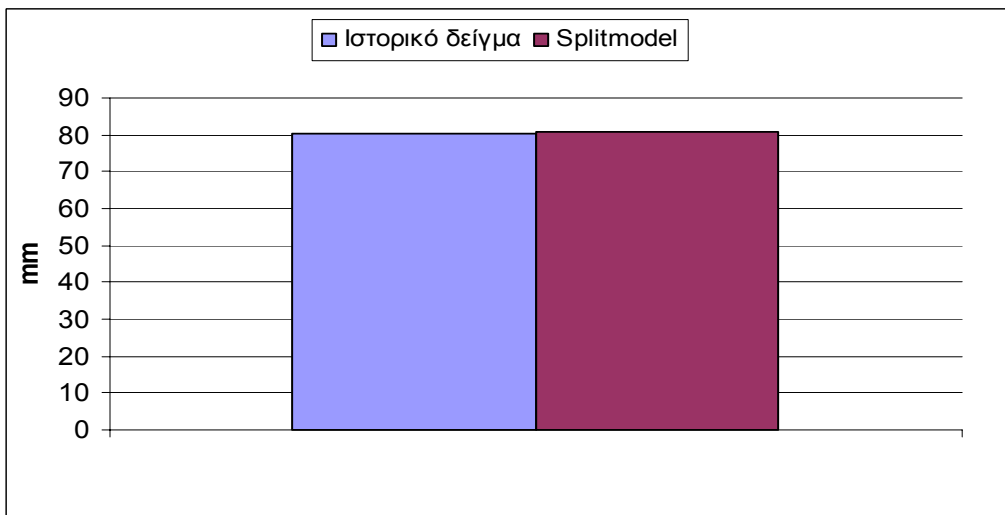


Σχήμα 7.6 Ραβδόγραμμα σύγκρισης των συντελεστών συσχέτισης για μοναδιαίο βήμα χρονικής μετατόπισης των μηνών του ιστορικού και του συνθετικού δείγματος απορροών (συντελεστές συσχέτισης των απορροών ενός μήνα με τις απορροές του προηγούμενου μήνα)

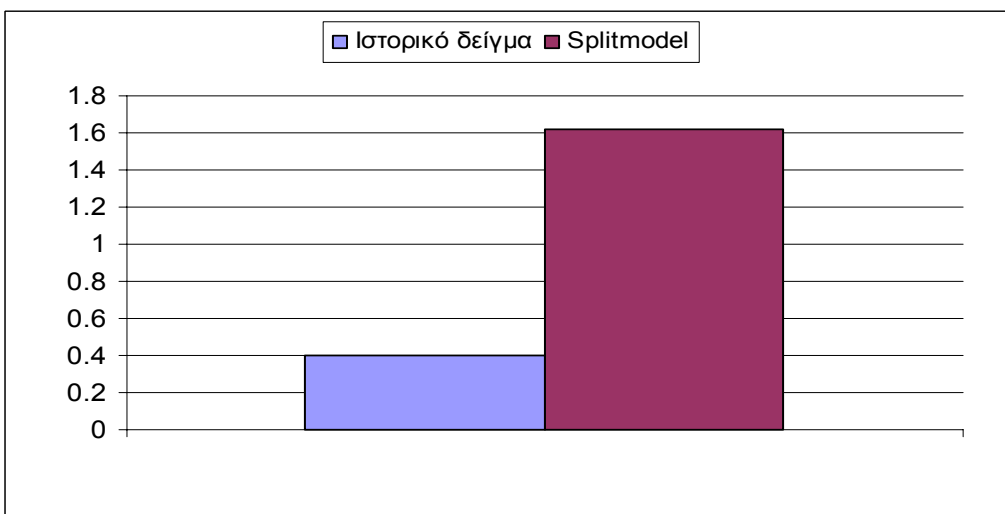
Στα Σχήματα 7.7, 7.8 και 7.9 πραγματοποιείται η σύγκριση της μέσης τιμής, της τυπικής απόκλισης και του συντελεστή ασυμμετρίας της ετήσιας ιστορικής χρονοσειράς με τα αντίστοιχα στατιστικά χαρακτηριστικά της συνθετικής χρονοσειράς.



Σχήμα 7.7 Ραβδόγραμμα σύγκρισης των ετήσιων μέσων τιμών του ιστορικού και του συνθετικού δείγματος απορροών



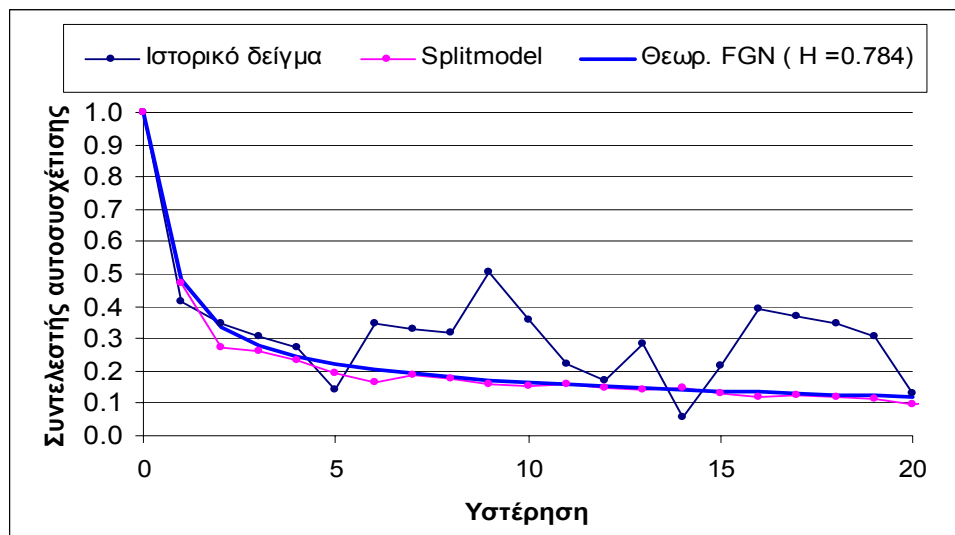
Σχήμα 7.8 Ραβδόγραμμα σύγκρισης των ετήσιων τυπικών αποκλίσεων του ιστορικού και του συνθετικού δείγματος απορροών



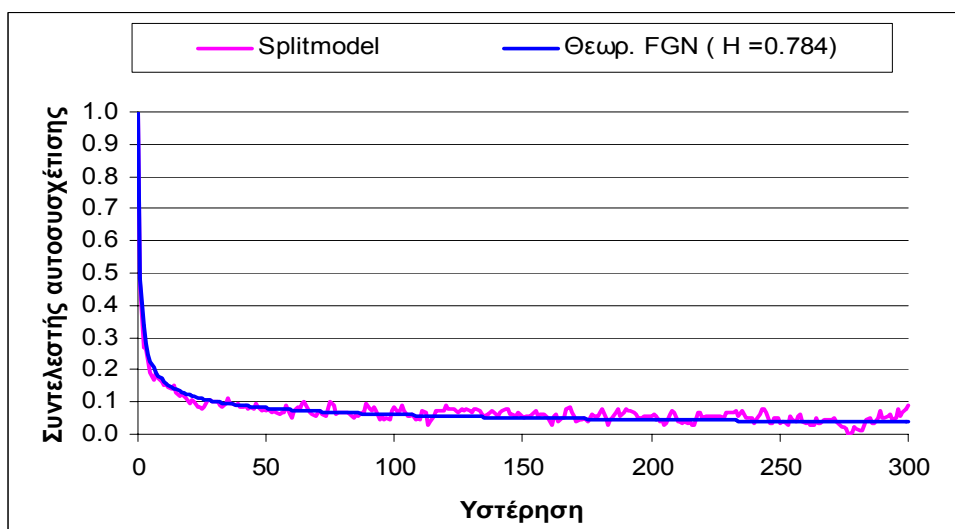
Σχήμα 7.9 Ραβδόγραμμα σύγκρισης των ετήσιων συντελεστών ασυμμετρίας του ιστορικού και του συνθετικού δείγματος απορροών

Όπως είναι προφανές το Splitmodel διατηρεί με μεγάλη ακρίβεια την ετήσια μέση τιμή και την ετήσια τυπική απόκλιση του ιστορικού δείγματος αλλά δεν είναι σε θέση να διατηρήσει τον ετήσιο συντελεστή ασυμμετρίας. Κάτι τέτοιο ήταν αναμενόμενο, αφού κατά τον ορισμό του μοντέλου δεν συμπεριλάβαμε την ετήσια ασυμμετρία στα προς αναπαραγωγή, από το μοντέλο, στατιστικά χαρακτηριστικά του ιστορικού δείγματος.

Στα Σχήματα 7.10 και 7.11 παρουσιάζονται τα διαγράμματα σύγκρισης του εμπειρικού αυτοσυσχετογράμματος της ετήσιας ιστορικής χρονοσειράς με το θεωρητικό αυτοσυσχετόγραμμα FGN (όπως αυτό προκύπτει συναρτήσει του συντελεστή Hurst της χρονοσειράς των απορροών) και με το εμπειρικό αυτοσυσχετόγραμμα της ετήσιας συνθετικής χρονοσειράς που προέκυψε από την εφαρμογή του Splitmodel.



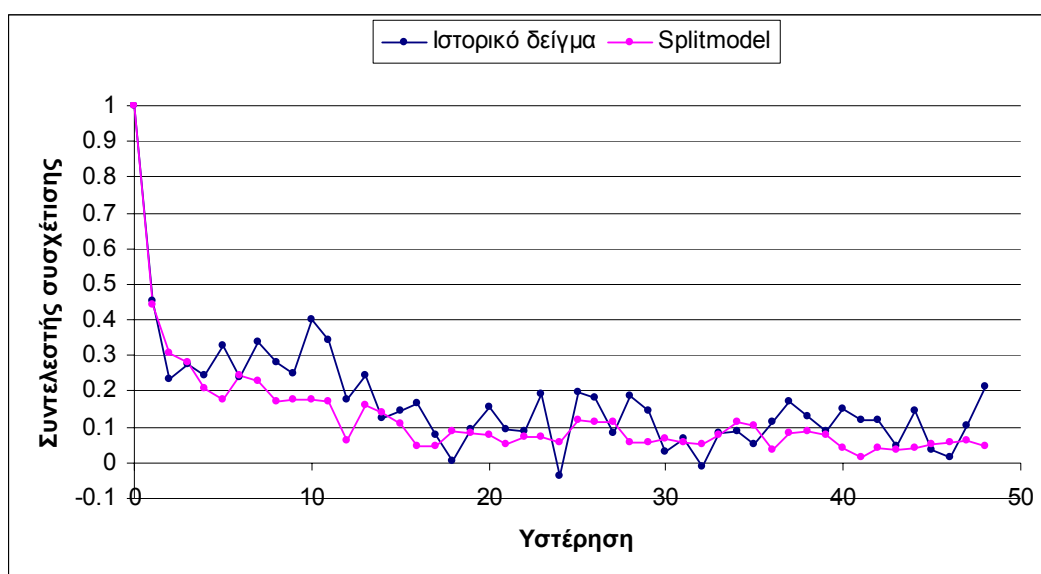
Σχήμα 7.10 Διάγραμμα σύγκρισης των συντελεστών αυτοσυσχέτισης για τα 20 πρώτα βήματα χρονικής μετατόπισης της ετήσιας ιστορικής και συνθετικής χρονοσειράς απορροών



Σχήμα 7.11 Διάγραμμα σύγκρισης των συντελεστών αυτοσυσχέτισης της ετήσιας συνθετικής χρονοσειράς απορροών με το θεωρητικό αυτοσυσχετόγραμμα FGN

Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε την επιτυχία του μοντέλου στην διατήρηση της μακροπρόθεσμης εμμονής της ετήσιας ιστορικής χρονοσειράς.

Στο Σχήμα 7.12 παρουσιάζεται το διάγραμμα των συντελεστών συσχέτισης του μήνα Οκτωβρίου με προηγούμενους αυτού μήνες, τόσο για την ιστορική όσο και για τη συνθετική χρονοσειρά απορροών. Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι το εν λόγω διάγραμμα της συνθετικής χρονοσειράς παρουσιάζει μόνο θετικές τιμές και γενικά ομαλή μορφή, όπως άλλωστε ήταν αναμενόμενο από την υιοθέτηση του περιορισμού (7.25).



Σχήμα 7.12 Διάγραμμα συντελεστών συσχέτισης του μήνα Οκτωβρίου με προηγούμενους αυτού μήνες για την ιστορική και την συνθετική χρονοσειρά απορροών

7.3 Σχόλια πάνω στο μοντέλο.

Το Splitmodel είναι ένα κυκλοστάσιμο στοχαστικό μοντέλο που εξασφαλίζει την διατήρηση της βραχυπρόθεσμης μνήμης και της μακροπρόθεσμης εμμονής κυκλοστάσιμων στοχαστικών ανελιξέων. Μπορεί να αναπαράγει με ακρίβεια τις εποχιακές μέσες τιμές, τυπικές αποκλίσεις, συντελεστές ασυμμετρίας και 1^{ης} τάξεως συντελεστές αυτοσυσχέτισης μεταξύ των εποχών, καθώς και την ετήσια μέση τιμή, την ετήσια τυπική απόκλιση και την μακροπρόθεσμη μνήμη (εμμονή) της ετήσιας ιστορικής χρονοσειράς (με χρήση κάποιου θεωρητικού αυτοσυσχετογράμματος). Το μαθηματικό υπόβαθρο του μοντέλου είναι αρκετά πολύπλοκο, αλλά κάτι τέτοιο δεν αφορά τον απλό χρήστη, αφού όλες οι απαραίτητες για την εφαρμογή του μοντέλου εξισώσεις δίδονται και μπορούν να προγραμματιστούν κατά τρόπο απλό. Το μοντέλο απαιτεί δύο μη γραμμικές βελτιστοποιήσεις παραμέτρων και την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος

με την μέθοδο του γενικευμένου αντίστροφου μητρώου. Παρόλα αυτά οι απαιτούμενοι υπολογιστικοί χρόνοι είναι ιδιαίτερα μικροί αφού: (1) οι βελτιστοποιήσεις απαιτούν ελάχιστο χρόνο (της τάξεως των μερικών λεπτών), (2) η επίλυση του γραμμικού συστήματος απαιτεί μερικά δευτερόλεπτα, λόγω του ότι το προς επίλυση σύστημα είναι τριςδιαγώνιο και μπορεί να επιλυθεί εύκολα και γρήγορα με την μέθοδο Thomas, και (3) η παραγωγή των συνθετικών χρονοσειρών γίνεται γρήγορα απαιτώντας και αυτή μερικά δευτερόλεπτα.

Ως αυτήν την στιγμή έχει αναπτυχθεί και ελεγχθεί το Splitmodel ως μονομεταβλητό. Λόγω όμως του ότι το υπό μελέτη μοντέλο παρουσιάζεται ιδιαίτερα ακριβές και γρήγορο, γίνονται προσπάθειες για να επεκταθεί σε πολυμεταβλητό. Τα αποτελέσματα είναι μέχρι στιγμής ιδιαίτερα ικανοποιητικά και ελπίζουμε ότι σε σύντομο χρόνο το Splitmodel θα μπορεί να εφαρμοστεί και για την αναπαραγωγή των στατιστικών χαρακτηριστικών συσχετισμένων ιστορικών χρονοσειρών.

8 Σύγκριση μοντέλων

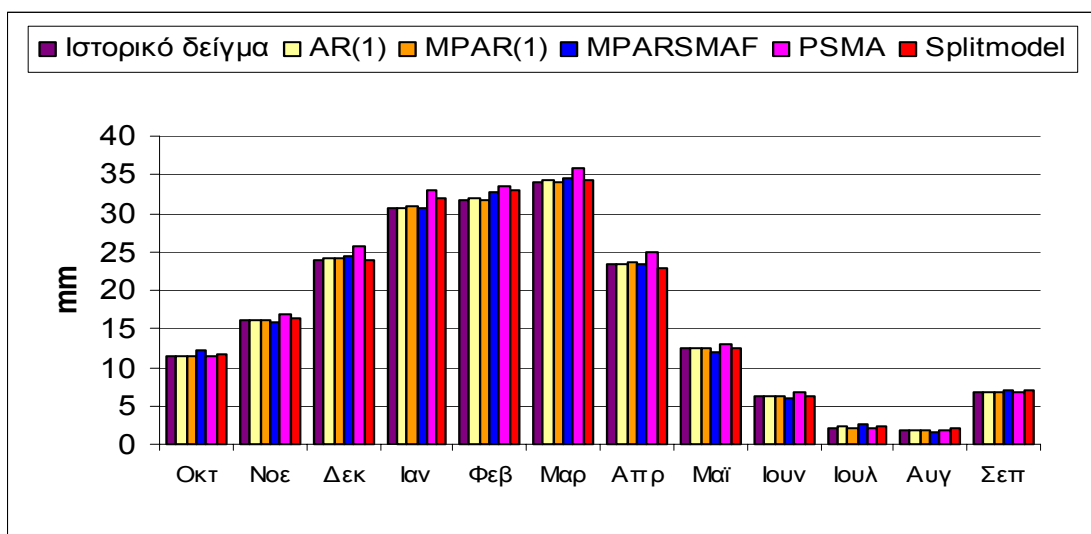
Στα προηγούμενα κεφάλαια αναπτύξαμε και εφαρμόσαμε τρία κυκλοστάσιμα στοχαστικά μοντέλα που αναπαράγουν τη βραχυπρόθεσμη μνήμη και τη μακροπρόθεσμη εμμονή κυκλοστάσιμων στοχαστικών ανελίξεων. Στο παρόν κεφάλαιο θα πραγματοποιηθεί η σύγκριση των μοντέλων αυτών μεταξύ τους, καθώς και με τα μοντέλα AR(1) (σε συνδυασμό με κυκλική τυποποίηση) και MPAR(1), στα οποία αναφερθήκαμε στις ενότητες 2.3 και 2.5 αντίστοιχα. Στόχος της εν λόγω συγκρίσεως είναι η συνοπτική παρουσίαση των χαρακτηριστικών του κάθε μοντέλου (π.χ. μονομεταβλητό ή πολυμεταβλητό, απαίτηση για βελτιστοποίηση, απαιτούμενοι υπολογιστικοί χρόνοι κ.λ.π.), καθώς και των στατιστικών χαρακτηριστικών του ιστορικού δείγματος που δύνανται αυτά να αναπαράγουν αξιόπιστα.

Στην συνέχεια, παρατίθεται ο συγκριτικός πίνακας των χαρακτηριστικών του κάθε μοντέλου (Πίνακας 8.1), καθώς και τα διαγράμματα σύγκρισης των στατιστικών χαρακτηριστικών που είναι δυνατόν αυτά να αναπαράγουν (Σχήματα 8.1, 8.2, 8.3, 8.4, 8.5, 8.6, 8.7 και 8.8). Δεδομένου ότι όλα τα μοντέλα δεν είναι πολυμεταβλητά και με σκοπό την συγκριτική παρουσίαση των στατιστικών χαρακτηριστικών που δύνανται να διατηρήσουν, επιλέχθηκε η εφαρμογή τους στην αναπαραγωγή των στατιστικών χαρακτηριστικών του ιστορικού δείγματος μηνιαίων υψών απορροής του Βοιωτικού Κηφισού στην θέση εξόδου του στην διώρυγα Καρδίτσας (βλέπε και ενότητες 2.3, 2.5, 5.2, 6.2 και 7.2). Επισημαίνεται ότι τα στατιστικά χαρακτηριστικά της συνθετικής χρονοσειράς έχουν προέλθει από στοχαστική προσομοίωση μήκους 5000 ετών. Ειδικά για το μοντέλο AR(1) (σε συνδυασμό με κυκλική τυποποίηση) και λόγω του ότι μπορεί να αναπαράγει μόνο έναν εποχιακό συντελεστή ασυμμετρίας και μόνο έναν εποχιακό συντελεστή αυτοσυσχέτισης 1^{ης} τάξεως (βλέπε και ενότητα 2.3), επιλέχθηκε η διατήρηση του συντελεστή ασυμμετρίας του μήνα Οκτωβρίου και του συντελεστή αυτοσυσχέτισης του μήνα Οκτωβρίου με τον μήνα Σεπτέμβριο.

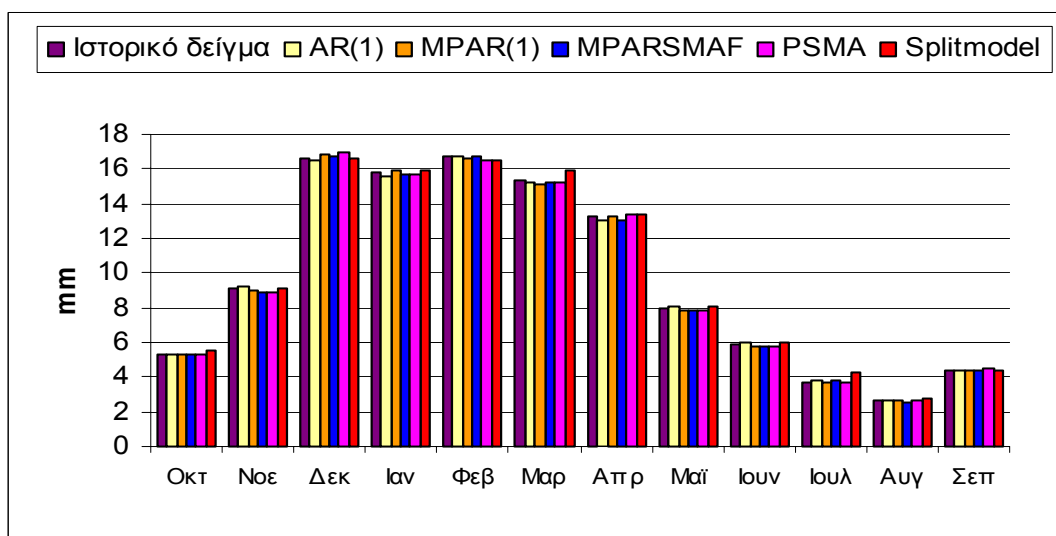
Πίνακας 8.1 Συγκριτική παρουσίαση χαρακτηριστικών μοντέλων

		Μοντέλο				
		AR(1)+ κυκλική τυποποίηση	MPAR(1)	MPARSMAF	PSMA	Splitmodel
Χαρακτηριστικά μοντέλου	Τύπος μοντέλου	μονομεταβλητό	πολυμεταβλητό	πολυμεταβλητό	μονομεταβλητό	μονομεταβλητό (Υπό ανάπτυξη το πολυμεταβλητό)
	Απαίτηση για βελτιστοποίηση παραμέτρων	Όχι	Όχι	Όχι	Ναι	Ναι
	Χρόνος βελτιστοποίησης (αν απαιτείται)	-	-	-	Σχετικά αυξημένος (λίγες ώρες)	Αρκετά μικρός (μερικά λεπτά)
	Δυνατότητα αποθήκευσης των παραμέτρων για μελλοντική χρήση	Ναι	Ναι	Ναι	Ναι	Ναι
	Χρόνος παραγωγής συνθετικών χρονοσειρών	Ελάχιστος (μερικά δευτερόλεπτα)	Ελάχιστος (μερικά δευτερόλεπτα)	Ελάχιστος (μερικά δευτερόλεπτα)	Ελάχιστος (μερικά δευτερόλεπτα)	Ελάχιστος (μερικά δευτερόλεπτα)
Στατιστικά χαρακτηριστικά που αναπαράγονται	Αναπαραγωγή εποχιακών μέσων τιμών (Σχήμα 8.1)	Ναι	Ναι	Ναι	Ναι	Ναι
	Αναπαραγωγή εποχιακών τυπικών αποκλίσεων (Σχήμα 8.2)	Ναι	Ναι	Ναι	Ναι	Ναι
	Αναπαραγωγή εποχιακών συντελεστών ασυμμετρίας (Σχήμα 8.3)	Όχι	Ναι	Ναι	Ναι	Ναι
	Αναπαραγωγή εποχιακών συντελεστών αυτοσυσχέτισης για μοναδιαία υστέρηση (Σχήμα 8.4)	Όχι	Ναι	Ναι	Ναι	Ναι
	Αναπαραγωγή εποχιακών συντελεστών ετεροσυσχέτισης για μηδενική υστέρηση (μόνο για πολυμεταβλητά μοντέλα)	-	Ναι	Ναι	-	Υπό ανάπτυξη
	Αναπαραγωγή εποχιακών συντελεστών ετεροσυσχέτισης για μοναδιαία υστέρηση (μόνο για πολυμεταβλητά μοντέλα)	-	Ναι	Ναι	-	Υπό ανάπτυξη
	Αναπαραγωγή ετήσιας μέσης τιμής (Σχήμα 8.5)	Ναι	Ναι	Ναι	Ναι	Ναι
	Αναπαραγωγή ετήσιας τυπικής απόκλισης (Σχήμα 8.6)	Όχι	Όχι	Όχι	Ναι	Ναι
	Αναπαραγωγή ετήσιου συντελεστή ασυμμετρίας (Σχήμα 8.7)	Όχι	Όχι	Όχι	Ναι	Όχι
Αναπαραγωγή μακροπρόθεσμης εμμονής (Σχήμα 8.8)	Όχι	Όχι	Ναι	Ναι	Ναι	

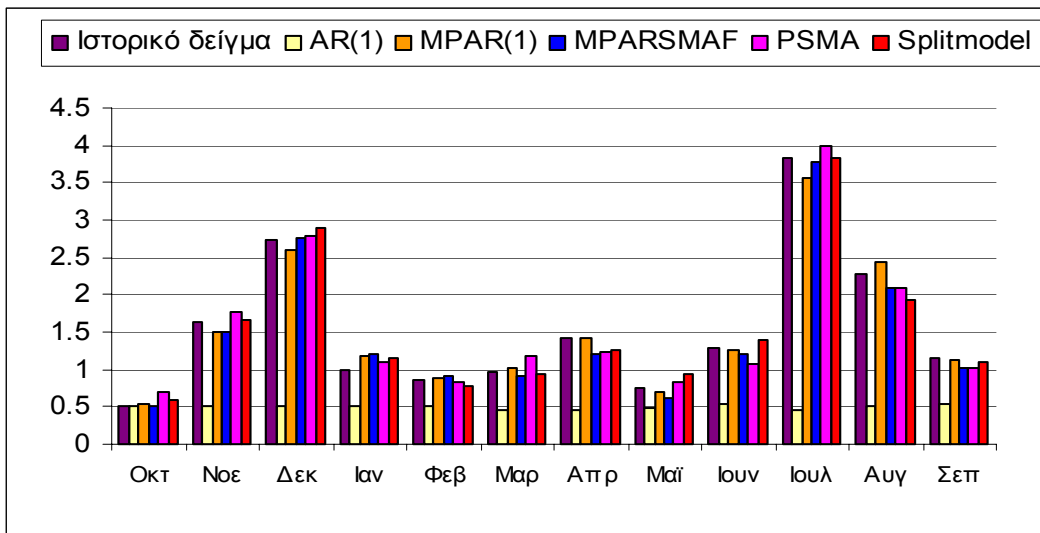
Στο σημείο αυτό αξίζει να επισημάνουμε την μεγάλη ευκολία που μας παρέχει η δυνατότητα αποθήκευσης των βελτιστοποιημένων παραμέτρων των μοντέλων PSMA και Splitmodel. Κατά αυτόν τον τρόπο απαιτείται μία και μόνο βελτιστοποίηση των παραμέτρων του εκάστοτε χρησιμοποιούμενου μοντέλου για ένα δεδομένο ιστορικό δείγμα, με άμεση συνέπεια την δυνατότητα ανεξαρτητοποίησης του χρόνου της βελτιστοποίησης από τον χρόνο παραγωγής των συνθετικών χρονοσειρών. Έτσι ο προς βελτιστοποίηση υπολογιστικός χρόνος δαπανάται μία και μόνο φορά και στην συνέχεια οι βελτιστοποιημένες παράμετροι μπορούν να χρησιμοποιούνται κατ' επανάληψη για την παραγωγή συνθετικών χρονοσειρών δεδομένων στατιστικών χαρακτηριστικών.



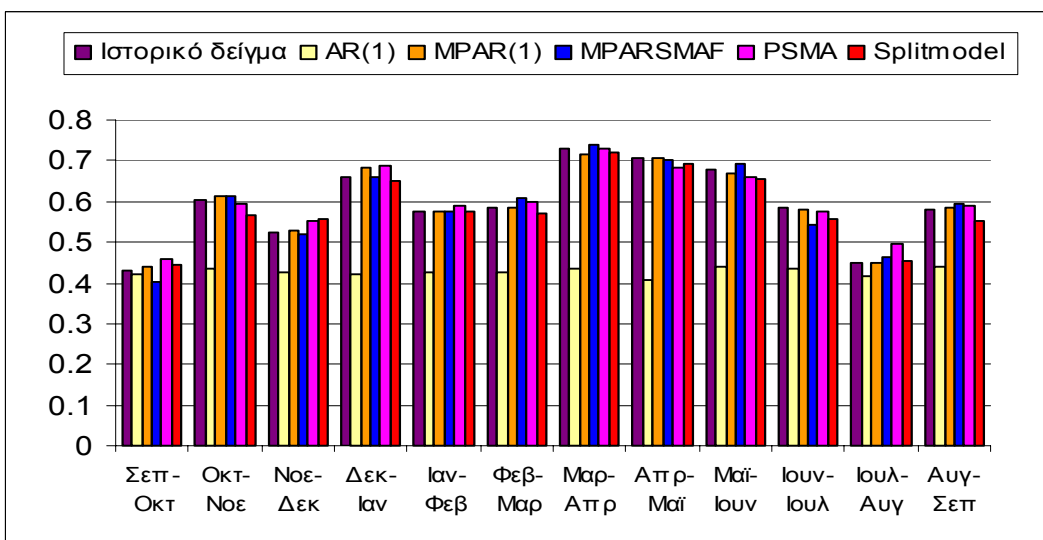
Σχήμα 8.1 Ραβδόγραμμα σύγκρισης μηνιαίων μέσων τιμών



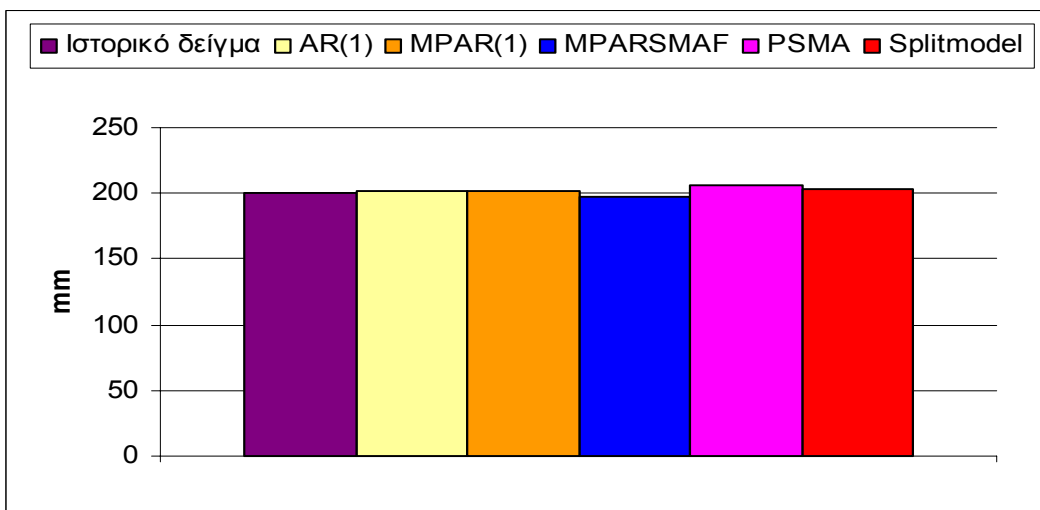
Σχήμα 8.2 Ραβδόγραμμα σύγκρισης μηνιαίων τυπικών αποκλίσεων



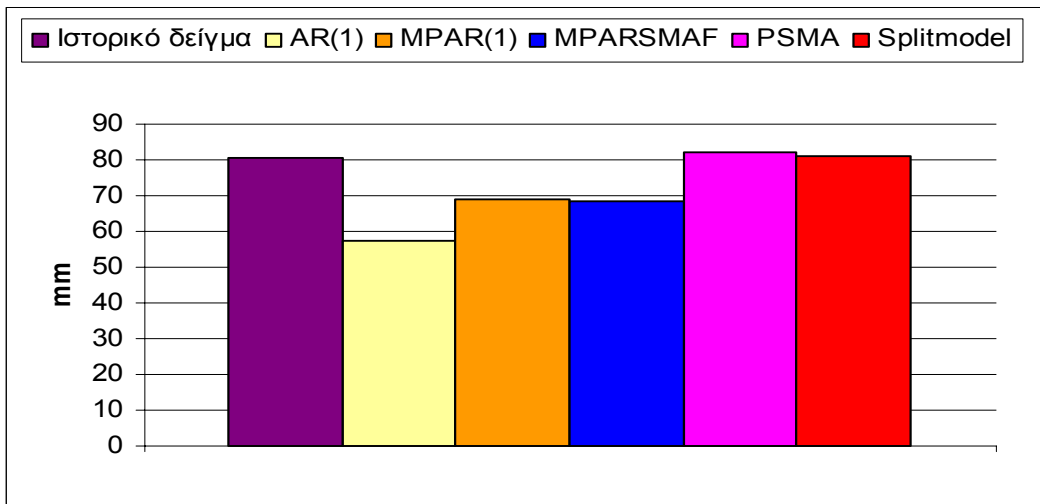
Σχήμα 8.3 Ραβδόγραμμα σύγκρισης εποχιακών συντελεστών ασυμμετρίας



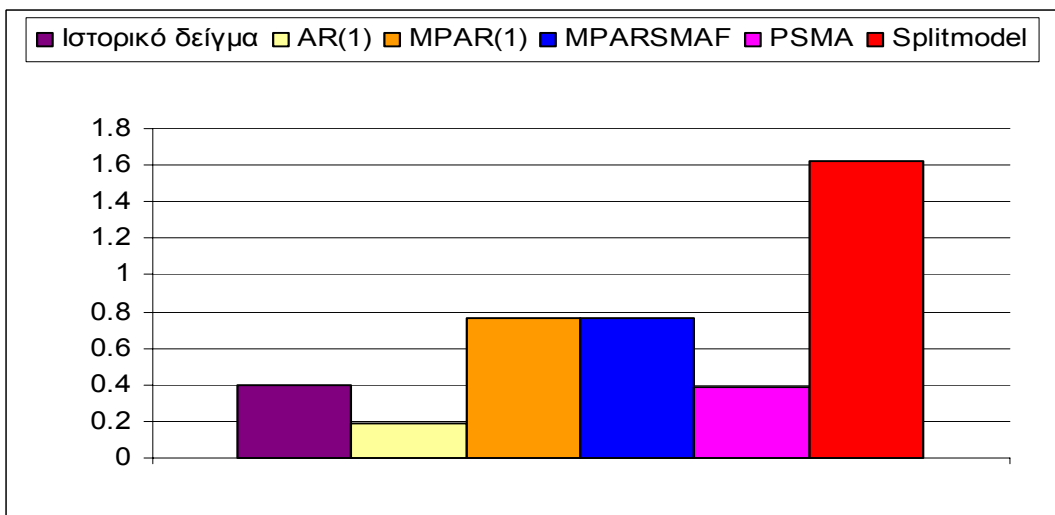
Σχήμα 8.4 Ραβδόγραμμα σύγκρισης των συντελεστών συσχέτισης μεταξύ των μηνών για μοναδιαίο βήμα χρονικής μετατόπισης (συντελεστές συσχέτισης των απορροών ενός μήνα με τις απορροές του προηγούμενου μήνα)



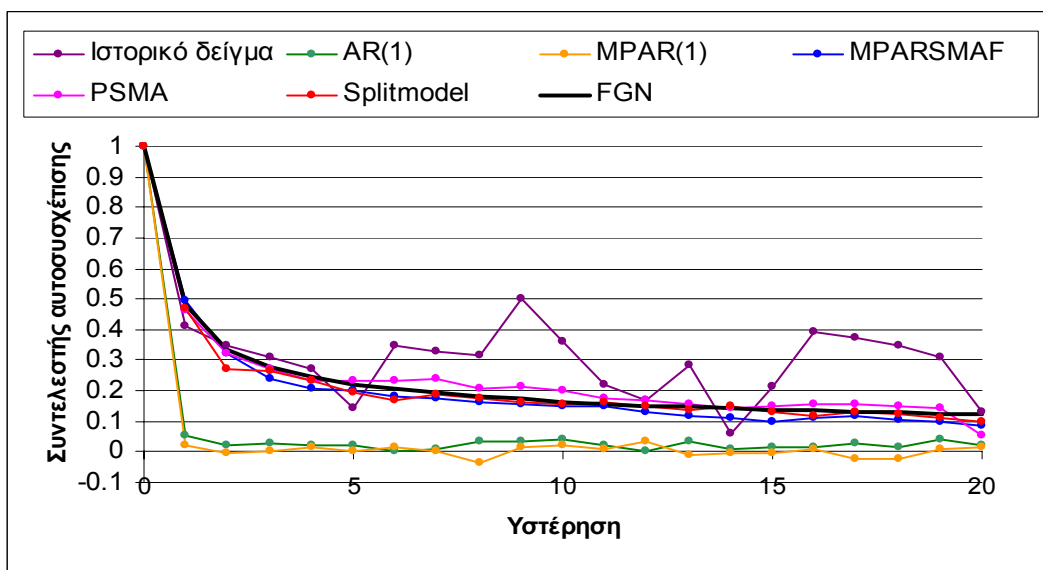
Σχήμα 8.5 Ραβδόγραμμα σύγκρισης ετήσιων μέσων τιμών



Σχήμα 8.6 Ραβδόγραμμα σύγκρισης ετήσιων τυπικών αποκλίσεων

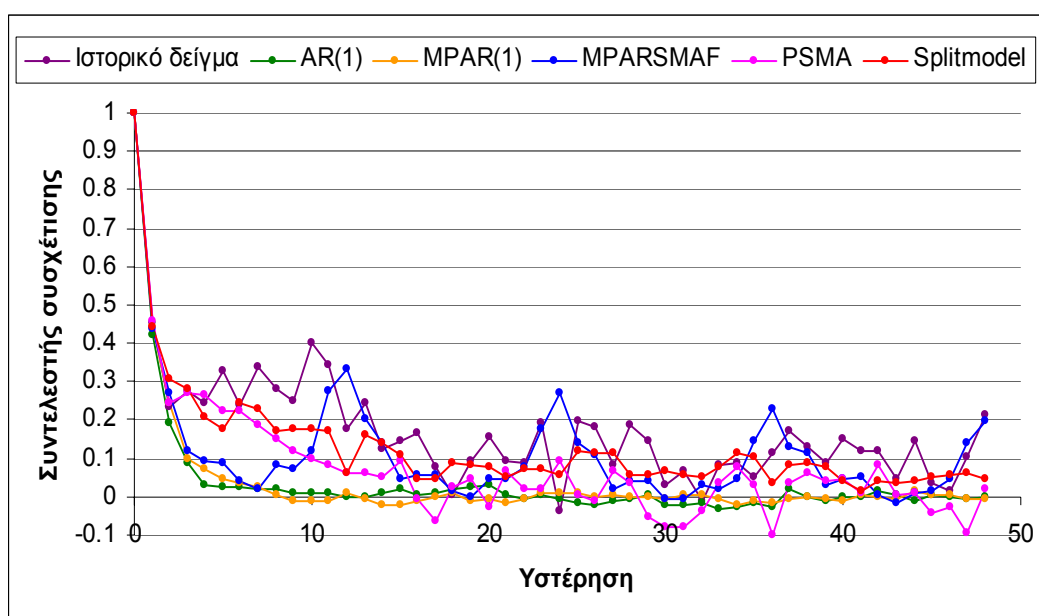


Σχήμα 8.7 Ραβδόγραμμα σύγκρισης ετήσιων συντελεστών ασυμμετρίας



Σχήμα 8.8 Διάγραμμα σύγκρισης συντελεστών αυτοσυσχέτισης ετήσιων χρονοσειρών

Ένα διάγραμμα με ιδιαίτερο ενδιαφέρον ως προς την συμπεριφορά των υπό μελέτη μοντέλων είναι αυτό των συντελεστών συσχέτισης ενός μήνα με τους προηγούμενους αυτού μήνες. Το εν λόγω διάγραμμα μπορεί να μας δώσει πληροφορίες για την μακροπρόθεσμη εποχιακή μνήμη των μοντέλων, η οποία αν και όχι άμεσου ενδιαφέροντος θα θέλαμε να περιγράφεται από ένα ομαλής μορφής συσχετόγραμμα. Στο Σχήμα 8.9 παρουσιάζεται το συγκριτικό διάγραμμα των συντελεστών συσχέτισης του μήνα Οκτωβρίου με προηγούμενους αυτού μήνες τόσο για την ιστορική όσο και για τις συνθετικές χρονοσειρές.



Σχήμα 8.9 Συγκριτικό διάγραμμα συντελεστών συσχέτισης του μήνα Οκτωβρίου με προηγούμενους αυτού μήνες

Όπως είναι εύκολο να διαπιστώσουμε, τα διαγράμματα των συντελεστών συσχέτισης των μοντέλων AR(1) (σε συνδυασμό με κυκλική τυποποίηση) και MPAR(1) φθίνουν ταχύτατα για χρονικά βήματα μετατόπισης μεγαλύτερα της μονάδος, γεγονός που υποδηλώνει την μικρής τάξεως εποχιακή μνήμη των μοντέλων. Το μοντέλο MPARSMAF παρουσιάζει μία περιοδική (δωδεκάμηνη) ανύψωση του διαγράμματος των συντελεστών συσχέτισης, γεγονός που οφείλεται στην επιρροή του φίλτρου SMA πάνω στην μικρής τάξεως εποχιακή μνήμη του μοντέλου MPAR(1) (βλέπε και ενότητα 5.2). Αναφερόμενοι στο μοντέλο PSMA, αξίζει να τονίσουμε ότι το συσχετόγραμμά του παρουσιάζει μία γενικά ομαλή μορφή με θετικές και αρνητικές τιμές. Αντιθέτως το Splitmodel παρουσιάζει μία ομαλή μορφή διαγράμματος συντελεστών συσχέτισης με μόνο θετικές τιμές, γεγονός που οφείλεται στον περιορισμό (7.25) του εδαφίου 7.1.1.

9 Συμπεράσματα - Προτάσεις

Στα πλαίσια της παρούσας εργασίας επιχειρήθηκε η ανάπτυξη εύχρηστων υδρολογικών κυκλοστάσιμων στοχαστικών μοντέλων εποχιακής (μηνιαίας) κλίμακας που διατηρούν τις περιθώριες κατανομές πιθανοτήτων του ιστορικού δείγματος σε περισσότερες από μία χρονικές κλίμακες (ετήσια και εποχιακή) και ταυτόχρονα αναπαράγουν την βραχυπρόθεσμη μνήμη και την μακροπρόθεσμη εμμονή των υπό μελέτη ιστορικών χρονοσειρών.

Έχοντας αναπτύξει, εφαρμόσει και ελέγξει τρία τέτοια μοντέλα και δεδομένου ότι μέχρι στιγμής δεν υφίστανται άλλα παρόμοια, μπορεί να ειπωθεί ότι ο στόχος της παρούσας εργασίας εστέφθη με επιτυχία.

Το μοντέλο 3MPAR1 που βασίζεται στην επαλληλία τυχαίων διακυμάνσεων πολλαπλής κλίμακας, οι οποίες υλοποιούνται μέσω του αθροίσματος ενός κυκλοστάσιμου στοχαστικού μοντέλου MPAR(1) (Multivariate Periodic Autoregressive model) και δύο στάσιμων στοχαστικών μοντέλων MAR(1) (Multivariate Autoregressive model), αποτέλεσε την πρώτη προσπάθεια της παρούσας εργασίας η οποία όμως δεν ολοκληρώθηκε καθώς η προκύπτουσα εξισώσεις παρουσιάζονται ιδιαίτερα πολύπλοκες με άμεσο αποτέλεσμα την απαίτηση για μία σύνθετης μορφής αντικειμενική συνάρτηση. Πάντως σε μελλοντικό χρόνο, σκοπεύεται να γίνει μία προσπάθεια εφαρμογής και ελέγχου του εν λόγω μοντέλου για δύο κυρίως λόγους: (1) δεδομένου ότι όλες οι απαιτούμενες για το μοντέλο εξισώσεις παρατίθενται, η επιπλέον απαιτούμενη εργασία περιορίζεται μόνο στην μόνωση του προβλήματος ως προβλήματος βελτιστοποίησης, και (2) οι προς βελτιστοποίηση παράμετροι του μοντέλου έχουν σταθερό αριθμό ανεξάρτητο από τις απαιτήσεις της εκάστοτε συνθετικής αναπαραγωγής, με αποτέλεσμα ο απαιτούμενος για βελτιστοποίηση υπολογιστικός χρόνος να παραμένει σταθερός.

Το πολυμεταβλητό μοντέλο MPARSMAF (Multivariate Periodic Autoregressive model with Symmetric Moving Average Filter) το οποίο βασίζεται στον συνδυασμό ενός μοντέλου MPAR(1) (Multivariate Periodic Autoregressive model) και ενός μοντέλου SMA (Symmetric Moving Average model), δύναται να αναπαράγει την κυκλοστασιμότητα την βραχυπρόθεσμη μνήμη και την μακροπρόθεσμη εμμονή κυκλοστάσιμων στοχαστικών ανεξίτητων κατά τρόπο απλό και μάλιστα χωρίς απαίτηση για βελτιστοποίηση των παραμέτρων του, κάτι που το καθιστά ιδιαίτερα εύχρηστο.

Το μονομεταβλητό μοντέλο PSMA (Periodic Symmetric Moving Average model) όντας ένα μοντέλο Συμμετρικά Κινούμενου Μέσου όρου αλλά με περιοδικά μεταβαλλόμενες παραμέτρους, δύναται να αναπαράγει την κυκλοστασιμότητα, την βραχυπρόθεσμη μνήμη και την μακροπρόθεσμη εμμονή κυκλοστάσιμων στοχαστικών ανελίξεων. Αν και η ακρίβεια του εν λόγω μοντέλου είναι εξαιρετική, η απαιτούμενη βελτιστοποίηση των παραμέτρων του, ο αριθμός των οποίων αυξάνεται ανάλογα του αριθμού των διατηρούμενων από το μοντέλο ετήσιων αυτοσυσχετίσεων, οδηγεί σε αυξημένους υπολογιστικούς χρόνους. Η παραπάνω παρατήρηση δεν φαίνεται να δημιουργεί ιδιαίτερο πρόβλημα καθώς οι βελτιστοποιημένες παράμετροι δύναται να αποθηκευθούν, με άμεση συνέπεια την απαίτηση μίας και μόνο βελτιστοποίησης για ένα δεδομένο ιστορικό δείγμα και την μετέπειτα κατ' επανάληψη χρήση των βελτιστοποιημένων παραμέτρων για παραγωγή συνθετικών χρονοσειρών δεδομένων στατιστικών χαρακτηριστικών. Πάντως, έγινε προσπάθεια τροποποίησης του μοντέλου PSMA, με κύριο στόχο την μείωση των προς βελτιστοποίηση μεταβλητών ελέγχου μέσω της χρήσεως μίας μαθηματικής εκφράσεως βάση της οποίας είναι δυνατός ο προσδιορισμός των παραμέτρων του μοντέλου. Κατά αυτόν τον τρόπο μειώθηκε ο απαιτούμενος για βελτιστοποίηση υπολογιστικός χρόνος, αφού το πρόβλημα βελτιστοποίησης των παραμέτρων του μοντέλου μετετράπη σε πρόβλημα βελτιστοποίησης των παραμέτρων της χρησιμοποιούμενης μαθηματικής εκφράσεως, το πλήθος των οποίων εμφανίζεται σαφώς μειωμένο. Τα αποτελέσματα της εν λόγω προσπάθειας μπορεί να ειπωθεί ότι ήταν ιδιαίτερα ικανοποιητικά, αν εξαιρεθεί η αδυναμία της μαθηματικής εκφράσεως να επιτύχει αναπαραγωγή των εποχιακών συντελεστών ασυμμετρίας και του ετήσιου συντελεστή ασυμμετρίας. Έτσι μία δυνατότητα για μελλοντική έρευνα είναι η εξεύρεση μίας πληρέστερης, της ήδη ευρεθείσας, μαθηματικής εκφράσεως που θα επιτυγχάνει διατήρηση τόσο των εποχιακών ασυμμετριών όσο και της ετήσιας ασυμμετρίας.

Το Splitmodel αποτελεί ένα ιδιαίτερα ενδιαφέρον μοντέλο λόγω του ότι βασίζεται στον διαχωρισμό της αναπαραγωγής της κυκλοστασιμότητας και της βραχυπρόθεσμης μνήμης από την μακροπρόθεσμη εμμονή. Το μοντέλο απαιτεί δύο μη γραμμικές βελτιστοποιήσεις παραμέτρων και την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος με την μέθοδο του γενικευμένου αντίστροφου μητρώου. Παρόλα αυτά οι απαιτούμενοι υπολογιστικοί χρόνοι είναι ιδιαίτερα μικροί αφού: (1) οι βελτιστοποιήσεις απαιτούν ελάχιστο χρόνο (της τάξεως των μερικών λεπτών), (2) η επίλυση του γραμμικού συστήματος απαιτεί μερικά δευτερόλεπτα, και (3) η παραγωγή των συνθετικών

χρονοσειρών γίνεται γρήγορα απαιτώντας και αυτή μερικά δευτερόλεπτα. Στο πλαίσιο αυτής της εργασίας το μοντέλο Splitmodel έχει αναπτυχθεί ως μονομεταβλητό. Λόγω όμως του ότι το υπό μελέτη μοντέλο παρουσιάζεται ιδιαίτερα ακριβές και γρήγορο γίνονται ήδη προσπάθειες για να επεκταθεί σε πολυμεταβλητό. Τα αποτελέσματα είναι μέχρι στιγμής ιδιαίτερα ικανοποιητικά και ελπίζουμε ότι σε σύντομο χρόνο το Splitmodel θα μπορεί να εφαρμοστεί και για την αναπαραγωγή των στατιστικών χαρακτηριστικών συσχετισμένων ιστορικών χρονοσειρών.

Βιβλιογραφία

- Ευστρατιάδης, Α. (2001), *Διερεύνηση μεθόδων αναζήτησης ολικού βελτίστου σε προβλήματα υδατικών πόρων*, MSc thesis, 139 σελίδες, Τομέας Υδατικών Πόρων, Υδραυλικών και Θαλάσσιων Έργων - Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα.
- Κουτσογιάννης, Δ. (1988) *Μοντέλο Επιμερισμού Σημειακής Βροχόπτωσης*, Διδακτορική διατριβή, 310 σελίδες, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα.
- Κουτσογιάννης, Δ. (1996) *Στατιστική Υδρολογία*, Έκδοση 3, ΕΜΠ, Αθήνα.
- Κουτσογιάννης, Δ. (2003α) *Απλά πολυμεταβλητά στάσιμα και κυκλοστάσιμα μοντέλα. Σημειώσεις στα πλαίσια του προπτυχιακού μαθήματος: Στοχαστική Υδρολογία*. Τομέας Υδατικών Πόρων, Υδραυλικών και Θαλάσσιων Έργων - Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα.
- Κουτσογιάννης, Δ. (2003β) *Ανασκόπηση εννοιών, μεθόδων βελτιστοποίησης και άλγεβρας μητρώων*. Σημειώσεις στα πλαίσια του μεταπτυχιακού μαθήματος: Βελτιστοποίηση Συστημάτων Υδατικών Πόρων. Τομέας Υδατικών Πόρων, Υδραυλικών και Θαλάσσιων Έργων - Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα.
- Κουτσογιάννης, Δ., Ευστρατιάδης, Α., Καραβοκύρος, Γ., Κουκουβίνος, Α., Μαμάσης, Ν., Ναλμπάντης, Ι., Γκριντζιά, Δ., Δαμιανόγλου, Ν., Καρόπουλος, Χ., Ναλπαντίδου, Σ., Νασίκας, Α., Νικολόπουλος, Α., Ξανθάκης, Α., και Ρίπης, Κ. (2001). Σχέδιο διαχείρισης του υδροδοτικού συστήματος της Αθήνας — Έτος 2001–2002, *Εκσυγχρονισμός της εποπτείας και διαχείρισης του συστήματος των υδατικών πόρων ύδρευσης της Αθήνας*, Τομέας Υδατικών Πόρων, Υδραυλικών και Θαλάσσιων Έργων - Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα.
- Μιμίκου, Μ.Α. (1994) *Τεχνολογία Υδατικών Πόρων*, 'β Έκδοση. Α. Παπασωτηρίου & ΣΙΑ Ο.Ε, Αθήνα.
- Ναλμπάντης, Ι. (1983) *Η εμμονή και η επίδρασή της στο σχεδιασμό ταμιευτήρα*, Διπλωματική εργασία, 68 σελίδες, Τομέας Υδατικών Πόρων, Υδραυλικών και Θαλάσσιων Έργων - Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα.
- Barnes, F.B. (1954) Storage required for a city water supply, *J. Inst. Eng. Australia*, **26**(9), 198-203.
- Beard, L.R. (1965) Use of interrelated records to simulate streamflow, *Proc. A.S.C.E., J. Hydraul. Div.*, **91**(HY5), 13-22.
- Belegundu, A.D. & Chandrupatla, T.R. (1999) *Optimization Concepts and Applications in Engineering*, Prentice-Hall Inc.
- Bloomfield, P. (1992) Trends in global temperature. *Climatic Change* **21**, 1-16.

- Box, G.E.P. & Jenkins, G.M. (1970) *Time Series Analysis, Forecasting and Control*, Holden – Day, San Francisco, California, U.S.A.
- Box, G.E.P., Jenkins, G.M., Reinsel, G.C. (1994) *Time Series Analysis, Forecasting and Control*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, U.S.A.
- Bras, R.L. & Rodriguez-Iturbe, I. (1985) *Random Functions in Hydrology*, Addison-Wesley, U.S.A.
- Bras, R.L. & Rodriguez-Iturbe, I. (1993) *Random Functions in Hydrology*, Dover Publications, Mineola, New York, U.S.A.
- Brockwell, P.J. & Davis, R.A. (1996) *Introduction to Time Series and Forecasting*, Springer – Verlag, New York, U.S.A.
- Chapra, S.C. & Canale, R.P. (2002) *Numerical Methods for Engineers*, Fourth Edition, McGraw-Hill, New York, U.S.A.
- Cleveland, B.R., Cleveland, W.S., McRae, J.E., Terpenning, I. (1990) A seasonal trend decomposition procedure based on loess. *Journal of Official Statistics*, **6**, 3-73.
- Eltahir, E.A.B. (1996) El Niño and the natural variability in the flow of the Nile River. *Wat. Resour. Res.*, **32**(1), 131-137.
- Evans, T.E. (1996) “The effects of changes in the world hydrological cycle on availability of water resources”, in *Global Climate Change and Agricultural Production: Direct and Indirect Effects of Changing Hydrological, Pedological and Plant Physiological Processes*, edited by Bazzaz, F. & Sombroek, W., Chapter 2. Fao and John Wiley, Chichester, West Sussex, U.K.
- Fletcher, R. & Reeves, C. M. (1964) Function minimization by conjugate gradients, *Computer Journal*, **7**, 149-154.
- Gardner, W.A. (1990) *Introduction to Random Processes With Applications to Signals and Systems*, Mcgraw Hill, New York.
- Gneiting, T. & Schlather, M. (2001) Stochastic models which separate fractal dimension and Hurst effect (www.nrcse.washington.edu/pdf/trs69_fractal.pdf).
- Grygier, J.C. & Stedinger, J.R. (1988) Condensed disaggregation procedures and conservation corrections for stochastic hydrology. *Wat. Resour. Res.*, **24**(10), 1574-1584.
- Grygier, J.C. & Stedinger, J.R. (1990) SPIGOT, A synthetic streamflow generation software package, Technical description. School of Civil and Environmental Engineering, Cornell University, Ithaca, New York, Version 2.5.
- Haslett, J. & Raftery, A.E. (1989) Space time modelling with long - memory dependence: assessing Ireland’s wind power resource. *Appl. Stat.* **38**(1), 1-50.

- Hoshi, K. & Burges, S.J. (1979) Disaggregation of streamflow volumes. *Journal of the Hydraulics Division, Proceedings ASCE*, **105** (HY1), 27-41.
- Hurst, H.E. (1951) Long term storage capacities of reservoirs. *Trans ASCE* **116**, 776-808.
- Jones, P.D., Briffa, K.R., Barnett, T.P., Tett, S.F.B. (1998) Millennial Temperature Reconstructions. IGBP PAGES/World Data Center-A for Paleoclimatology Data Contribution Series #1998-039, NOAA/NGDC, Paleoclimatology Program, Boulder, Colorado U.S.A. (ftp.ngdc.noaa.gov/paleo/contributions_by_author/jones_1998/).
- Kantz, H. & Schreiber, T. (1997) *Nonlinear Time Series Analysis*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, U.K.
- Kelly, K.S. & Krzysztofowicz, R. (1997) A bivariate meta-Gaussian density for use in hydrology. *Stochastic Hydrol. Hydraul.*, **11**,17-31.
- Koutsoyiannis, D. (1992) A nonlinear disaggregation method with a reduced parameter set for simulation of hydrologic series. *Wat. Resour. Res.*, **28**(12), 3175-3191.
- Koutsoyiannis, D. (1999) Optimal decomposition of covariance matrices for multivariate stochastic models in hydrology. *Wat. Resour. Res.*, **35**(4), 1219-1229.
- Koutsoyiannis, D. (2000) A generalized mathematical framework for stochastic simulation and forecast of hydrologic time series. *Wat. Resour. Res.*, **36**(6),1519-1534.
- Koutsoyiannis, D. (2001) Coupling stochastic models of different time scales, *Wat. Resour. Res.*, **37**(2), 379-392.
- Koutsoyiannis, D. (2002a) Internal report: <http://www.itia.ntua.gr/getfile/511/2/2002HSJHurst.Suppl.pdf>
- Koutsoyiannis, D. (2002b) The Hurst phenomenon and fractional Gaussian noise made easy. *Hydrological Sciences Journal*, **47**(4), 573-595.
- Koutsoyiannis, D. (2003a), Climate change, the Hurst phenomenon, and hydrological statistics. *Hydrological Sciences Journal*, **48**(1), 3-24.
- Koutsoyiannis, D. (2003b) Rainfall disaggregation methods: Theory and applications, *Proceedings, Workshop on Statistical and Mathematical Methods for Hydrological Analysis*. Rome, May 2003, 1-23, Università degli Studi di Roma "La Sapienza".
- Koutsoyiannis, D. (2004) Reliability concepts in reservoir design, *The Encyclopedia of Water*, edited by J. H. Lehr, New York, U.S.A.
- Koutsoyiannis, D. (2004) Stochastic simulation of hydrosystems, *The Encyclopedia of Water*, edited by J. H. Lehr, New York, U.S.A.

- Koutsoyiannis, D., & Xanthopoulos, Th. (1990) A dynamic model for short-scale rainfall disaggregation *Hydrological Sciences Journal*, **35**(3), 303-322.
- Koutsoyiannis, D. & Foufoula-Georgiou, E. (1993) A scaling model of storm hyetograph, *Wat. Resour. Res.*, **29**(7), 2345-2361.
- Koutsoyiannis, D. & Manetas, A. (1996) Simple disaggregation by accurate adjusting procedures, *Wat. Resour. Res.*, **32**(7), 2105-2117.
- Koutsoyiannis, D. & Onof, C. (2001) Rainfall disaggregation using adjusting procedures on a Poisson cluster model, *J. Hydrol.*, **246**, 109-122.
- Koutsoyiannis, D., Onof, C., Wheater, H.S. (2003c), Multivariate rainfall disaggregation at a fine time scale, *Wat. Resour. Res.* (in press).
- Koutsoyiannis, D., & Pachakis, D. (1996), Deterministic chaos versus stochasticity in analysis and modeling of point rainfall series, *Journal of Geophysical Research-Atmospheres*, **101**(D21), 26441-26451.
- Lane, W.L. & Frevert, D.K. (1990) Applied Stochastic Techniques, User's Manual. Bureau of Reclamation, Engineering and Research Center, Denver, Co., Personal Computer Version.
- Maass, A., Hufschmidt, M.M., Dorfman, R., Thomas, H.A., Marglin, S.A., and Fair, J. M. (1962) *Design of Water Resource Systems*, Harvard University Press, Cambridge, Mass.
- Mandelbrot, B.B. (1965) Une classe de processus stochastiques homothétiques a soi: application à la loi climatologique de H.E. Hurst. *C.R. Acad. Sci. Paris* **260**, 3284-3277.
- Mandelbrot, B.B. (1977) *The Fractal Geometry of Nature*, 248. Freeman, New York, U.S.A.
- Marlow, W.H. (1993) *Mathematics for Operations Research*. Dover Publications, Mineola, New York, U.S.A.
- Matalas, N.C. (1967) Mathematical assessment of synthetic hydrology, *Wat. Resour. Res.*, **3**(4), 937-945.
- Matalas, N.C. & Wallis, J.R. (1976) Generation of synthetic flow sequences, in *Systems Approach to Water Management*, A.K. Biswas editor, McGraw Hill.
- Mays, L.W. & Tung, Y.K. (1996) "Systems analysis", in *Water Resources Handbook*, edited by Mays, L.W., McGraw-Hill, New York, U.S.A.
- Mejia, J.M. & Rousselle, J. (1976) Disaggregation models in Hydrology revisited. *Wat. Resour. Res.*, **12**(2), 185-186.
- Metropolis, N. & Ulam, S.M. (1949) The Monte Carlo method, *J. Amer. Statist. Assoc.*, **44**, 335-341.

- Montanari, A. (2003) Application of the Normal Quantile Transform for deseasonalising Hydrological Time Series. *Workshop on Statistical and Mathematical Methods for Hydrological Analysis*, Rome, May 2003, 1-23, Università degli Studi di Roma "La Sapienza".
- Montanari, A., Rosso, R., Taqqu, M.S. (1997) Fractionally differenced ARIMA models applied to hydrologic time series. *Wat. Resour. Res.*, **33**(5), 1035-1044.
- Papoulis, A. (1990) *Probability and Statistics*, Prentice-Hall.
- Press, W.H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T., Flannery, B.P. (1992) *Numerical Recipes in Fortran 77*, Cambridge Univ. Press, New York, U.S.A.
- Radziejewski, M. & Kundzewicz, Z.W. (1997) Fractal analysis of flow of the river Warta. *J. Hydrol.* **200**, 280-294.
- Sallas, J.D. (1993) "Analysis and modelling of hydrologic time series", in *Handbook of Hydrology*, edited by Maidment, D.R., 19.1-19.72, McGraw-Hill, New York, U.S.A.
- Shaw, E.M. (1994) *Hydrology in Practice*, Third Edition, Chapman & Hall, United Kingdom.
- Stedinger, J.R. & Vogel, R.M. (1984) Disaggregation procedures for generating serially correlated flow vectors. *Wat. Resour. Res.*, **20**(1), 47-56.
- Stedinger, J.R., Vogel, R.M., Foufoula-Georgiou, E. (1993) "Frequency analysis of extreme events", in *Handbook of Hydrology*, edited by Maidment, D.R., 18.1-18.66, McGraw-Hill, New York, U.S.A.
- Tao, P.C. & Delleur, J.W. (1976) Multistation, multiyear synthesis of hydrologic time series by disaggregation. *Wat. Resour. Res.*, **12**(6), 1303-1312.
- Thomas, H.A. & Fiering, M.B. (1962) Mathematical synthesis of streamflow sequences for the analysis of river basins by simulation, in *Design of Water Resource Systems*, by Maass, A., Hufschmidt, M. M., Dorfman, R., Thomas, H.A., Marglin, S.A., and Fair, J. M., Harvard University Press, Cambridge, Mass.
- Todini, E. (1980). The preservation of skewness in linear disaggregation schemes. *J. Hydrol.* **47**, 199-214.
- Valencia, D. & Schaake, J.C. (1972) A disaggregation model for time series analysis and synthesis, Report no. 149, Ralph M. Parsons Laboratory of Water Resources and Hydrodynamics, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass.
- Valencia, D. & Schaake, J.C. (1973) Disaggregation processes in Stochastic Hydrology. *Wat. Resour. Res.*, **9**(3), 211-219.
- Vogel, R.M., Tsai, Y., Limbrunner, J.F. (1998) The regional persistence and variability of annual steamflow in the United States. *Wat. Resour. Res.*, **34**(12), 3445-3459.

Παράρτημα A

Στο παράρτημα αυτό παρουσιάζεται μία παραλλαγή του μοντέλου PSMA (Periodic Symmetric Moving Average model) που αναπτύχθηκε στο κεφάλαιο 6, στην οποία ο προσδιορισμός των παραμέτρων α_j^s ($j = 0, \dots, q$ και $s = 1, \dots, k$) του μοντέλου δεν γίνεται με απευθείας βελτιστοποίηση, αλλά με την βελτιστοποίηση των παραμέτρων μίας μαθηματικής εκφράσεως βάσει της οποίας μπορούν να προσδιοριστούν οι παράμετροι α_j^s ($j = 0, \dots, q$ και $s = 1, \dots, k$). Στην συνέχεια αναπτύσσεται, εφαρμόζεται και ελέγχεται η προαναφερθείσα παραλλαγή του μοντέλου PSMA η οποία καλείται μοντέλο PPSMA (Parametric Periodic Symmetric Moving Average model).

A.1 Παρουσίαση μοντέλου PPSMA

Το μοντέλο PPSMA (Parametric Periodic Symmetric Moving Average model) αποτελεί μία παραλλαγή του μοντέλου PSMA (Periodic Symmetric Moving Average model), στην οποία ο προσδιορισμός των παραμέτρων α_j^s ($j = 0, \dots, q$ και $s = 1, \dots, k$) του μοντέλου (6.1), δεν πραγματοποιείται με πλήρη βελτιστοποίηση αλλά με βελτιστοποίηση των παραμέτρων κάποιας μαθηματικής εκφράσεως από την οποία είναι δυνατός ο προσδιορισμός των α_j^s ($j = 0, \dots, q$ και $s = 1, \dots, k$). Σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν, οι εξισώσεις (6.1) – (6.15) που ισχύουν για το μοντέλο PSMA ισχύουν και για το μοντέλο PPSMA μόνο που οι παράμετροι α_j^s ($j = 0, \dots, q$ και $s = 1, \dots, k$) προσδιορίζονται με χρήση κάποιας συναρτήσεως.

Κατόπιν πολλών δοκιμών, με στόχο τον προσδιορισμό της καταλληλότερης μαθηματικής έκφρασης, καταλήξαμε στην εξίσωση

$$\alpha_j^s = U(c-1-j) \beta_j^s + U(j-c) \sum_{l=c}^d \frac{\beta_l^s}{j-2c+l+1} \text{ για } j = 0, \dots, q \text{ } s = 1, \dots, k \text{ και } 0 < c \leq d \quad (\text{A.1})$$

όπου β_l^s ($l = 0, \dots, d$ και $s = 1, \dots, k$) είναι οι προς βελτιστοποίηση παράμετροι της μαθηματικής εκφράσεως που αναφέρονται στην εποχή s ($s = 1, \dots, k$), c ένας θετικός ακέραιος και $U(x)$ η βηματική συνάρτηση Heaviside για την οποία ισχύει $U(x) = 1 \forall x \in [0, \infty)$ και $U(x) = 0 \forall x \in (-\infty, 0)$.

Κατά αυτόν τον τρόπο είναι δυνατόν να προσδιοριστεί το διάνυσμα $\zeta = [\alpha_0^1, \alpha_1^1, \dots, \alpha_q^1, \alpha_0^2, \alpha_1^2, \dots, \alpha_q^2, \dots, \dots, \alpha_0^k, \alpha_1^k, \dots, \alpha_q^k, \zeta_v]^T$ διαστάσεως $k(q+1)+1$, συναρτήσει του διανύσματος β διαστάσεως $k(d+1)+1$,

$$\beta = [\beta_0^1, \beta_1^1, \dots, \beta_d^1, \beta_0^2, \beta_1^2, \dots, \beta_d^2, \dots, \dots, \beta_0^k, \beta_1^k, \dots, \beta_d^k, \zeta_v]^T \quad (\text{A.2})$$

Στην οριακή περίπτωση όπου $c = d = q+1$, το διάνυσμα β ταυτίζεται με το διάνυσμα ζ , ήτοι

$$c = d = q+1 \Rightarrow \beta \equiv \zeta \quad (\text{A.3})$$

Σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν, αντί να βελτιστοποιήσουμε το διάνυσμα ζ των παραμέτρων α_j^s ($j = 0, \dots, q$ και $s = 1, \dots, k$), μπορούμε να βελτιστοποιήσουμε το διάνυσμα β των παραμέτρων β_l^s ($l = 0, \dots, d$ και $s = 1, \dots, k$). Αξίζει βέβαια να παρατηρήσουμε ότι η βελτιστοποίηση του διανύσματος β αντί του διανύσματος ζ και η χρήση της μαθηματικής εκφράσεως (A.1) αποκτούν νόημα στην περίπτωση όπου $d < q$. Άλλωστε, μόνο τότε οι προς βελτιστοποίηση παράμετροι είναι λιγότερες, και ο απαιτούμενος για την βελτιστοποίηση υπολογιστικός χρόνος σαφώς μειωμένος.

Προσδιορισμός των παραμέτρων της μαθηματικής εκφράσεως

Ο προσδιορισμός του διανύσματος β , απαιτεί την επίλυση ενός μη γραμμικού συστήματος $3k+n+2$ εξισώσεων με $k(d+1)+1$ αγνώστους. Ένας τρόπος προσδιορισμού μίας λύσεως του παραπάνω συστήματος, είναι η εφαρμογή κάποιας από τις έμμεσες μεθόδους μη γραμμικής βελτιστοποίησης που περιγράφησαν στα εδάφια 3.3.5 και 3.3.6. Στην συνέχεια παρουσιάζονται η προτεινόμενη για το μοντέλο PPSMA αντικειμενική συνάρτηση καθώς και η αναλυτική έκφραση της παραγώγου της, με σκοπό την αποφυγή αριθμητικής παραγώγισης που επιβραδύνει τους αλγορίθμους των έμμεσων μεθόδων μη γραμμικής βελτιστοποίησης (βλέπε και ενότητα 6.1).

Αντικειμενική συνάρτηση

Δεδομένου ότι $\zeta := \zeta(\beta)$, η αντικειμενική συνάρτηση του μοντέλου PPSMA παραμένει ακριβώς η ίδια με την αντικειμενική συνάρτηση του μοντέλου PSMA και περιγράφεται από την εξίσωση,

$$f(\zeta^*) = \min[f(\zeta)] = \lambda_1 \|\tilde{\theta}_1(\zeta) - \theta_1\|^2 + \lambda_2 \|\tilde{\theta}_2(\zeta) - \theta_2\|^2 + \lambda_3 \|\tilde{\theta}_3(\zeta) - \theta_3\|^2 + \lambda_4 \|\tilde{\theta}_4(\zeta) - \theta_4\|^2 + \lambda_5 \{\tilde{\theta}_5(\zeta) - \theta_5\}^2 \quad (\text{A.4})$$

με τα μεγέθη $\tilde{\theta}_1(\zeta)$, $\tilde{\theta}_2(\zeta)$, $\tilde{\theta}_3(\zeta)$, $\tilde{\theta}_4(\zeta)$, $\tilde{\theta}_5(\zeta)$, θ_1 , θ_2 , θ_3 , θ_4 και θ_5 του μοντέλου PPSMA να ορίζονται όμοια με τα αντίστοιχα μεγέθη του μοντέλου PSMA.

Παράγωγος αντικειμενικής συναρτήσεως

Δεδομένου ότι η αντικειμενική συνάρτηση του μοντέλου PPSMA είναι η ίδια με την αντικειμενική συνάρτηση του μοντέλου PSMA, η αναλυτική έκφραση της παραγώγου αυτής ως προς το διάνυσμα β θα δίδεται από την εξίσωση,

$$\frac{df(\zeta)}{d\beta} = \frac{df(\zeta)}{d\zeta} \frac{d\zeta}{d\beta} = \frac{df(\zeta)}{d\zeta} \mathbf{p}_6 \quad (\text{A.5})$$

όπου $\frac{df(\zeta)}{d\zeta}$ η παράγωγος της αντικειμενικής συναρτήσεως που μπορεί να προσδιοριστεί από την εξίσωση (6.23) του μοντέλου PSMA και \mathbf{p}_6 πίνακας διαστάσεων $k(q+1)+1 \times k(d+1)+1$ τα μη μηδενικά στοιχεία του οποίου δίδονται από τους τύπους,

$$i = s(q+1)+l \quad \text{για } s = 1, \dots, k-1, l = 1, \dots, q+1 \quad (\text{A.6})$$

$$j = s(d+1)+m \quad \text{για } s = 1, \dots, k-1, m = 1, \dots, d+1 \quad (\text{A.7})$$

$$p_6^{i,j} = U(-|l-m|) U(c-l) + U(l-c-1) U(m-c-1) \frac{1}{l+m-2c-1} \quad (\text{A.8})$$

$$p_6^{k(q+1)+1, k(d+1)+1} = 1 \quad (\text{A.9})$$

Χαρακτηριστικά μοντέλου PPSMA

Με χρήση του μοντέλου PPSMA μπορούμε «θεωρητικά» να επιτύχουμε:

- την αναπαραγωγή των k σε αριθμό εποχιακών μέσων τιμών της ιστορικής χρονοσειράς,
- την αναπαραγωγή των k σε αριθμό εποχιακών τυπικών αποκλίσεων της ιστορικής χρονοσειράς,

- την αναπαραγωγή των k σε αριθμό εποχιακών συντελεστών ασυμμετρίας της ιστορικής χρονοσειράς,
- την αναπαραγωγή των συντελεστών συσχέτισης μεταξύ των εποχών, της ιστορικής χρονοσειράς για μοναδιαίο βήμα χρονικής μετατόπισης (συντελεστής συσχέτισης μίας εποχής με την προηγούμενή της),
- την αναπαραγωγή της ετήσιας μέσης τιμής της ιστορικής χρονοσειράς,
- την αναπαραγωγή της ετήσιας τυπικής απόκλισης της ιστορικής χρονοσειράς,
- την αναπαραγωγή του ετήσιου συντελεστή ασυμμετρίας της ιστορικής χρονοσειράς,
- την αναπαραγωγή της μακροπρόθεσμης εμμονής της ετήσιας ιστορικής χρονοσειράς, βάσει κάποιου θεωρητικού αυτοσυσχετογράμματος (π.χ. FGN).

Η χρήση όμως της μαθηματικής εκφράσεως (A.1) δημιουργεί κάποια προβλήματα στην αναπαραγωγή των ασυμμετριών, τα οποία θα παρουσιαστούν κατά την εφαρμογή του μοντέλου.

A.2 Εφαρμογή και έλεγχος μοντέλου

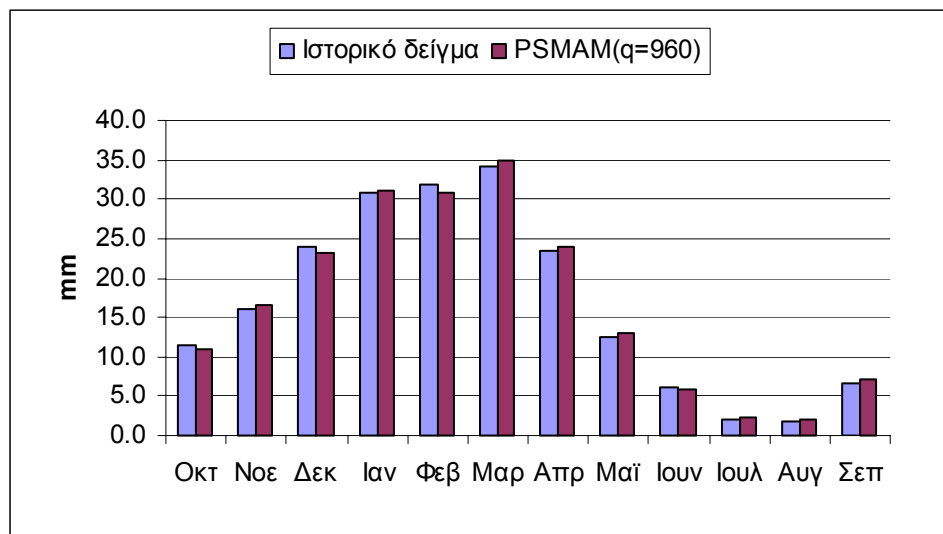
Το μοντέλο PPSMA, εφαρμόστηκε στην αναπαραγωγή των βραχυπρόθεσμων και μακροπρόθεσμων στατιστικών χαρακτηριστικών της ιστορικής χρονοσειράς μηνιαίων υψών απορροής του Βοιωτικού Κηφισού στην θέση εξόδου του στην διάφυρα Καρδίτσας¹. Στα πλαίσια της εν λόγω εφαρμογής, αναπτύχθηκε πρόγραμμα που παρατίθεται στο παράρτημα ΣΤ και το οποίο χρησιμοποιεί τις εξισώσεις του μοντέλου PPSMA για την απαιτούμενη βελτιστοποίηση και στην συνέχεια παραγωγή των μηνιαίων συνθετικών χρονοσειρών δεδομένων στατιστικών χαρακτηριστικών. Ο αριθμός των παραμέτρων α_j^s του μοντέλου για κάθε μήνα s ($s = 1, \dots, 12$) λήφθηκε ίσος με 961 ($q = 960$), με σκοπό την αναπαραγωγή των αυτοσυσχετίσεων της ετήσιας συνθετικής χρονοσειράς έως και χρονικό βήμα μετατόπισης $p = n = 80$. Ο αριθμός των παραμέτρων β_l^s της μαθηματικής εκφράσεως (A.1) για κάθε μήνα s ($s = 1, \dots, 12$) λήφθηκε ίσος με 49 ($d = 48$) και η παράμετρος c επιλέχθηκε ίση με 24 ($c = 24$). Όπως είναι αντιληπτό, με χρήση της (A.1) καταφέραμε να ανεξαρτητοποιήσουμε τον αριθμό των παραμέτρων α_j^s του μοντέλου από τον αριθμό των προς βελτιστοποίηση παραμέτρων, που στην περίπτωση του μοντέλου PPSMA είναι οι παράμετροι β_l^s της μαθηματικής εκφράσεως. Για να γίνει αντιληπτό το μεγάλο όφελος που επιτύχαμε, αξίζει να τονίσουμε ότι για τα

¹ για περισσότερες πληροφορίες βλέπε ενότητα 4.2

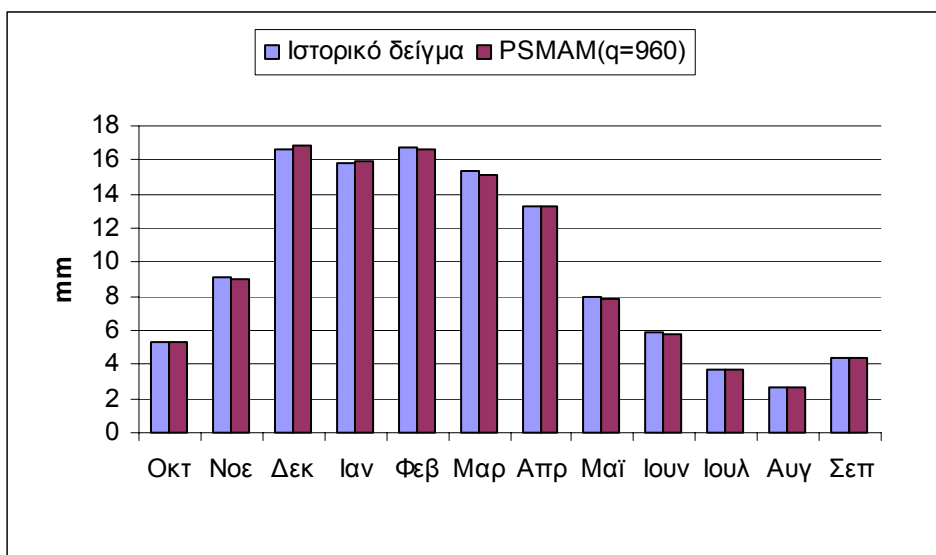
δεδομένα της παρούσας εφαρμογής αλλά για χρήση του μοντέλου PSMA, οι προς βελτιστοποίηση παράμετροι θα ήταν $12(960+1)+1 = 11533$, ενώ με χρήση του μοντέλου PPSMA οι προς βελτιστοποίηση παράμετροι είναι $12(48+1)+1 = 589$, γεγονός που μειώνει κατά πολύ τον απαιτούμενο υπολογιστικό χρόνο της βελτιστοποίησης.

Για τον προσδιορισμό των παραμέτρων β_l^s ($s = 1, \dots, 12$ και $l = 0, 1, \dots, 48$) καθώς και της ασυμμετρίας του λευκού θορύβου ξ_v , χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος των συζυγών κλίσεων στην οποία αναφερθήκαμε στο εδάφιο 3.3.6. Στην συνέχεια παρατίθενται τα διαγράμματα σύγκρισης των στατιστικών χαρακτηριστικών του ιστορικού δείγματος, με τα στατιστικά χαρακτηριστικά των συνθετικών χρονοσειρών μήκους 5000 ετών που παρήχθησαν με χρήση του μοντέλου PPSMA.

Στα Σχήματα A.1 και A.2, μπορούμε να παρατηρήσουμε την αξιόπιστη αναπαραγωγή των μέσων τιμών και των τυπικών αποκλίσεων των μηνών του ιστορικού δείγματος από το μοντέλο PPSMA.

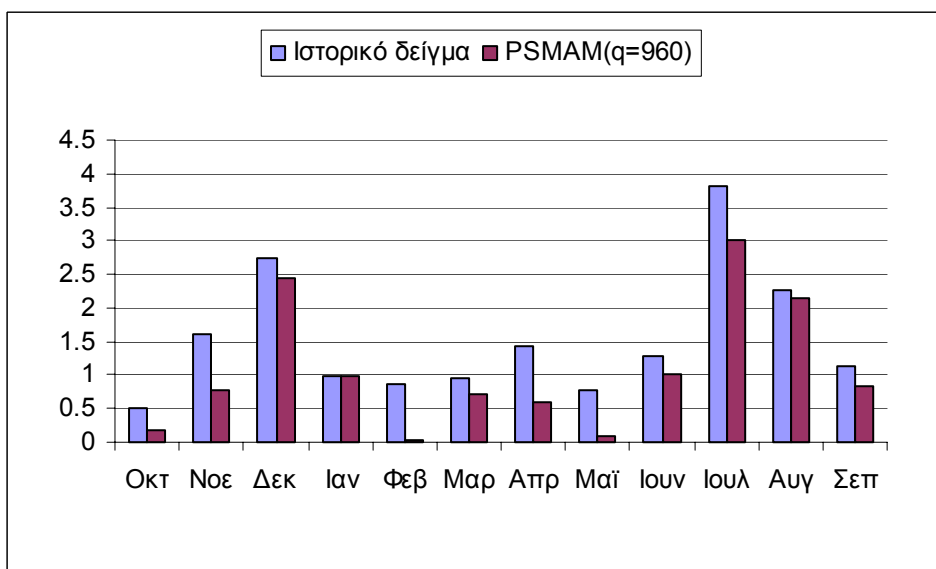


Σχήμα A.1 Ραβδόγραμμα σύγκρισης των μηνιαίων μέσων τιμών του ιστορικού και του συνθετικού δείγματος απορροών



Σχήμα Α.2 Ραβδόγραμμα σύγκρισης των μηνιαίων τυπικών αποκλίσεων του ιστορικού και του συνθετικού δείγματος απορροών

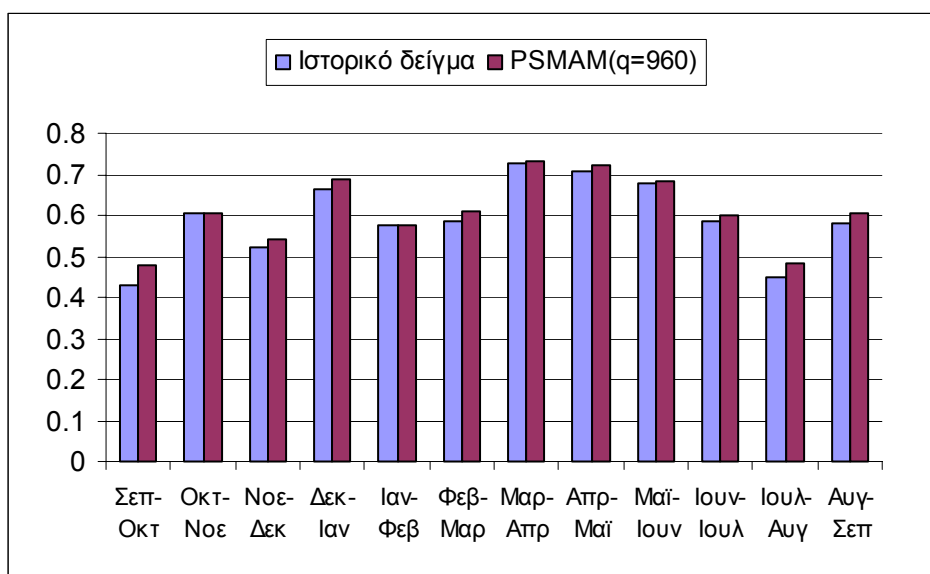
Στο Σχήμα Α.3 παρατηρούμε την αδυναμία του μοντέλου PPSMA να διατηρήσει στη συνθετική χρονοσειρά τους εποχιακούς συντελεστές ασυμμετρίας του ιστορικού δείγματος. Το εν λόγω γεγονός, οφείλεται στην μαθηματική έκφραση (Α.1) των παραμέτρων του μοντέλου α_j^s ($j = 0, \dots, q$ και $s = 1, \dots, k$) που δεν αποδεικνύεται κατάλληλη για την αναπαραγωγή των εποχιακών συντελεστών ασυμμετρίας.



Σχήμα Α.3 Ραβδόγραμμα σύγκρισης των μηνιαίων συντελεστών ασυμμετρίας του ιστορικού και του συνθετικού δείγματος απορροών

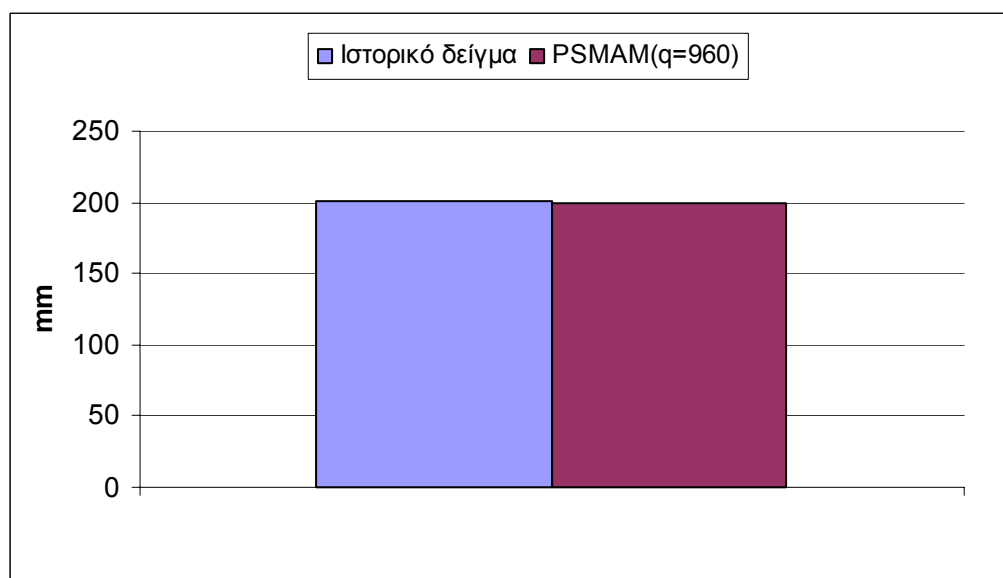
Στο Σχήμα Α.4 παρουσιάζονται οι συντελεστές συσχέτισης για μοναδιαίο βήμα χρονικής μετατόπισης των μηνών του ιστορικού και του συνθετικού δείγματος

απορροών. Η αναπαραγωγή των εν λόγω στατιστικών μεγεθών από το μοντέλο PPSMA, είναι αρκετά ακριβής.

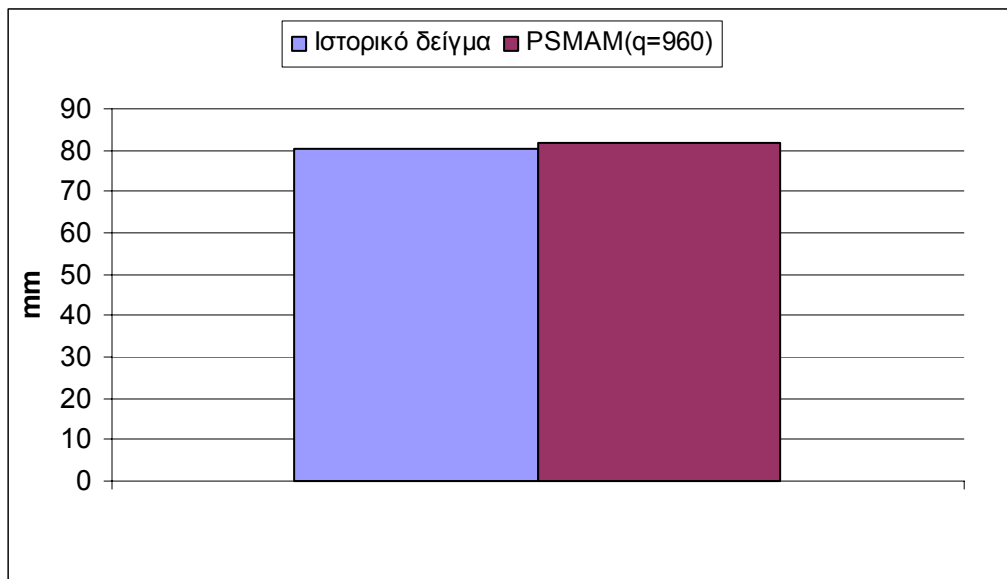


Σχήμα Α.4 Ραβδόγραμμα σύγκρισης των συντελεστών συσχέτισης για μοναδιαίο βήμα χρονικής μετατόπισης των μηνών του ιστορικού και του συνθετικού δείγματος απορροών (συντελεστές συσχέτισης των απορροών ενός μήνα με τις απορροές του προηγούμενου μήνα)

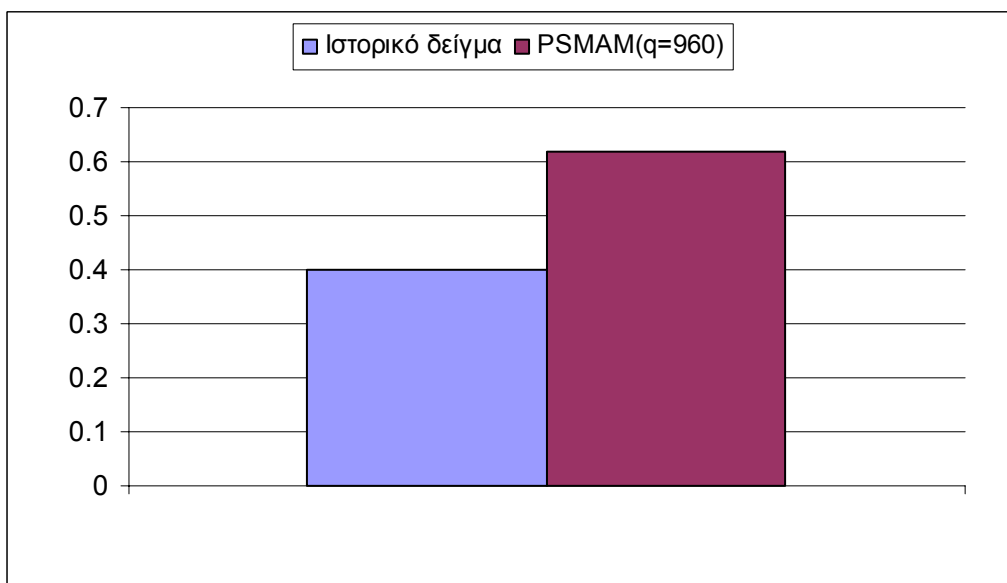
Στα Σχήματα Α.5, Α.6 και Α.7 πραγματοποιείται η σύγκριση της μέσης τιμής, της τυπικής απόκλισης και του συντελεστή ασυμμετρίας της ετήσιας ιστορικής χρονοσειράς, με τα αντίστοιχα στατιστικά χαρακτηριστικά της συνθετικής χρονοσειράς. Είναι προφανές ότι το μοντέλο PPSMA μπορεί να διατηρήσει την ετήσια μέση τιμή και τυπική απόκλιση, ενώ δεν μπορεί να αναπαραγάγει τον ετήσιο συντελεστή ασυμμετρίας.



Σχήμα Α.5 Ραβδόγραμμα σύγκρισης των ετήσιων μέσων τιμών του ιστορικού και του συνθετικού δείγματος απορροών

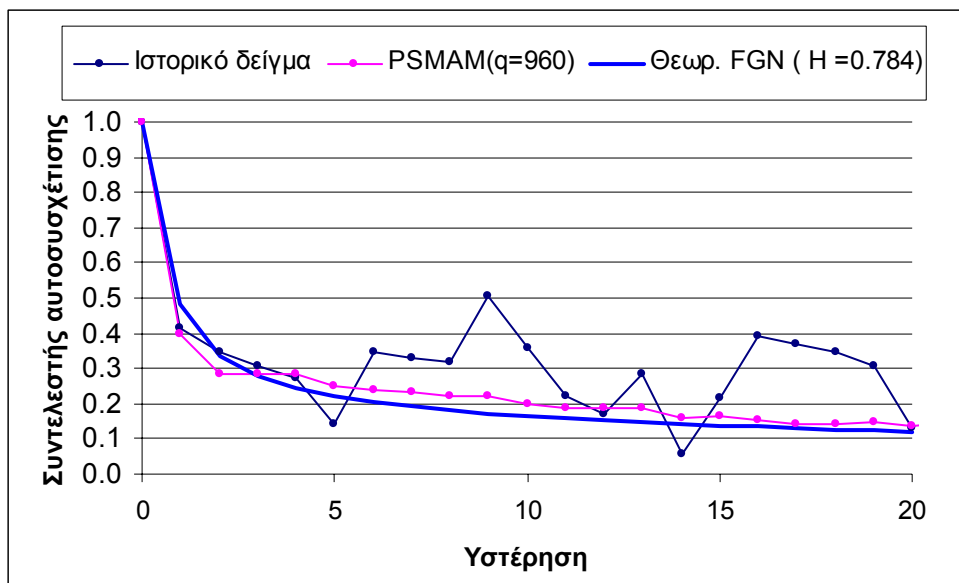


Σχήμα Α.6 Ραβδόγραμμα σύγκρισης των ετήσιων τυπικών αποκλίσεων του ιστορικού και του συνθετικού δείγματος απορροών

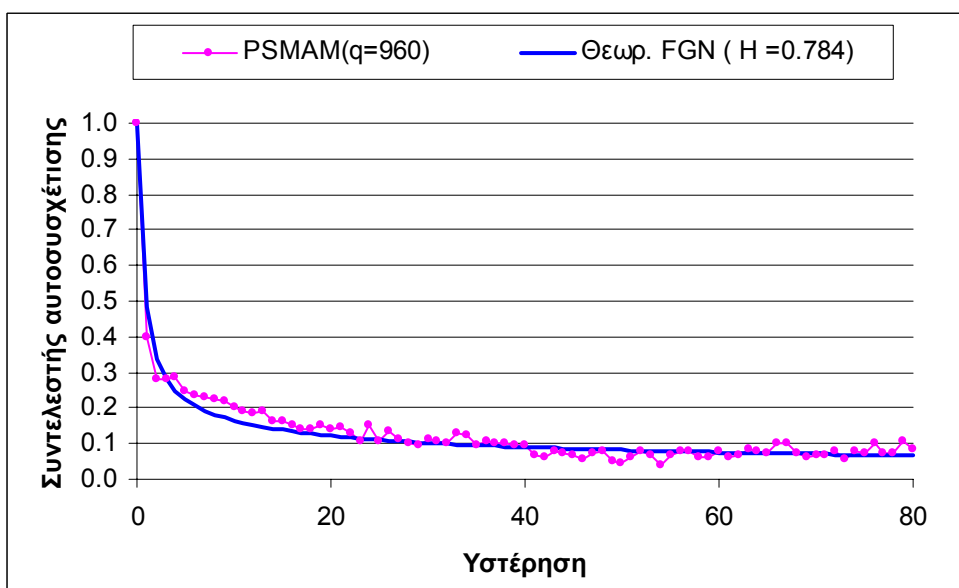


Σχήμα Α.7 Ραβδόγραμμα σύγκρισης των ετήσιων συντελεστών ασυμμετρίας του ιστορικού και του συνθετικού δείγματος απορροών

Στα Σχήματα Α.8 και Α.9 παρουσιάζονται τα διαγράμματα σύγκρισης του εμπειρικού αυτοσυσχετογράμματος της ετήσιας ιστορικής χρονοσειράς, με το θεωρητικό αυτοσυσχετόγραμμα FGN (όπως αυτό προκύπτει συναρτήσει του συντελεστή Hurst της χρονοσειράς των απορροών) και με το εμπειρικό αυτοσυσχετόγραμμα της ετήσιας συνθετικής χρονοσειράς που προέκυψε από την εφαρμογή του μοντέλου PPSMA. Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε την επιτυχία του μοντέλου στην διατήρηση της μακροπρόθεσμης εμμονής της ετήσιας ιστορικής χρονοσειράς.

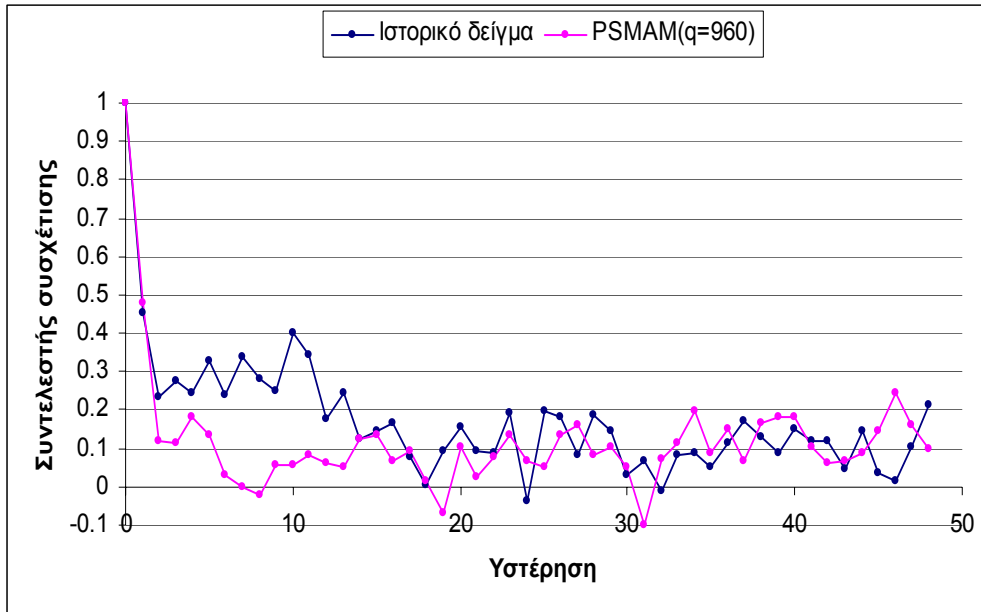


Σχήμα Α.8 Διάγραμμα σύγκρισης των συντελεστών αυτοσυσχέτισης για τα 20 πρώτα βήματα χρονικής μετατόπισης της ετήσιας ιστορικής και συνθετικής χρονοσειράς απορροών



Σχήμα Α.9 Διάγραμμα σύγκρισης των συντελεστών αυτοσυσχέτισης της ετήσιας συνθετικής χρονοσειράς απορροών με το θεωρητικό αυτοσυσχετόγραμμα FGN

Στο Σχήμα Α.10, παρουσιάζεται το διάγραμμα των συντελεστών συσχέτισης του μήνα Οκτωβρίου με προηγούμενους αυτού μήνες, τόσο για την ιστορική όσο και για τη συνθετική χρονοσειρά απορροών. Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι το εν λόγω διάγραμμα της συνθετικής χρονοσειράς έχει παρόμοια μορφή με το αντίστοιχο διάγραμμα του μοντέλου PSMA (Σχήμα 6.9).



Σχήμα Α.10 Διάγραμμα συντελεστών συσχέτισης του μήνα Οκτωβρίου με προηγούμενους αυτού μήνες για την ιστορική και την συνθετική χρονοσειρά απορροών

A.3 Σχόλια πάνω στο μοντέλο

Όπως μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε από τα Σχήματα Α.1-Α.10, το μοντέλο PPSMA είναι ιδιαίτερα ακριβές στη διατήρηση των εποχιακών μέσων τιμών, τυπικών αποκλίσεων και $1^{η}$ τάξεως συντελεστών συσχέτισης μεταξύ των εποχών, καθώς και στην αναπαραγωγή της ετήσιας μέσης τιμής, της ετήσιας τυπικής απόκλισης και της μακροπρόθεσμης εμμονής ιστορικών χρονοσειρών. Ταυτόχρονα, το μοντέλο PPSMA υπερέχει ως προς το μοντέλο PSMA στο ότι ελαχιστοποιεί τις προς βελτιστοποίηση παραμέτρους, αφού ανάγει το πρόβλημα προσδιορισμού των παραμέτρων α_j^s ($j = 0, \dots, q$ και $s = 1, \dots, k$) του μοντέλου, σε πρόβλημα προσδιορισμού των παραμέτρων β_l^s ($l = 0, \dots, d$ και $s = 1, \dots, k$) της μαθηματικής εκφράσεως Α.1, οι οποίες είναι σαφώς λιγότερες σε αριθμό. Πάντως, η μαθηματική έκφραση Α.1 των παραμέτρων α_j^s ($j = 0, \dots, q$ και $s = 1, \dots, k$) του μοντέλου αποδεικνύεται ανεπαρκής τόσο ως προς την διατήρηση των εποχιακών συντελεστών ασυμμετρίας όσο και του ετήσιου συντελεστή ασυμμετρίας. Συνεπώς, προτείνεται η συνέχιση της αναζητήσεως για μία πληρέστερη της Α.1, μαθηματικής εκφράσεως.

Παράρτημα Β

B.1 Ανάπτυξη πολυμεταβλητού μοντέλου βασιζόμενου σε τυχαίες διακυμάνσεις πολλαπλής κλίμακας (3MPAR1)

Σύμφωνα με τον Koutsoyiannis (2002b), αποδεικνύεται ότι είναι δυνατή η συνθετική αναπαραγωγή της μακροπρόθεσμης εμμονής μίας στάσιμης στοχαστικής ανελίξεως με την θεώρησή της ως ένα άθροισμα τυχαίων διακυμάνσεων πολλαπλής κλίμακας (multiple time-scale fluctuation). Η παραπάνω προσέγγιση εφαρμόστηκε με επιτυχία για την συνθετική αναπαραγωγή της μακροπρόθεσμης εμμονής στάσιμης χρονοσειράς μέσω του αθροίσματος τριών μοντέλων AR(1).

Σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν, διερευνούμε τη δυνατότητα να επιτευχθεί αναπαραγωγή της κυκλοστασιμότητας και της μακροπρόθεσμης εμμονής μίας κυκλοστάσιμης χρονοσειράς, μέσω του αθροίσματος ενός κυκλοστάσιμου πολυμεταβλητού μοντέλου MPAR(1) και δύο απλών πολυμεταβλητών μοντέλων MAR(1).

Το κυκλοστάσιμο πολυμεταβλητό μοντέλο MPAR(1) περιγράφεται από την εξίσωση,

$$\mathbf{H}_s = \mathbf{a}_s \mathbf{H}_{s-1} + \mathbf{b}_s \mathbf{V}_s \quad (\text{B.1})$$

όπου $\mathbf{H}_s = [H_s^1, H_s^2, \dots, H_s^n]^T$ είναι το διάνυσμα των n κυκλοστάσιμων στοχαστικών ανελίξεων με περίοδο¹ k κάθε μία εκ των οποίων αντιστοιχεί στην θέση που υποδηλώνεται με τον άνω δείκτη l ($l=1, 2, \dots, n$) για δεδομένη χρονική περίοδο s , \mathbf{a}_s περιοδικά μεταβαλλόμενες μητρωϊκές παράμετροι διαστάσεων $n \times n$ με περίοδο ίση με την περίοδο k της ανελίξεως, $\mathbf{V}_s = [V_s^1, V_s^2, \dots, V_s^n]$ το διάνυσμα των n κυκλοστάσιμων στοχαστικών ανελίξεων με περίοδο k , οι οποίες έχουν μηδενική συσχέτιση ως προς τον χρόνο s όσο και ως προς τις θέσεις ενδιαφέροντος l (δηλαδή $\text{Cov}[V_i^l, V_j^k] = 0$ για $l, k = 1, 2, \dots, n$) και \mathbf{b}_s επίσης περιοδικά μεταβαλλόμενες μητρωϊκές παράμετροι διαστάσεων $n \times n$ με περίοδο ίση με την περίοδο k της ανελίξεως.

Τα δύο απλά πολυμεταβλητά μοντέλα MAR(1) περιγράφονται από τις εξισώσεις,

¹ Η περίοδος της στοχαστικής ανελίξεως είναι ίση με τον αριθμό των εποχών που απαρτίζουν το έτος. Δηλαδή για μηνιαίες ανελίξεις έχουμε $k=12$.

$$\mathbf{J}_s = \mathbf{c} \mathbf{J}_{s-1} + \mathbf{d} \mathbf{W}_s \quad (\text{B.2})$$

και

$$\mathbf{F}_s = \mathbf{e} \mathbf{F}_{s-1} + \mathbf{g} \mathbf{U}_s \quad (\text{B.3})$$

όπου $\mathbf{J}_s = [J_s^1, J_s^2, \dots, J_s^n]^T$ και $\mathbf{F}_s = [F_s^1, F_s^2, \dots, F_s^n]^T$ είναι τα διανύσματα των n τυχαίων μεταβλητών κάθε μία εκ των οποίων αντιστοιχεί στην θέση που υποδηλώνεται με τον άνω δείκτη l ($l=1, 2, \dots, n$) για δεδομένη χρονική περίοδο s , \mathbf{c} και \mathbf{e} μητρωϊκές παράμετροι διαστάσεων $n \times n$, $\mathbf{W}_s = [W_s^1, W_s^2, \dots, W_s^n]^T$ και $\mathbf{U}_s = [U_s^1, U_s^2, \dots, U_s^n]^T$ τα διανύσματα των n τυχαίων μεταβλητών οι οποίες είναι ασυσχέτιστες τόσο ως προς τον χρόνο s όσο και ως προς τις θέσεις ενδιαφέροντος l (δηλαδή $\text{Cov}[W_i^l, W_j^k], \text{Cov}[U_i^l, U_j^k] = 0$ για $l, k = 1, 2, \dots, n$) και \mathbf{d}, \mathbf{g} επίσης μητρωϊκές παράμετροι διαστάσεων $n \times n$.

Έχοντας ορίσει τις διανυσματικές τυχαίες μεταβλητές $\mathbf{H}_s, \mathbf{J}_s$ και \mathbf{F}_s μπορούμε να ορίσουμε την διανυσματική τυχαία μεταβλητή $\mathbf{X}_s = [X_s^1, X_s^2, \dots, X_s^n]^T$ ως το άθροισμα των μεταβλητών $\mathbf{H}_s, \mathbf{J}_s$ και \mathbf{F}_s , ήτοι

$$\mathbf{X}_s = \mathbf{H}_s + \mathbf{J}_s + \mathbf{F}_s \quad (\text{B.4})$$

ή ισοδύναμα

$$\mathbf{X}_s = \mathbf{a}_s \mathbf{H}_{s-1} + \mathbf{c} \mathbf{J}_{s-1} + \mathbf{e} \mathbf{F}_{s-1} + \mathbf{b}_s \mathbf{V}_s + \mathbf{d} \mathbf{W}_s + \mathbf{g} \mathbf{U}_s \quad (\text{B.5})$$

Θεωρούμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές $\mathbf{H}_s, \mathbf{J}_s$ και \mathbf{F}_s έχουν μέση τιμή ίση με το μηδενικό διάνυσμα διαστάσεως n , ήτοι

$$E[\mathbf{H}_s] = E[\mathbf{J}_s] = E[\mathbf{F}_s] = \mathbf{0} \quad (\text{B.6})$$

οπότε

$$E[\mathbf{V}_s] = E[\mathbf{W}_s] = E[\mathbf{U}_s] = \mathbf{0} \quad (\text{B.7})$$

και έτσι

$$E[\mathbf{X}_s] = 0 \quad (\text{B.8})$$

Επισημαίνεται ότι η παραπάνω θεώρηση, δεν δημιουργεί πρόβλημα στην συνθετική αναπαραγωγή των μέσων τιμών των εποχών (μηνών) των θέσεων ενδιαφέροντος l ($l=1, 2, \dots, n$), αφού η γραμμικότητα της εκτιμήτριας που διέπει την μέση τιμή μας επιτρέπει με εφαρμογή του γραμμικού μετασχηματισμού,

$$\mathbf{X}'_s = \mathbf{X}_s + \boldsymbol{\mu}_s \quad (\text{B.9})$$

να αναπαράγουμε τις μέσες τιμές τόσο των εποχών όσο και του έτους της κάθε θέσεως ενδιαφέροντος l ($l=1, 2, \dots, n$). Με \mathbf{X}'_s συμβολίζεται η διανυσματική τυχαία μεταβλητή που έχει όμοια στατιστικά χαρακτηριστικά με την μεταβλητή \mathbf{X}_s , αλλά διάνυσμα μέσων τιμών ίσο με αυτό των ιστορικών χρονοσειρών των θέσεων l ($l=1, 2, \dots, n$) για κάθε χρονική περίοδο s , και με $\boldsymbol{\mu}_s$ το διάνυσμα των μέσων τιμών των ιστορικών χρονοσειρών των θέσεων για κάθε χρονική περίοδο s .

Θεωρούμε, επίσης, ότι οι τυπικές αποκλίσεις όλων των μεταβλητών του λευκού θορύβου είναι ίσες με την μονάδα (δηλαδή $\text{Var}[V_s^l] = \text{Var}[W_s^l] = \text{Var}[U_s^l] = 1, l=1, 2, \dots, n$), οπότε είναι προφανής η ισχύς της σχέσεως,

$$\text{Cov}[\mathbf{V}_s, \mathbf{V}_s] = \text{Cov}[\mathbf{W}_s, \mathbf{W}_s] = \text{Cov}[\mathbf{U}_s, \mathbf{U}_s] = \mathbf{I}_n \quad (\text{B.10})$$

όπου \mathbf{I}_n ο μοναδιαίος $n \times n$ πίνακας.

Τέλος γίνεται η παραδοχή, ότι τα μητρώα \mathbf{a}_s ($s = 1, \dots, k$), \mathbf{c} και \mathbf{e} είναι διαγώνια, ήτοι

$$\mathbf{a}_s = \text{diag}(a_{11}^s, a_{22}^s, \dots, a_{nn}^s) \quad \text{για } s = 1, \dots, k \quad (\text{B.11})$$

$$\mathbf{c} = \text{diag}(c_{11}, c_{22}, \dots, c_{mm}) \quad (\text{B.12})$$

$$\mathbf{e} = \text{diag}(e_{11}, e_{22}, \dots, e_{mm}) \quad (\text{B.13})$$

Τονίζεται ότι η εν λόγω παραδοχή έγινε με σκοπό το μοντέλο να είναι φειδωλό ως προς τις παραμέτρους που χρησιμοποιεί. Έτσι αποδεχθήκαμε ότι θα διατηρήσουμε την

ετεροσυσχέτιση μεταξύ διαφορετικών θέσεων l μόνο για μηδενικό βήμα χρονικής μετατόπισης, δηλαδή

$$\text{Cov}[H_i^l, H_j^k] = \text{Cov}[J_i^l, J_j^k] = \text{Cov}[F_i^l, F_j^k] = \text{Cov}[X_i^l, X_j^k] = 0 \text{ για } l, k = 1, 2, \dots, n$$

και $i \neq j, l \neq k$ (B.14)

Στην συνέχεια παρατίθενται οι εξισώσεις που πρέπει να τηρούνται ώστε το εν λόγω μοντέλο να επιτυγχάνει:

- την διατήρηση των συνδιασπορών των εποχών (μηνών) της εκάστοτε θέσεως ενδιαφέροντος l ($l = 1, \dots, n$) για μοναδιαίο βήμα χρονικής μετατόπισης,
- την διατήρηση των συνδιασπορών των εποχών (μηνών) μεταξύ ιδίων ή διαφορετικών θέσεων ενδιαφέροντος l ($l = 1, \dots, n$) για μηδενικό βήμα χρονικής μετατόπισης,
- την διατήρηση των ασυμμετριών των εποχών (μηνών) κάθε θέσης ενδιαφέροντος l ($l = 1, \dots, n$),
- την διατήρηση των ετήσιων διασπορών κάθε θέσεως ενδιαφέροντος l ($l = 1, \dots, n$),
- την διατήρηση των ετήσιων αυτοσυνδιασπορών κάθε θέσεως ενδιαφέροντος l ($l = 1, \dots, n$) για διάφορα χρονικά βήματα μετατόπισης λ (διατήρηση της μακροπρόθεσμης εμμονής κάθε θέσεως ενδιαφέροντος l).

Εξίσωση διατήρησης των εποχιακών (μηνιαίων) συνδιασπορών της εκάστοτε θέσεως ενδιαφέροντος για μοναδιαίο βήμα χρονικής μετατόπισης

Κατόπιν αλγεβρικών υπολογισμών που παρατίθενται στην συνέχεια, αποδεικνύεται ότι,

$$\text{diag}(\text{Cov}[X_s^1, X_{s-1}^1], \dots, \text{Cov}[X_s^n, X_{s-1}^n]) = \mathbf{D}(\mathbf{a}_s \text{Cov}[\mathbf{H}_{s-1}, \mathbf{H}_{s-1}] + \mathbf{c} \text{Cov}[\mathbf{J}_s, \mathbf{J}_s] + \mathbf{e} \text{Cov}[\mathbf{F}_s, \mathbf{F}_s]) \text{ για } s = 1, \dots, k$$

(B.15)

όπου με $\mathbf{D}(\mathbf{p})$ συμβολίζεται ο πίνακας που έχει ίδιες διαστάσεις με τον τετραγωνικό πίνακα \mathbf{p} , μηδενικά μη διαγώνια στοιχεία, και διαγώνια στοιχεία που είναι ίσα με τα αντίστοιχα του πίνακα \mathbf{p} .

Απόδειξη

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_s \mathbf{X}_{s-1}^T = & \mathbf{a}_s \mathbf{H}_{s-1} (\mathbf{H}_{s-1}^T + \mathbf{J}_{s-1}^T + \mathbf{F}_{s-1}^T) + \mathbf{c} \mathbf{J}_{s-1} (\mathbf{H}_{s-1}^T + \mathbf{J}_{s-1}^T + \mathbf{F}_{s-1}^T) + \mathbf{e} \mathbf{F}_{s-1} (\mathbf{H}_{s-1}^T + \\ & \mathbf{J}_{s-1}^T + \mathbf{F}_{s-1}^T) + \mathbf{b}_s \mathbf{V}_s (\mathbf{H}_{s-1}^T + \mathbf{J}_{s-1}^T + \mathbf{F}_{s-1}^T) + \mathbf{d} \mathbf{W}_s (\mathbf{H}_{s-1}^T + \mathbf{J}_{s-1}^T + \mathbf{F}_{s-1}^T) + \\ & \mathbf{g} \mathbf{U}_s (\mathbf{H}_{s-1}^T + \mathbf{J}_{s-1}^T + \mathbf{F}_{s-1}^T) \end{aligned} \quad (\text{B.15.1})$$

$$\begin{aligned} E[\mathbf{X}_s \mathbf{X}_{s-1}^T] = & \mathbf{a}_s (E[\mathbf{H}_{s-1} \mathbf{H}_{s-1}^T] + E[\mathbf{H}_{s-1} \mathbf{J}_{s-1}^T] + E[\mathbf{H}_{s-1} \mathbf{F}_{s-1}^T]) + \\ & \mathbf{c} (E[\mathbf{J}_{s-1} \mathbf{H}_{s-1}^T] + E[\mathbf{J}_{s-1} \mathbf{J}_{s-1}^T] + E[\mathbf{J}_{s-1} \mathbf{F}_{s-1}^T]) + \\ & \mathbf{e} (E[\mathbf{F}_{s-1} \mathbf{H}_{s-1}^T] + E[\mathbf{F}_{s-1} \mathbf{J}_{s-1}^T] + E[\mathbf{F}_{s-1} \mathbf{F}_{s-1}^T]) + \\ & \mathbf{b}_s (E[\mathbf{V}_s \mathbf{H}_{s-1}^T] + E[\mathbf{V}_s \mathbf{J}_{s-1}^T] + E[\mathbf{V}_s \mathbf{F}_{s-1}^T]) + \\ & \mathbf{d} (E[\mathbf{W}_s \mathbf{H}_{s-1}^T] + E[\mathbf{W}_s \mathbf{J}_{s-1}^T] + E[\mathbf{W}_s \mathbf{F}_{s-1}^T]) + \\ & \mathbf{g} (E[\mathbf{U}_s \mathbf{H}_{s-1}^T] + E[\mathbf{U}_s \mathbf{J}_{s-1}^T] + E[\mathbf{U}_s \mathbf{F}_{s-1}^T]) \end{aligned} \quad (\text{B.15.2})$$

Από την (B.15.2) και δεδομένου ότι,

$$\begin{aligned} E[\mathbf{H}_{s-1} \mathbf{J}_{s-1}^T] = E[\mathbf{H}_{s-1} \mathbf{F}_{s-1}^T] = E[\mathbf{J}_{s-1} \mathbf{H}_{s-1}^T] = E[\mathbf{J}_{s-1} \mathbf{F}_{s-1}^T] = E[\mathbf{F}_{s-1} \mathbf{H}_{s-1}^T] = E[\mathbf{F}_{s-1} \mathbf{J}_{s-1}^T] = \\ E[\mathbf{V}_s \mathbf{H}_{s-1}^T] = E[\mathbf{V}_s \mathbf{J}_{s-1}^T] = E[\mathbf{V}_s \mathbf{F}_{s-1}^T] = E[\mathbf{W}_s \mathbf{H}_{s-1}^T] = E[\mathbf{W}_s \mathbf{J}_{s-1}^T] = \\ E[\mathbf{W}_s \mathbf{F}_{s-1}^T] = E[\mathbf{U}_s \mathbf{H}_{s-1}^T] = E[\mathbf{U}_s \mathbf{J}_{s-1}^T] = E[\mathbf{U}_s \mathbf{F}_{s-1}^T] = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.15.3})$$

καταλήγουμε στην εξίσωση,

$$E[\mathbf{X}_s \mathbf{X}_{s-1}^T] = \mathbf{a}_s E[\mathbf{H}_{s-1} \mathbf{H}_{s-1}^T] + \mathbf{c} E[\mathbf{J}_{s-1} \mathbf{J}_{s-1}^T] + \mathbf{e} E[\mathbf{F}_{s-1} \mathbf{F}_{s-1}^T] \quad (\text{B.15.4})$$

που ισοδυναμεί με την εξίσωση,

$$\text{Cov}[\mathbf{X}_s, \mathbf{X}_{s-1}] = \mathbf{a}_s \text{Cov}[\mathbf{H}_{s-1}, \mathbf{H}_{s-1}] + \mathbf{c} \text{Cov}[\mathbf{J}_{s-1}, \mathbf{J}_{s-1}] + \mathbf{e} \text{Cov}[\mathbf{F}_{s-1}, \mathbf{F}_{s-1}] \quad (\text{B.15.5})$$

Από την (B.15.5) και δεδομένου ότι ενδιαφερόμαστε μόνο για τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα $\text{Cov}[\mathbf{X}_s, \mathbf{X}_{s-1}]$ καταλήγουμε στην εξίσωση,

$$\begin{aligned} \text{diag}(\text{Cov}[X_s^1, X_{s-1}^1], \dots, \text{Cov}[X_s^n, X_{s-1}^n]) = \mathbf{D}(\mathbf{a}_s \text{Cov}[\mathbf{H}_{s-1}, \mathbf{H}_{s-1}] + \mathbf{c} \text{Cov}[\mathbf{J}_{s-1}, \mathbf{J}_{s-1}] + \\ \mathbf{e} \text{Cov}[\mathbf{F}_{s-1}, \mathbf{F}_{s-1}]) \end{aligned} \quad (\text{B.15.6})$$

και επειδή τα στοιχεία των διανυσμάτων \mathbf{J}_s , \mathbf{F}_s είναι στάσιμες στοχαστικές ανεξίτητες, ισχύει ότι

$$\text{diag}(\text{Cov}[X_s^1, X_{s-1}^1], \dots, \text{Cov}[X_s^n, X_{s-1}^n]) = \mathbf{D}(\mathbf{a}_s \text{Cov}[\mathbf{H}_{s-1}, \mathbf{H}_{s-1}] + \mathbf{c} \text{Cov}[\mathbf{J}_s, \mathbf{J}_s] + \mathbf{e} \text{Cov}[\mathbf{F}_s, \mathbf{F}_s]) \text{ για } s = 1, \dots, k \quad (\text{B.15.7})$$

Εξίσωση διατήρησης των εποχιακών (μηνιαίων) συνδιασπορών μεταξύ των θέσεων, για μηδενικό βήμα χρονικής μετατόπισης

Κατόπιν αλγεβρικών υπολογισμών που παρατίθενται στην συνέχεια, αποδεικνύεται ότι,

$$\text{Cov}[\mathbf{X}_s, \mathbf{X}_s] = \mathbf{a}_s \text{Cov}[\mathbf{H}_{s-1}, \mathbf{H}_{s-1}] \mathbf{a}_s^T + \mathbf{c} \text{Cov}[\mathbf{J}_s, \mathbf{J}_s] \mathbf{c}^T + \mathbf{e} \text{Cov}[\mathbf{F}_s, \mathbf{F}_s] \mathbf{e}^T + \mathbf{b}_s \mathbf{b}_s^T + \mathbf{d} \mathbf{d}^T + \mathbf{g} \mathbf{g}^T \text{ για } s = 1, \dots, k \quad (\text{B.16})$$

όπου \mathbf{a}_s^T ο ανάστροφος του πίνακα \mathbf{a}_s .

Απόδειξη

$$\mathbf{X}_s \mathbf{X}_s^T = \mathbf{a}_s \mathbf{H}_{s-1} (\mathbf{H}_s^T + \mathbf{J}_s^T + \mathbf{F}_s^T) + \mathbf{c} \mathbf{J}_{s-1} (\mathbf{H}_s^T + \mathbf{J}_s^T + \mathbf{F}_s^T) + \mathbf{e} \mathbf{F}_{s-1} (\mathbf{H}_s^T + \mathbf{J}_s^T + \mathbf{F}_s^T) + \mathbf{b}_s \mathbf{V}_s (\mathbf{H}_s^T + \mathbf{J}_s^T + \mathbf{F}_s^T) + \mathbf{d} \mathbf{W}_s (\mathbf{H}_s^T + \mathbf{J}_s^T + \mathbf{F}_s^T) + \mathbf{g} \mathbf{U}_s (\mathbf{H}_s^T + \mathbf{J}_s^T + \mathbf{F}_s^T) \quad (\text{B.16.1})$$

από την (B.16.1), με χρήση των εξισώσεων των μοντέλων (B.1), (B.2), (B.3) και δεδομένου ότι,

$$\begin{aligned} E[\mathbf{H}_{s-1} \mathbf{J}_s^T] &= E[\mathbf{H}_{s-1} \mathbf{F}_s^T] = E[\mathbf{J}_{s-1} \mathbf{H}_s^T] = E[\mathbf{J}_{s-1} \mathbf{F}_s^T] = E[\mathbf{F}_{s-1} \mathbf{H}_s^T] = E[\mathbf{F}_{s-1} \mathbf{J}_s^T] = \\ &E[\mathbf{H}_{s-1} \mathbf{V}_s^T] = E[\mathbf{J}_{s-1} \mathbf{W}_s^T] = E[\mathbf{F}_{s-1} \mathbf{U}_s^T] = E[\mathbf{V}_s \mathbf{H}_{s-1}^T] = E[\mathbf{V}_s \mathbf{J}_s^T] = \\ &E[\mathbf{V}_s \mathbf{F}_s^T] = E[\mathbf{W}_s \mathbf{H}_s^T] = E[\mathbf{W}_s \mathbf{J}_{s-1}^T] = E[\mathbf{W}_s \mathbf{F}_s^T] = E[\mathbf{U}_s \mathbf{H}_s^T] = \\ &E[\mathbf{U}_s \mathbf{J}_s^T] = E[\mathbf{U}_s \mathbf{F}_{s-1}^T] = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.16.2})$$

κατόπιν αλγεβρικών υπολογισμών καταλήγουμε στην εξίσωση,

$$E[\mathbf{X}_s \mathbf{X}_s^T] = \mathbf{a}_s E[\mathbf{H}_{s-1} \mathbf{H}_{s-1}^T] \mathbf{a}_s^T + \mathbf{c} E[\mathbf{J}_{s-1} \mathbf{J}_{s-1}^T] \mathbf{c}^T + \mathbf{e} E[\mathbf{F}_{s-1} \mathbf{F}_{s-1}^T] \mathbf{e}^T + \mathbf{b}_s E[\mathbf{V}_s \mathbf{V}_s^T] \mathbf{b}_s^T + \mathbf{d} E[\mathbf{W}_s \mathbf{W}_s^T] \mathbf{d}^T + \mathbf{g} E[\mathbf{U}_s \mathbf{U}_s^T] \mathbf{g}^T \quad (\text{B.16.3})$$

που ισοδυναμεί με την εξίσωση,

$$\text{Cov}[\mathbf{X}_s, \mathbf{X}_s] = \mathbf{a}_s \text{Cov}[\mathbf{H}_{s-1}, \mathbf{H}_{s-1}] \mathbf{a}_s^T + \mathbf{c} \text{Cov}[\mathbf{J}_{s-1}, \mathbf{J}_{s-1}] \mathbf{c}^T + \mathbf{e} \text{Cov}[\mathbf{F}_{s-1}, \mathbf{F}_{s-1}] \mathbf{e}^T + \mathbf{b}_s \text{Cov}[\mathbf{V}_s, \mathbf{V}_s] \mathbf{b}_s^T + \mathbf{d} \text{Cov}[\mathbf{W}_s, \mathbf{W}_s] \mathbf{d}^T + \mathbf{g} \text{Cov}[\mathbf{U}_s, \mathbf{U}_s] \mathbf{g}^T \quad (\text{B.16.4})$$

Δεδομένης της ισχύος της (B.16.4) και λαμβάνοντας υπ' όψιν την υπόθεση (B.10), καθώς και το γεγονός ότι τα στοιχεία των διανυσμάτων \mathbf{J}_s , \mathbf{F}_s είναι στάσιμες στοχαστικές ανελίξεις, καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\text{Cov}[\mathbf{X}_s, \mathbf{X}_s] = \mathbf{a}_s \text{Cov}[\mathbf{H}_{s-1}, \mathbf{H}_{s-1}] \mathbf{a}_s^T + \mathbf{c} \text{Cov}[\mathbf{J}_s, \mathbf{J}_s] \mathbf{c}^T + \mathbf{e} \text{Cov}[\mathbf{F}_s, \mathbf{F}_s] \mathbf{e}^T + \mathbf{b}_s \mathbf{b}_s^T + \mathbf{d} \mathbf{d}^T + \mathbf{g} \mathbf{g}^T \quad \text{για } s = 1, \dots, k \quad (\text{B.16.5})$$

Εξίσωση διατήρησης των διανυσμάτων των τρίτων ροπών των εποχών (μηνών)

Από την (B.4) είναι προφανές ότι,

$$\mu_3 [\mathbf{X}_s] = \mu_3 [\mathbf{H}_s] + \mu_3 [\mathbf{J}_s] + \mu_3 [\mathbf{F}_s] \quad (\text{B.17})$$

Με χρήση των (B.1), (B.2), (B.3) και δεδομένου ότι τα στοιχεία των διανυσμάτων \mathbf{J}_s , \mathbf{F}_s είναι στάσιμες στοχαστικές ανελίξεις, καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\mu_3 [\mathbf{X}_s] = \mathbf{a}_s^{(3)} \mu_3 [\mathbf{H}_{s-1}] + \mathbf{c}^{(3)} \mu_3 [\mathbf{J}_s] + \mathbf{e}^{(3)} \mu_3 [\mathbf{F}_s] + \mathbf{b}_s^{(3)} \mu_3 [\mathbf{V}_s] + \mathbf{d}^{(3)} \mu_3 [\mathbf{W}_s] + \mathbf{g}^{(3)} \mu_3 [\mathbf{U}_s] \quad \text{για } s = 1, \dots, k \quad (\text{B.18})$$

Εξίσωση διατήρησης των ετήσιων διασπορών των θέσεων

Ορίζουμε την διανυσματική τυχαία μεταβλητή $\mathbf{Z}_p = [Z_p^1, Z_p^2, \dots, Z_p^n]^T$ που προκύπτει από την συνάθροιση των τυχαίων διανυσματικών μεταβλητών \mathbf{X}_s των k υποπεριόδων (π.χ. εποχών, μηνών) μίας περιόδου (π.χ. έτος). Σε αυτήν την περίπτωση ο τύπος που συνδέει τις μεταβλητές \mathbf{Z}_p με τις μεταβλητές \mathbf{X}_s δίδεται από την σχέση,

$$\mathbf{Z}_p = \sum_{j=(p-1)k+1}^{pk} \mathbf{X}_j \quad (\text{B.19})$$

Δεδομένου ότι,

$$\mathbf{Z}_p \mathbf{Z}_p^T = (\mathbf{X}_{k(p-1)+1} + \mathbf{X}_{k(p-1)+2} + \dots + \mathbf{X}_{kp}) (\mathbf{X}_{k(p-1)+1} + \mathbf{X}_{k(p-1)+2} + \dots + \mathbf{X}_{kp})^T \quad (\text{B.20})$$

και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι οι πίνακες \mathbf{a}_s , \mathbf{c} , \mathbf{e} είναι διαγώνιοι, κατόπιν αλγεβρικών υπολογισμών καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\begin{aligned} \text{diag}(\text{Cov}[Z_p^1, Z_p^1], \dots, \text{Cov}[Z_p^n, Z_p^n]) &= \mathbf{D} \left(\left\{ \mathbf{a}_1^{(2)} \left[\mathbf{I} + 2 \sum_{i=2}^k \left(\prod_{j=2}^i \mathbf{a}_j \right) \right] \right\} \text{Cov}[\mathbf{H}_k, \mathbf{H}_k] + \right. \\ &\quad \left. \sum_{l=1}^{k-1} \left\{ \mathbf{a}_{l+1}^{(2)} \left[\mathbf{I} + 2 \sum_{i=l+2}^k \left(\prod_{j=l+2}^i \mathbf{a}_j \right) \right] \text{Cov}[\mathbf{H}_l, \mathbf{H}_l] \right\} + \left\{ 12 \mathbf{c}^{(2)} + 2 \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{k-i} \mathbf{c}^{(2+j)} \right\} \right. \\ &\quad \left. \text{Cov}[\mathbf{J}_s, \mathbf{J}_s] + \left\{ 12 \mathbf{e}^{(2)} + 2 \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{k-i} \mathbf{e}^{(2+j)} \right\} \text{Cov}[\mathbf{F}_s, \mathbf{F}_s] + \right. \\ &\quad \left. \sum_{i=1}^k \left\{ \left[\mathbf{I} + 2 \sum_{j=i+1}^k \left(\prod_{l=i+1}^j \mathbf{a}_l \right) \right] \mathbf{b}_i \mathbf{b}_i^T \right\} + \left\{ \sum_{i=1}^k \left[\mathbf{I} + 2 \sum_{j=1}^{k-i} \mathbf{c}^{(j)} \right] \right\} \mathbf{d} \mathbf{d}^T + \right. \\ &\quad \left. \left\{ \sum_{i=1}^k \left[\mathbf{I} + 2 \sum_{j=1}^{k-i} \mathbf{e}^{(j)} \right] \right\} \mathbf{g} \mathbf{g}^T \right) \quad (\text{B.21}) \end{aligned}$$

από όπου μπορούν να προσδιοριστούν τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα των ετήσιων συνδιασπορών των θέσεων για μηδενικό βήμα χρονικής μετατόπισης.

Εξίσωση διατήρησης των αυτοσυνδιασπορών των ετήσιων χρονοσειρών των θέσεων (διατήρηση μακροπρόθεσμης εμμονής)

Δεδομένου ότι,

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_p \mathbf{Z}_{p-\lambda}^T &= (\mathbf{X}_{k(p-1)+1} + \mathbf{X}_{k(p-1)+2} + \dots + \mathbf{X}_{kp}) (\mathbf{X}_{k(p-\lambda)+1} + \mathbf{X}_{k(p-\lambda)+2} + \dots + \mathbf{X}_{k(p-\lambda)})^T \\ &\quad \text{για } \lambda \geq 1 \quad (\text{B.22}) \end{aligned}$$

και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι οι πίνακες \mathbf{a}_s , \mathbf{c} , \mathbf{e} είναι διαγώνιοι, κατόπιν αλγεβρικών υπολογισμών καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\begin{aligned}
& \text{diag}(\text{Cov}[Z_{p-\lambda}^1, Z_{p-\lambda}^1], \dots, \text{Cov}[Z_{p-\lambda}^n, Z_{p-\lambda}^n]) = \\
& \mathbf{D} \left[\left(\prod_{s=1}^k \mathbf{a}_s^{(s-1)} \right) \left[\sum_{s=1}^k \left\{ \left(\prod_{j=s+1}^k \mathbf{a}_j \right) \left[\sum_{l=1}^k \left(\prod_{m=1}^l \mathbf{a}_m \right) \right] \text{Cov}[\mathbf{H}_s, \mathbf{H}_s] \right\} \right] \right] + \\
& \left\{ \sum_{s=0}^{k-1} \sum_{l=0}^{k-1} \mathbf{e}^{(k\lambda+s-l)} \right\} \text{Cov}[\mathbf{J}_s, \mathbf{J}_s] + \left\{ \sum_{s=0}^{k-1} \sum_{l=0}^{k-1} \mathbf{e}^{(k\lambda+s-l)} \right\} \text{Cov}[\mathbf{F}_s, \mathbf{F}_s] \quad (\text{B.23})
\end{aligned}$$

από όπου μπορούν να προσδιοριστούν τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα των ετήσιων συνδιασπορών των θέσεων για βήμα χρονικής μετατόπισης $\lambda \geq 1$.

Στο σημείο αυτό αξίζει να τονίσουμε ότι οι παράμετροι των τριών επιμέρους μοντέλων (B.1), (B.2) και (B.3) μπορούν να προσδιοριστούν από τις εξισώσεις (B.15) - (B.23) με χρήση μη γραμμικής βελτιστοποίησης. Η πολυπλοκότητα, όμως, των (B.21) και (B.23), κάνει ιδιαίτερα δύσκολη την εφαρμογή βελτιστοποίησης, λόγω του ότι απαιτείται μία ιδιαίτερα σύνθετης μορφής αντικειμενική συνάρτηση. Ως εκ τούτου πρέπει να αναζητηθεί κάποιο άλλο μοντέλο που είτε δεν θα απαιτεί βελτιστοποίηση για τον προσδιορισμό των παραμέτρων του, είτε θα απαιτεί κάποια μορφή βελτιστοποίησης που θα είναι όμως κατά το δυνατόν απλή.

Παράρτημα Γ

Για την συνθετική αναπαραγωγή της μακροπρόθεσμης εμμονής της ανακατασκευασμένης ιστορικής χρονοσειράς μέσω των ετησίων θερμοκρασιών του παραδείγματος εφαρμογής της ενότητας 2.7, αναπτύχθηκε πρόγραμμα σε γλώσσα Fortran που χρησιμοποιεί το στοχαστικό μοντέλο «Συμμετρικά Κινούμενου Μέσου Όρου» [Symmetric Moving Average model, (SMA)].

Γ.1 Πρόγραμμα για την εφαρμογή του μοντέλου SMA

Περιγραφή του προγράμματος

Το πρόγραμμα ζητά από τον χρήστη να εισάγει:

- τον αριθμό των χρονικών βημάτων μετατόπισης (lags) στα οποία θα περιοριστεί η συνθετική αναπαραγωγή του θεωρητικού αυτοσυσχετογράμματος FGN που περιγράφηκε στην ενότητα 2.6
- τον συντελεστή ακρίβειας επίτευξης της εν λόγω αναπαραγωγής,
- τον συντελεστή Hurst της στοχαστικής ανέλιξης που θέλει ο χρήστης να αναπαράγει συνθετικά,
- την μέση τιμή της στοχαστικής ανέλιξης που θέλει ο χρήστης να αναπαράγει συνθετικά,
- την διασπορά της στοχαστικής ανέλιξης που θέλει ο χρήστης να αναπαράγει συνθετικά,
- την ασυμμετρία της στοχαστικής ανέλιξης που θέλει ο χρήστης να αναπαράγει συνθετικά,
- τον αριθμό των συνθετικών πραγματοποιήσεων που θέλει ο χρήστης να παράγει με χρήση του μοντέλου SMA.

Το πρόγραμμα εκτυπώνει το αρχείο SMA.TXT στο οποίο περιέχονται οι συνθετικές πραγματοποιήσεις της στοχαστικής ανέλιξης ενδιαφέροντος.

Κυρίως πρόγραμμα

```
PROGRAM MAIN
```

```

USE MSIMSL
REAL*8 T,B,H,Q,G,M3,ME
INTEGER*4 M,N
WRITE(*,*) 'SMA'
WRITE(*,*)
WRITE(*,*) 'NUMBER OF AUTOCORRELATIONS TO BE PRESERVED'
READ(*,*) T
WRITE(*,*) 'PRECISION COEFFICIENT'
READ(*,*) B
WRITE(*,*) 'HURST COEFFICIENT'
READ(*,*) H
WRITE(*,*) 'MEAN OF THE STOCHASTIC PROCESS'
READ(*,*) ME
WRITE(*,*) 'VARIANCE OF THE STOCHASTIC PROCESS'
READ(*,*) G
WRITE(*,*) 'SKEWNESS OF THE STOCHASTIC PROCESS'
READ(*,*) M3

Q=MAX(T, (2.*B/(H**2.-0.25))**(1./(H-1.5)))

WRITE(*,*) 'THE LEAST NUMBER OF PARAMETERS NEEDED IS'
WRITE(*,*) Q
WRITE(*,*) 'INPUT YOUR PREFERABLE NUMBER OF PARAMETERS'
READ(*,*) M
M=2*M+1
WRITE(*,*) 'NUMBER OF SYNTHETIC REALISATIONS TO BE GENERATED'
READ(*,*) N

CALL SMA(M,N,G,H,M3,ME)
WRITE(*,*) ' '
WRITE(*,*) ' '
WRITE(*,*) 'THANK YOU FOR USING THIS PROGRAM MADE BY'
WRITE(*,*) '      ANDREAS LAGOUSSIS      '
READ(*,*)

STOP
END

```

Υπορουτίνα κυρίως υπολογισμών μοντέλου SMA

```

SUBROUTINE SMA(M,N,G,H,M3,ME)
INTEGER*4 M,N
REAL*8 G,H,M3,ME,M31
REAL*8 V(M-1+N),X(N),A(M),AO,J,SUM
INTEGER*4 I

OPEN(10,FILE='SMA.TXT')

AO=SQRT((2.-2.*H)*G)/(1.5-H)
A((M-1)/2+1)=AO

J=0.
DO 10 I=(M-1)/2+2,M,1
  J=J+1.
  A(I)=AO/2.*((J+1.)**(H+0.5)+(J-1.)**(H+0.5)-2.*J**(H+0.5))
  A(m+1-I)=A(I)
10 CONTINUE

SUM=0.

```

```

DO 15 I=1,M,1
    SUM=SUM+A(I)**3.
15 CONTINUE

M31=M3/SUM

CALL GAMA(DABS(M31),V,M-1+N)

IF(M31.LT.0.)THEN
    DO 17 I=1,M-1+N,1
        V(I)=-V(I)
    17 CONTINUE
ENDIF

DO 20 I=1,N,1
    SUM=0.
        DO 30 J=1,M,1
            SUM=SUM+A(J)*V(I-1+J)
        30 CONTINUE
    X(I)=SUM
20 CONTINUE

DO 35 I=1,N,1
    X(I)=X(I)+ME
35 CONTINUE

DO 40 I=1,N,1
    WRITE(10,*)X(I)
40 CONTINUE

RETURN
END

```

Υπορουτίνα υπολογισμού διανύσματος λευκού θορύβου που ακολουθεί κατανομή Γάμα με μηδενική μέση τιμή, μοναδιαία τυπική απόκλιση και δεδομένο συντελεστή ασυμμετρίας

```

SUBROUTINE GAMA(M3,R,N)
REAL*8 M3
INTEGER*4 N

REAL*8 L,K,C,R(N)
INTEGER*4 I

L=2./M3
K=L**2.
C=-L

DO 10 I=1,N,1
    R(I)=0.
10 CONTINUE

CALL DRNGAM(N,K,R)

DO 20 I=1,N,1
    R(I)=R(I)/L+C
20 CONTINUE

RETURN
END

```

Δεδομένα για το παράδειγμα εφαρμογής της ενότητας 2.7

Μέση τιμή = -0.36829 (ίση με αυτή του ιστορικού δείγματος)

Τυπική απόκλιση = 0.439738 (ίση με αυτή του ιστορικού δείγματος)

Συντελεστής ασυμμετρίας = -0.08877 (ίσος με αυτόν του ιστορικού δείγματος)

Συντελεστής Hurst = 0.842 (ίσος με αυτόν του ιστορικού δείγματος)

Μήκος συνθετικής χρονοσειράς: 5000 έτη

Παράρτημα Δ

Για την κατασκευή των συνθετικών χρονοσειρών μηνιαίων υψών βροχής και απορροής των ενοτήτων 2.5 και 5.2, αναπτύχθηκε πρόγραμμα σε γλώσσα Fortran το οποίο αναλύει τις ιστορικές χρονοσειρές βροχοπτώσεων και απορροών και εφαρμόζει πολυμεταβλητό κυκλοστάσιμο μοντέλο MPAR(1) (Multivariate Periodic Autoregressive model).

Δ.1 Πρόγραμμα για την εφαρμογή του μοντέλου MPAR(1)

Περιγραφή προγράμματος

Το πρόγραμμα που αναπτύχθηκε πραγματοποιεί:

- ανάλυση ιστορικών χρονοσειρών μηνιαίων τιμών υδρολογικών μεταβλητών που διατηρούν μηδενικής και 1^{ης} τάξεως αυτοσυσχέτιση και ετεροσυσχέτιση,
- παραγωγή συνθετικών χρονοσειρών των υδρολογικών μεταβλητών που αναλύθηκαν οι οποίες θα διατηρούν την μέση τιμή, την τυπική απόκλιση και την ασυμμετρία των ιστορικών χρονοσειρών, με μέριμνα τα παραπάνω στατιστικά χαρακτηριστικά να είναι διαφορετικά σε κάθε μήνα του έτους. Επίσης λαμβάνεται μέριμνα για την διατήρηση στις συνθετικές χρονοσειρές μηδενικής και 1^{ης} τάξεως αυτοσυσχέτισης και ετεροσυσχέτισης.

Για την παραγωγή των συνθετικών χρονοσειρών γίνεται χρήση πολυμεταβλητού κυκλοστάσιμου μοντέλου MPAR(1).

Λειτουργία του προγράμματος

Αρχικά, εισάγουμε στο αρχείο HISTORIC.TXT τις ιστορικές χρονοσειρές των μηνιαίων τιμών των υδρολογικών μεταβλητών που θέλουμε να αναπαράγουμε συνθετικά. Οι στήλες αντιπροσωπεύουν τους μήνες και οι γραμμές τα έτη. Οι ιστορικές χρονοσειρές των υδρολογικών μεταβλητών πρέπει να έχουν των ίδιο αριθμό ετών. Μετά το πέρας κάθε ιστορικής χρονοσειράς τοποθετείται μία γραμμή που πληρείται με αστερίσκους (*****).

Στην συνέχεια εκτελούμε το πρόγραμμα. Το πρόγραμμα μας ρωτάει για το πλήθος των μεταβλητών που έχουμε εισάγει, για τον αριθμό των ετών του ιστορικού

δείγματος και για τον επιθυμητό αριθμό ετών των συνθετικών χρονοσειρών των υδρολογικών μεταβλητών που θέλουμε να αναπαράγουμε συνθετικά.

Το πρόγραμμα παράγει δύο αρχεία, το αρχείο SYNTHETIC1.TXT και το αρχείο SYNTHETIC2.TXT. Στο αρχείο SYNTHETIC1.TXT περιέχονται οι συνθετικές χρονοσειρές υπό την μορφή στηλών, ενώ στο αρχείο SYNTHETIC2.TXT περιέχονται οι συνθετικές χρονοσειρές υπό την μορφή πινάκων, των οποίων οι γραμμές αντιπροσωπεύουν τα έτη και οι στήλες τους μήνες.

Κυρίως πρόγραμμα

```
!*****
!  
!                                     MPAR(1)  
!*****
!HISTORIC.TXT MUST CONTAIN THE HISTORIC SERIES OF ALL THE VARIABLES.  
!THE COLUMNS REPRESENT MONTHS AND THE SERIES REPRESENT THE YEARS  
!THE SERIES OF THE VARIABLES MUST BE SEPARATED BY ONE LINE FULL  
!OF(*****)  
  
PROGRAM MAIN  
USE MSIMSL  
INTEGER*4 N,M,N1  
  
OPEN(10,FILE='HISTORIC.TXT')  
OPEN(20,FILE='SYNTHETIC1.TXT')  
OPEN(30,FILE='SYNTHETIC2.TXT')  
  
WRITE(*,*)'GIVE NUMBER OF VARIABLES (PLACES)'  
READ(*,*)M  
WRITE(*,*)'GIVE NUMBER OF YEARS OF THE HISTORIC SAMPLE'  
WRITE(*,*)'(MUST BE THE SAME FOR ALL VARIABLES)'  
READ(*,*)N  
WRITE(*,*)'GIVE NUMBER OF SYNTHETIC YEARS TO BE GENERATED'  
READ(*,*)N1  
  
CALL SUBGEN(N,M,N1)  
  
CLOSE(10)  
CLOSE(20)  
CLOSE(30)  
  
STOP  
END
```

Κύρια υπορουτίνα καλέσματος όλων των υπολοίπων υπορουτινών

```
SUBROUTINE SUBGEN(N,M,N1)  
INTEGER*4 N,M,N1  
  
REAL*8 HIST(N,12*M)  
  
REAL*8 ASTOT(M,12*M),BSTOT(M,12*M),M3VSTOT(M,12)  
REAL*8 EXM(M,12),SYNTHETIC(N1,M*12)
```

```

! READING HISTORIC SAMPLE
CALL READING(HIST,N,M)

! FORMATING MATRIXES ASTOT,BSTOT,EVSTOT,M3VSTOT
CALL ASBSMATR(N,M,ASTOT,BSTOT,HIST,M3VSTOT)

! FORMATING MATRIXES OF MONTHLY AVERAGES
CALL EX(N,M,HIST,EXM)

! CONSTRUCTING SYNTHETIC SERIES
CALL SYN(M,N1,ASTOT,BSTOT,M3VSTOT,EXM,SYNTHETIC)

!PRINTING TO FILE
CALL PRIN(N1,M,SYNTHETIC)

RETURN
END

```

Υπορουτίνα ανάγνωσης ιστορικών χρονοσειρών

```

SUBROUTINE READING(HIST,N,M)
INTEGER*4 N,M
REAL*8 HIST(N,12*M)

INTEGER*4 K,I,J

DO 10 K=0,M-1,1
  DO 20 I=1,N,1
    READ(10,*)(HIST(I,J),J=K*12+1,(K+1)*12,1)
    20 CONTINUE
  READ(10,*)
  10 CONTINUE

RETURN
END

```

Υπορουτίνα κατασκευής πινάκων a_s , b_s και v_s

```

SUBROUTINE ASBSMATR(N,M,ASTOT,BSTOT,HIST,M3VSTOT)
INTEGER*4 N,M
REAL*8 ASTOT(M,12*M),HIST(N,12*M),BSTOT(M,12*M),M3VSTOT(M,12)

INTEGER*4 S,I,J
REAL*8 CXSXS(M,M),CXXS1(M,M),CXS1XS1(M,M)
REAL*8 INV(M,M),AS(M,M),BS(M,M),C(M,M),AST(M,M),MUL(M,M),MUL1(M,M)
REAL*8 M3VS(M)

DO 10 S=1,12,1

!CONSTRUCTING AS

  ! FORMATING MATRIX COV[X{S},X{S-1}]
  CALL XSXS1(S,HIST,CXSXS1,N,M)

  ! FORMATING MATRIX COV[X{S-1},X{S-1}]
  CALL XS1XS1(S,HIST,CXS1XS1,N,M)

  !INVERTING MATRIX COV[X{S-1},X{S-1}]

```

```

CALL DLINRG (M, CXS1XS1, M, INV, M)

!CONSTRUCTING AS
CALL MULTAB (M, M, CXSXS1, M, M, INV, AS)

! CONSTRUCTING BS

! CALCULATING THE TRANSPOSE OF AS
CALL TRAN (M, M, AS, AST)

!CALCULATING [CXS1XS1] * [AST]=[MUL]
CALL MULTAB (M, M, CXS1XS1, M, M, AST, MUL)

!CALCULATING [AS] * [MUL]=[MUL1]
CALL MULTAB (M, M, AS, M, M, MUL, MUL1)

!CALCULATING MATRIX COV[XS, XS]
CALL XSXS (S, HIST, CXSXS, N, M)

!CALCULATING MATRIX C
DO 20 I=1, M, 1
    DO 30 J=1, M, 1
        C (I, J) =CXXS (I, J) -MUL1 (I, J)
    30 CONTINUE
20 CONTINUE

! CALCULATING BS
CALL CHOL (M, C, BS)

! CALCULATING SKEW OF THE NOISE
CALL M3V (S, HIST, M3VS, N, M, AS, BS)

!FORMATING ASTOT, BSTOT, M3VSTOT
DO 40 I=1, M, 1
    DO 50 J=1, M, 1
        ASTOT (I, (S-1) *M+J) =AS (I, J)
        BSTOT (I, (S-1) *M+J) =BS (I, J)
    50 CONTINUE

M3VSTOT (I, S) =M3VS (I)

40 CONTINUE

10 CONTINUE

RETURN
END

```

Υπορουτίνα υπολογισμού μέσω των τιμών μηνών

```

SUBROUTINE EX (N, M, HIST, EXM)
INTEGER*4 N, M
REAL*8 HIST (N, 12 *M), EXM (M, 12)

INTEGER*4 I, J, K
REAL*8 X (N), XM

DO 10 K=0, M-1, 1
    DO 20 J=1, 12, 1
        DO 30 I=1, N, 1

```

```

                X(I)=HIST(I,K*12+J)
30 CONTINUE

                CALL AVER(N,X,XM)
                EXM(K+1,J)=XM

                20 CONTINUE
10 CONTINUE

RETURN
END

```

Υπορουτίνα παραγωγής του συνθετικού δείγματος

```

SUBROUTINE SYN(M,N1,ASTOT,BSTOT,M3VSTOT,EXM,SYNTHETIC)
INTEGER*4 M,N1
REAL*8 ASTOT(M,12*M),BSTOT(M,12*M),M3VSTOT(M,12)
REAL*8 EXM(M,12),SYNTHETIC(N1,M*12)

INTEGER*4 K,S,I,J
REAL*8 XS(M),XS1(M),VS(M),AS(M,M),BS(M,M),BSVS(M),ASXS1(M)
REAL*8 D
DATA D/0./

DO 10 I=1,M,1
    XS1(I)=0.
    XS(I)=0.
10 CONTINUE

!CALCULATING SYNTHETIC SERIES
DO 20 K=1,N1,1
    DO 30 S=1,12,1

        !SELECTING MATRIXES AS,BS,VS
        DO 40 I=1,M,1
            CALL GAMA(M3VSTOT(I,S),VS(I))
            DO 50 J=1,M,1
                AS(I,J)=ASTOT(I,(S-1)*M+J)
                BS(I,J)=BSTOT(I,(S-1)*M+J)
            50 CONTINUE
        40 CONTINUE

        ! CALCULATING VECTOR [BSVS]=[BS]*[VS]
        CALL MULTAX(M,M,BS,VS,BSVS)

        ! CALCULATING VECTOR [ASXS1]=[AS]*[XS1]
        CALL MULTAX(M,M,AS,XS1,ASXS1)

        ! CALCULATING VECTOR XS
        DO 60 I=1,M,1
            XS(I)=ASXS1(I)+BSVS(I)
        60 CONTINUE

        ! CALCULATING MATRIX SYNTHETIC
        DO 70 I=0,M-1,1
            D=D
        !SYNTHETIC(K,I*12+S)=D*MAX1(D,XS(I+1)+EXM(I+1,S))
            SYNTHETIC(K,I*12+S)=XS(I+1)+EXM(I+1,S)
        70 CONTINUE

        DO 80 I=1,M,1

```

```

                XS1(I)=XS(I)
            80 CONTINUE

        30 CONTINUE
    20 CONTINUE

RETURN
END

```

Υπορουτίνα εκτύπωσης αποτελεσμάτων

```

SUBROUTINE PRIN(N1,M,SYNTHETIC)
INTEGER*4 N1,M
REAL*8 SYNTHETIC(N1,12*M)

INTEGER*4 K,I,J

DO 20 I=1,N1,1
    DO 30 J=1,12,1
        WRITE(20,1000)(SYNTHETIC(I,K*12+J),K=0,M-1)
    30 CONTINUE
20 CONTINUE

DO 40 I=1,N1,1
    WRITE(30,2000)(SYNTHETIC(I,J),J=1,12*M,1)
40 CONTINUE

1000 FORMAT(10(1X,F9.4))
2000 FORMAT(120(1X,F9.4))

RETURN
END

```

Υπορουτίνα υπολογισμού πίνακα συνδιασπορών του μήνα αναφοράς με τον προηγούμενο του

```

SUBROUTINE XSXS1(S,HIST,CXSXS1,N,M)
INTEGER*4 N,M,S
REAL*8 HIST(N,12*M),CXXS1(M,M)

INTEGER*4 I,J,K
REAL*8 XI1(N-1),XJ1(N-1),XIS(N),XJS(N)

SELECT CASE(S)
CASE(1:1)
DO 10 I=0,M-1,1
    DO 20 J=1,M,1
        DO 30 K=2,N,1
            XI1(K-1)=HIST(K,12*I+1)
            XJ1(K-1)=HIST(K-1,12*J)
        30 CONTINUE

        CALL COVXY(N-1,XI1,XJ1,CXSXS1(I+1,J))

    20 CONTINUE
10 CONTINUE

CASE(2:12)
DO 40 I=0,M-1,1

```

```

DO 50 J=0,M-1,1
  DO 60 K=1,N,1
    XIS(K)=HIST(K,12*I+S)
    XJS(K)=HIST(K,12*J+S-1)
  60 CONTINUE

  CALL COVXY(N,XIS,XJS,CXSXS1(I+1,J+1))

50 CONTINUE
40 CONTINUE
ENDSELECT

RETURN
END

```

Υπορουτίνα υπολογισμού πίνακα συνδιασπορών του προηγούμενου μήνα από τον μήνα αναφοράς

```

SUBROUTINE XS1XS1(S,HIST,CXS1XS1,N,M)
INTEGER*4 N,M,S
REAL*8 HIST(N,12*M),CXS1XS1(M,M)

INTEGER*4 I,J,K,S1
REAL*8 XIS(N),XJS(N)

S1=S-1
IF(S1.EQ.0) THEN
  S1=12
ENDIF

DO 10 I=0,M-1,1
  DO 20 J=0,M-1,1
    DO 30 K=1,N,1
      XIS(K)=HIST(K,12*I+S1)
      XJS(K)=HIST(K,12*J+S1)
    30 CONTINUE

    CALL COVXY(N,XIS,XJS,CXS1XS1(I+1,J+1))

20 CONTINUE
10 CONTINUE

RETURN
END

```

Υπορουτίνα υπολογισμού πίνακα συνδιασπορών του μήνα αναφοράς

```

SUBROUTINE XSXS(S,HIST,CXS1XS1,N,M)
INTEGER*4 N,M,S
REAL*8 HIST(N,12*M),CXS1XS1(M,M)

INTEGER*4 I,J,K
REAL*8 XIS(N),XJS(N)

DO 10 I=0,M-1,1
  DO 20 J=0,M-1,1
    DO 30 K=1,N,1
      XIS(K)=HIST(K,12*I+S)

```

```

                XJS (K) =HIST (K, 12*J+S)
30 CONTINUE

                CALL COVXY (N, XIS, XJS, CXS1XS1 (I+1, J+1))

                20 CONTINUE
10 CONTINUE

RETURN
END

```

Υπορουτίνα υπολογισμού της ασυμμετρίας των διανυσμάτων του λευκού θορύβου

```

SUBROUTINE M3V (S, HIST, M3VS, N, M, AS, BS)
INTEGER*4 S, N, M
REAL*8     HIST (N, 12*M), AS (M, M), BS (M, M), M3VS (M)

INTEGER*4 S1, I, J
REAL*8   XS (M, N), XS1 (M, N), ASXS (M, N)
REAL*8   M3XS (M), M3ASXS (M), SBS (M)
REAL*8   INV (M, M), BS3 (M, M)

S1=S-1
  IF (S1.EQ.0) THEN
    S1=12
  ENDIF

! FORMATING XS
DO 10 I=0, M-1, 1
  DO 20 J=1, N, 1
    XS (I+1, J) =HIST (J, I*12+S)
  20 CONTINUE
10 CONTINUE

! FORMATING X(S-1)
DO 30 I=0, M-1, 1
  DO 40 J=1, N, 1
    XS1 (I+1, J) =HIST (J, I*12+S1)
  40 CONTINUE
30 CONTINUE

! CALCULATING [AS]*X(S-1)=[ASXS]
CALL MULTAB (M, M, AS, M, N, XS1, ASXS)

!CALCULATING M3XS
CALL SKEWA (M, N, XS, M3XS)

!CALCULATING M3ASXS
CALL SKEWA (M, N, ASXS, M3ASXS)

!CALCULATING M3XS-M3ASXS=SBS
DO 50 I=1, M, 1
  SBS (I) =M3XS (I) -M3ASXS (I)
50 CONTINUE

! CALCULATING BS3
DO 60 I=1, M, 1
  DO 70 J=1, M, 1
    BS3 (I, J) =BS (I, J) **3.
  70 CONTINUE

```



```

        60 CONTINUE

! CALCULATING INVERSE OF BS3
  CALL DLINRG (M, BS3, M, INV, M)

! CALCULATING M3VS
  CALL MULTAX (M, M, INV, SBS, M3VS)

RETURN
END

```

Υπορουτίνα υπολογισμού ασυμμετρίας διανύσματος

```

SUBROUTINE SKEWA (N, M, A, SKA)
INTEGER*4 N, M
REAL*8 A (N, M) , SKA (N)

INTEGER*4 I, J
REAL*8 X (M) , SK

DO 10 I=1, N, 1
  DO 20 J=1, M, 1
    X (J) =A (I, J)
  20 CONTINUE

  CALL SKEW (M, X, SK)

  SKA (I) =SK

10 CONTINUE

RETURN
END

```

Υπορουτίνα υπολογισμού μέσης τιμής μίας σειράς τιμών

```

SUBROUTINE AVER (N, X, AV)
INTEGER*4 N
REAL*8 X (N) , AV

REAL*8 SUM
INTEGER*4 I

SUM=0.
DO 10 I=1, N, 1
  SUM=SUM+X (I)
10 CONTINUE
AV=SUM/N

RETURN
END

```

Υπορουτίνα υπολογισμού συνδιασποράς δύο σειρών τιμών

```

SUBROUTINE COVXY (N, X, Y, CV)
INTEGER*4 N
REAL*8 X (N) , Y (N) , CV

REAL*8 XM, YM, SUM

```

```

INTEGER*4 I

CALL AVER (N, X, XM)
CALL AVER (N, Y, YM)

SUM=0.
  DO 10 I=1, N, 1
    SUM=SUM+ (X (I) -XM) * (Y (I) -YM)
  10 CONTINUE
CV=SUM/N

RETURN
END

```

Υπορουτίνα υπολογισμού ασυμμετρίας μίας σειράς τιμών

```

SUBROUTINE SKEW (N, X, SK)
INTEGER*4 N
REAL*8 X (N) , SK

REAL*8 SUM, XM
INTEGER*4 I

CALL AVER (N, X, XM)

SUM=0.
DO 10 I=1, N, 1
  SUM=SUM+ (X (I) -XM) **3.
10 CONTINUE
SK=SUM/N

RETURN
END

```

Υπορουτίνα υπολογισμού γινομένου δύο πινάκων

```

SUBROUTINE MULTAB (NA, MA, A, NB, MB, B, C)
INTEGER*4 NA, NB, MA, MB
REAL*8 A (NA, MA) , B (NB, MB) , C (NA, MB)

INTEGER*4 I, J, K
REAL*8 SUM

IF (MA.NE.NB) THEN
WRITE (*, *) 'CANNOT MULTIPLY MATRIXES '
STOP
ENDIF

DO 10 I=1, NA, 1
  DO 20 J=1, MB, 1
    SUM=0.
    DO 30 K=1, NB, 1
      SUM=SUM+A (I, K) *B (K, J)
    30 CONTINUE
    C (I, J) =SUM
  20 CONTINUE
10 CONTINUE

RETURN
END

```

Υπορουτίνα υπολογισμού του γινομένου πίνακα με διάνυσμα

```
SUBROUTINE MULTAX (NA, MA, A, X, Y)
INTEGER*4 NA, MA
REAL*8 A (NA, MA), X (MA), Y (NA)

INTEGER*4 I, K
REAL*8 SUM

DO 10 I=1, NA, 1
    SUM=0.
        DO 20 K=1, MA, 1
            SUM=SUM+A (I, K) *X (K)
        20 CONTINUE
    Y (I)=SUM
10 CONTINUE

RETURN
END
```

Υπορουτίνα υπολογισμού ανάστροφου πίνακα

```
SUBROUTINE TRAN (NA, MA, A, AT)
INTEGER*4 NA, MA
REAL*8 A (NA, MA), AT (MA, NA)

DO 10 I=1, NA, 1
    DO 20 J=1, MA, 1
        AT (J, I)=A (I, J)
    20 CONTINUE
10 CONTINUE

RETURN
END
```

Υπορουτίνα που πραγματοποιεί αποσύνθεση Cholesky

```
SUBROUTINE CHOL (N, C, B)
INTEGER*4 N
REAL*8 C (N, N), B (N, N)

INTEGER*4 I, J, K
REAL*8 SUM

! ZEROING THE MATRIX B
DO 10 I=1, N, 1
    DO 20 J=1, N, 1
        B (I, J)=0.
    20 CONTINUE
10 CONTINUE

! CHECKING IF THE MATRIX IS POSITIVE DEFINED
IF (C (1, 1) .LE. 0.) THEN
    WRITE (*, *) 'C MATRIX IS NOT POSITIVE DEFINED'
    STOP
ENDIF

! CONSTRUCTION OF THE ELEMENT B (1, 1)
B (1, 1)=SQRT (C (1, 1))

! CONSTRUCTING ELEMENTS
```

```

DO 30 I=2,N,1

!CONSTRUCTING ELEMENTS B(I,J)
  DO 40 J=1,I-1,1
    SUM=0.
    DO 50 K=1,J-1,1
      SUM=SUM+B(J,K)*B(I,K)
    50 CONTINUE
    B(I,J)=(C(I,J)-SUM)/B(J,J)
  40 CONTINUE

!CONSTRUCTING ELEMENTS B(I,I)
  SUM=0.
  DO 60 K=1,I-1,1
    SUM=SUM+B(I,K)**2.
  60 CONTINUE
  B(I,I)=C(I,I)-SUM
  ! CHECKING IF THE MATRIX IS POSITIVE DEFINED
  IF(B(I,I).LE.0.)THEN
    WRITE(*,*)'C MATRIX IS NOT POSITIVE DEFINED'
    STOP
  ENDIF
  B(I,I)=SQRT(B(I,I))
30 CONTINUE

RETURN
END

```

Υπορουτίνα υπολογισμού τυχαίων αριθμών που ακολουθούν κατανομή Γάμα με μηδενική μέση τιμή, μοναδιαία τυπική απόκλιση και δεδομένο συντελεστή ασυμμετρίας

```

SUBROUTINE GAMA(M3,G)
REAL*8 M3,G

REAL*8 L,K,C,R(1)

L=2./M3
K=L**2.
C=-L

CALL DRNGAM(1,K,R)
G=R(1)
G=G/L+C

RETURN
END

```

Στην συνέχεια παρουσιάζεται το αρχείο δεδομένων HISTORIC.TXT που περιέχει τις ιστορικές χρονοσειρές όπως αυτές χρησιμοποιήθηκαν από το πρόγραμμα. Επισημαίνεται ότι από τις ιστορικές χρονοσειρές των μηνιαίων τιμών των δύο υδρολογικών μεταβλητών χρησιμοποιήθηκαν μόνο οι τιμές της κοινής περιόδου του ιστορικού δείγματος δηλαδή οι μηνιαίες τιμές των ετών 1907-1908 ως και 1997-1998.

Αρχείο δεδομένων

14.8	15.6	16.9	20.4	16.6	17.3	12.3	5.4	2.9	1.3	2.1	4.4
14.1	13.0	44.1	58.3	37.1	30.9	33.6	14.0	12.0	2.6	1.4	6.1
7.6	10.0	13.2	19.5	53.5	38.7	34.5	19.4	16.1	0.6	2.5	7.0
10.6	13.0	16.2	19.4	13.9	20.8	19.9	11.5	9.0	2.9	4.0	10.2
9.3	28.0	21.7	36.5	34.7	25.3	19.6	16.6	7.7	5.5	2.6	6.6
9.2	33.6	49.9	21.8	45.5	80.5	38.5	17.1	13.9	3.4	3.9	6.9
24.7	14.0	18.6	43.4	22.3	23.1	13.6	4.9	5.2	3.6	3.3	9.1
9.8	31.3	28.0	47.3	40.3	39.3	32.2	18.2	7.1	3.6	2.3	10.1
14.9	12.4	12.9	13.1	18.5	15.9	4.6	8.2	1.8	0.6	0.8	3.3
6.7	7.8	8.9	10.5	15.1	12.3	1.4	0.6	0.5	0.4	0.4	1.2
5.7	8.3	10.6	13.0	19.5	28.7	21.5	4.9	2.9	1.3	2.1	4.5
9.3	26.8	37.5	53.0	62.1	50.4	33.0	26.3	16.6	3.2	1.4	11.7
12.1	16.7	21.7	20.2	19.8	38.7	19.2	12.9	12.3	0.2	1.3	6.0
23.9	55.2	65.1	56.1	50.2	38.8	27.3	19.7	13.4	3.8	2.8	10.6
22.0	37.0	81.5	81.2	56.7	40.4	23.7	14.7	8.6	1.3	0.7	5.9
10.0	23.6	22.2	49.9	34.8	37.8	30.6	32.7	22.6	7.3	2.9	8.5
10.6	12.2	17.1	34.1	44.0	33.7	20.3	8.4	6.6	0.3	0.0	5.6
8.6	39.5	31.1	22.9	31.5	46.2	34.1	22.9	14.1	4.9	0.0	4.0
10.4	10.7	16.1	27.4	24.0	35.1	14.9	1.5	3.1	0.0	0.0	2.3
7.1	6.7	10.6	24.9	25.5	29.0	19.8	5.7	0.0	0.0	0.0	2.3
19.8	16.4	29.9	56.7	63.5	74.7	57.7	22.2	11.2	1.2	0.0	3.5
17.9	26.7	40.8	36.8	50.2	49.6	31.9	13.7	10.4	1.3	0.0	13.9
13.9	28.1	21.2	24.0	52.0	54.0	34.6	19.9	11.0	10.2	0.0	5.8
11.5	12.2	20.0	39.7	59.4	42.1	61.5	24.3	17.5	0.1	0.0	8.5
11.5	10.7	32.9	31.7	29.3	70.5	40.1	13.2	3.8	0.6	0.5	8.9
11.2	17.8	14.2	24.6	36.3	21.6	19.2	11.3	11.6	1.9	3.6	8.9
7.9	7.7	25.6	37.5	55.4	56.1	28.5	9.5	13.0	3.4	0.8	4.8
8.4	11.1	22.6	44.0	38.8	32.7	19.3	9.2	6.3	0.6	0.0	2.0
5.9	11.6	34.2	26.3	30.9	13.7	8.7	19.3	7.2	5.2	0.1	4.0
9.5	15.7	30.8	19.8	34.4	18.9	16.5	9.8	4.4	0.9	0.0	6.0
19.3	18.7	40.4	46.8	78.2	46.7	85.3	38.9	12.7	3.6	1.6	12.6
15.6	13.8	40.6	42.3	26.2	86.3	46.0	17.2	22.0	8.2	0.0	9.7
12.1	11.9	20.2	56.4	35.8	31.9	24.3	26.1	14.5	3.6	6.1	9.9
10.3	9.4	33.7	41.8	39.0	27.4	14.9	34.0	29.4	24.8	15.1	9.5
16.5	18.8	18.9	35.5	67.7	58.2	34.8	13.0	10.8	6.7	4.3	10.5
14.5	20.9	15.2	15.8	14.1	18.8	13.2	15.8	4.5	3.8	3.8	11.3
10.8	16.8	14.2	25.0	34.1	31.2	25.6	13.7	6.5	3.8	6.9	10.2
10.7	11.3	20.7	38.9	27.5	31.7	25.1	10.8	3.4	1.3	1.3	11.4
11.4	21.9	35.4	64.2	31.4	34.7	28.7	17.7	2.3	2.2	1.9	9.0
12.8	14.7	48.8	70.9	66.5	34.2	17.0	13.0	11.6	3.6	4.6	12.3
13.7	20.6	27.5	18.6	18.8	22.9	23.2	17.1	7.1	4.7	4.6	9.3
10.8	11.7	18.7	24.6	30.6	32.8	24.3	12.8	11.4	0.0	7.2	11.6
14.5	21.5	16.3	21.7	20.6	38.1	27.5	17.0	5.1	5.1	6.8	11.0
11.7	12.1	16.5	26.8	23.4	24.9	16.2	6.6	6.7	7.0	3.4	6.8
21.6	32.1	21.5	39.4	39.4	23.7	13.4	9.7	5.9	2.9	0.0	6.3
7.5	7.7	17.4	28.7	18.3	18.5	14.5	8.9	7.8	0.0	0.0	6.7
11.2	29.3	15.6	31.2	44.4	36.9	26.6	13.9	5.5	3.8	5.0	7.7
9.8	13.1	32.9	28.9	13.6	20.0	27.6	14.0	4.1	0.0	6.1	9.6
19.1	21.5	16.9	24.2	82.2	65.5	33.0	13.5	8.3	0.0	0.0	9.6
9.8	9.7	11.9	16.2	12.8	16.4	6.6	6.2	6.2	19.4	0.0	7.6
24.2	42.0	31.8	35.9	19.2	28.5	22.0	11.3	8.1	0.0	9.7	28.0
12.7	21.5	24.4	25.8	19.8	30.5	22.4	16.8	8.0	0.0	7.9	10.4
12.3	17.2	17.8	33.3	28.3	33.8	22.5	13.9	4.6	0.0	1.1	11.3
11.5	11.3	18.5	19.3	20.0	48.6	18.1	9.9	1.0	0.0	0.0	3.6
10.7	10.8	16.3	12.5	18.8	22.5	7.1	0.0	0.0	0.0	0.0	4.2
13.3	24.7	91.1	49.0	66.9	45.3	27.9	21.3	6.9	0.0	0.0	6.9
21.7	17.2	24.6	34.0	33.4	41.1	22.7	8.3	0.0	0.0	0.0	9.5
10.6	8.7	13.3	28.5	36.8	40.1	25.7	15.2	8.3	2.8	2.0	5.7
9.2	9.4	9.0	23.4	11.5	37.7	23.7	12.7	7.2	2.2	1.8	6.8
9.0	16.5	23.4	21.3	20.4	30.0	21.5	9.8	4.7	1.4	2.3	7.6
14.9	17.7	28.2	31.1	32.5	34.2	19.5	9.6	5.2	1.5	1.5	7.6
19.6	23.5	104.9	75.3	37.6	46.4	30.4	13.1	0.0	0.0	5.1	13.9
16.3	15.4	26.4	28.0	20.0	31.7	10.7	12.9	0.0	0.0	0.0	9.2
12.7	13.0	13.2	24.0	24.1	46.7	30.7	11.6	0.0	0.0	0.0	11.5
13.8	19.6	18.6	48.9	43.2	42.1	34.5	27.0	0.0	0.0	4.1	11.3
16.4	25.4	14.4	32.8	31.3	35.4	25.7	0.0	6.8	0.0	0.0	0.0
0.0	14.8	22.4	25.6	34.9	53.8	29.3	12.8	0.0	0.0	0.0	11.8
19.9	18.2	18.9	20.6	25.9	27.6	5.3	0.0	0.0	0.0	0.0	6.5
13.7	15.0	29.7	25.7	45.5	33.0	28.6	7.3	0.0	0.0	0.0	3.4
9.6	12.1	12.3	10.3	1.8	8.4	8.1	2.8	2.5	0.5	1.1	5.8
2.4	3.8	14.4	34.1	38.5	23.9	15.7	4.9	0.1	0.0	0.0	3.0
7.7	9.3	22.2	19.6	18.4	13.9	6.8	3.8	0.4	0.0	0.0	3.9
14.5	23.3	19.6	32.4	26.1	47.9	25.8	17.4	4.8	0.0	0.0	5.1
21.5	16.0	28.2	58.7	51.4	31.8	25.6	8.1	1.8	0.7	2.0	8.9
9.7	11.1	15.8	13.5	28.0	48.7	45.1	28.1	11.5	2.1	3.2	6.5
7.5	11.5	17.0	14.2	14.2	21.7	5.8	2.5	4.1	0.2	0.0	0.0

3.8	6.5	27.0	22.4	34.8	39.3	40.9	18.3	2.2	1.9	1.8	6.1
6.0	10.1	13.9	52.8	22.9	33.5	26.2	9.0	3.6	0.0	0.3	3.2
9.2	13.6	15.9	14.1	20.6	21.5	9.7	5.2	1.1	0.0	0.0	1.0
9.2	11.1	10.2	22.3	20.4	40.8	37.5	19.3	3.7	0.0	0.0	2.0
6.5	9.6	9.9	11.6	21.4	34.1	15.2	5.1	0.5	0.0	0.0	0.4
3.7	9.4	22.4	13.7	9.1	26.7	11.6	1.8	0.0	0.0	0.0	0.0
4.3	5.4	6.7	7.6	4.7	1.2	0.0	0.0	0.0	0.0	1.4	2.7
3.6	5.5	19.2	21.3	19.4	28.0	24.5	12.4	1.6	0.0	0.0	3.0
5.6	7.9	10.2	10.6	11.8	13.8	6.9	2.1	0.4	0.0	0.0	1.7
4.0	5.2	6.2	7.8	8.6	9.4	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.8	3.6	5.3	13.2	38.1	22.1	12.7	4.1	0.0	0.0	0.0	0.0
10.2	10.7	13.6	30.4	19.2	25.1	18.9	2.8	0.0	0.0	0.0	1.1
5.6	7.7	15.9	23.8	38.8	35.9	22.8	5.4	5.6	0.1	0.0	2.6
6.0	7.6	9.4	41.0	13.6	23.5	18.7	10.3	0.4	0.0	0.0	0.9
4.8	10.6	19.4	11.8	14.7	20.7	20.2	13.9	2.0	0.7	0.0	0.0

0.0	115.2	66.3	58.8	37.9	38.0	6.3	23.6	0.0	15.0	5.1	118.0
60.5	79.7	227.5	80.6	58.5	27.4	38.9	84.7	10.7	0.0	5.5	72.6
46.4	56.1	61.4	130.0	145.8	92.8	40.2	88.1	37.1	1.5	20.8	55.4
22.6	76.7	95.1	58.3	48.8	51.7	87.6	70.4	74.4	20.9	23.4	105.6
4.1	138.2	98.1	59.1	97.5	40.2	33.0	33.3	61.2	17.5	0.0	2.5
30.4	209.1	121.3	43.1	198.2	55.9	7.4	20.0	15.9	0.0	7.8	24.1
94.3	48.0	133.6	179.8	32.7	22.3	15.0	23.4	23.6	16.0	51.5	1.8
23.4	235.7	104.1	60.4	129.4	18.3	106.1	12.6	24.9	10.2	9.5	51.7
46.5	34.1	44.5	79.8	95.3	22.1	43.9	56.7	0.0	0.0	51.1	35.1
15.0	28.4	59.8	64.8	75.8	24.6	50.2	25.6	16.5	0.0	0.0	8.4
101.0	100.3	103.0	17.0	123.1	195.6	4.5	24.6	18.3	0.0	17.5	0.0
269.9	233.8	117.3	179.3	128.4	104.9	6.6	90.6	18.2	0.0	0.8	42.9
110.4	67.1	103.3	93.1	109.2	47.7	16.8	66.2	23.3	10.9	8.9	0.0
216.6	160.2	172.0	74.4	113.2	17.3	79.2	20.6	54.5	0.8	0.0	142.4
65.2	177.2	211.6	114.9	53.1	17.8	8.9	26.4	0.0	0.0	2.0	0.0
77.7	139.4	97.4	154.0	70.0	61.3	56.9	77.5	167.8	10.2	0.0	1.0
20.0	39.2	142.7	158.0	79.8	71.7	0.0	29.2	17.6	0.0	7.6	91.0
103.3	104.0	40.3	30.5	90.6	176.9	43.2	80.8	29.2	46.9	0.0	0.0
45.5	112.0	31.9	130.4	67.4	39.3	11.4	27.9	6.6	2.3	6.1	3.8
1.3	46.7	221.5	70.2	81.3	51.6	61.9	19.8	0.0	0.0	5.8	18.0
237.4	9.4	138.8	331.8	67.3	141.7	34.0	5.8	0.0	0.0	0.0	7.9
19.7	219.8	99.1	79.2	127.2	37.5	17.1	8.9	4.6	0.0	0.0	124.2
73.1	112.0	65.5	90.1	233.4	49.4	111.0	87.3	83.5	50.5	0.0	55.6
70.1	82.9	131.4	92.0	135.6	74.6	77.2	75.0	30.2	0.0	1.3	13.7
63.5	44.0	210.1	52.8	118.2	159.1	11.2	24.4	26.7	0.0	41.1	0.5
14.7	60.4	16.6	139.2	78.4	13.5	35.6	37.0	41.8	6.6	6.9	12.7
44.7	42.6	169.7	138.2	153.4	114.9	18.3	22.4	15.5	11.4	0.0	1.0
34.4	45.2	114.6	184.9	71.2	99.8	8.4	4.3	20.6	2.5	0.0	0.0
58.4	56.7	122.5	114.8	98.4	32.0	34.5	69.6	74.8	11.7	1.3	2.0
47.3	138.6	180.8	51.2	95.9	9.4	46.2	49.0	43.4	13.4	2.5	22.6
152.2	125.5	152.0	76.0	120.3	53.3	165.6	3.6	0.0	0.0	5.6	36.1
63.5	30.5	229.1	102.7	52.6	186.3	57.6	8.9	73.6	0.0	20.1	56.6
24.6	54.2	135.4	139.0	74.6	68.9	53.3	159.1	23.6	6.4	11.3	1.0
52.6	41.8	172.9	98.5	95.6	32.0	32.3	21.1	5.9	1.5	0.0	13.0
107.4	105.3	57.8	139.6	126.9	102.6	38.5	2.3	15.2	15.5	4.8	0.0
91.9	111.9	23.3	56.7	37.0	95.2	33.3	69.3	15.2	0.0	0.0	95.9
58.8	83.0	46.0	92.1	135.2	66.7	86.3	22.0	3.2	8.6	209.4	0.0
48.0	2.1	120.7	98.2	49.8	31.0	40.2	0.0	4.1	0.0	15.1	72.8
36.2	154.6	159.5	193.2	24.9	95.9	41.4	33.1	13.9	5.7	0.5	5.3
42.2	32.7	271.0	145.0	67.0	8.0	11.0	2.0	7.0	1.0	20.0	20.0
73.0	113.0	122.0	51.0	119.0	51.0	84.0	27.0	35.0	4.0	0.0	47.0
15.0	103.0	110.0	86.0	54.0	71.0	29.0	14.0	8.0	18.0	1.0	36.0
78.0	100.0	49.0	100.0	35.0	143.0	70.0	35.0	5.0	0.0	2.0	56.0
30.0	39.0	153.0	152.0	50.0	82.0	6.0	11.0	11.0	3.0	8.0	98.0
166.0	178.0	94.0	93.0	75.0	51.0	8.0	58.0	16.0	29.0	0.0	21.0
27.0	141.0	174.0	171.0	30.0	55.0	31.0	77.0	21.0	5.0	10.0	5.0
160.2	136.1	58.0	155.2	95.1	67.3	51.0	43.4	6.3	0.0	0.0	6.5
65.9	147.5	144.9	82.9	19.2	72.8	128.4	2.0	12.7	4.8	21.0	76.8
201.3	160.4	50.1	67.5	181.4	108.6	39.1	13.0	8.6	0.0	0.0	17.5
18.2	62.7	35.9	118.1	22.6	54.4	29.3	32.9	15.8	1.5	2.5	41.1
206.0	75.8	97.4	85.9	3.0	91.2	26.8	12.3	42.3	1.3	0.0	119.1
67.3	127.7	25.6	76.6	24.5	61.4	64.6	20.7	21.8	10.0	4.5	57.6
91.8	79.7	47.5	126.4	71.4	66.4	43.4	42.2	24.3	8.9	22.7	44.7
13.6	43.9	194.3	95.5	50.9	154.2	24.3	13.0	11.0	4.6	4.1	0.4
37.7	60.7	139.5	37.0	117.0	156.0	7.0	25.0	1.0	0.0	0.0	126.0
174.0	159.0	155.0	38.3	70.4	72.2	31.7	72.2	40.6	16.4	1.8	0.7
234.0	52.1	38.1	162.7	43.5	60.5	8.5	16.0	50.0	1.0	3.0	56.0
20.5	6.5	86.0	125.0	110.0	87.8	34.2	55.9	35.1	5.1	9.6	0.0
37.1	31.6	55.2	109.3	11.5	152.2	30.9	36.5	36.1	0.0	11.3	32.4
20.1	120.9	101.5	38.5	57.8	83.0	43.5	13.7	15.1	3.5	61.7	39.6
137.2	67.1	124.3	81.1	82.7	69.0	19.4	21.9	26.6	0.0	5.3	60.4
164.9	113.3	216.9	80.6	20.8	94.3	25.0	0.0	0.8	0.0	0.0	14.5
1.5	40.6	192.6	43.1	41.5	84.8	1.9	69.4	28.8	27.8	1.7	32.3

85.7	12.0	76.0	52.0	84.3	98.7	24.2	11.8	6.7	18.0	51.3	29.6
112.5	61.3	69.7	181.4	82.2	24.5	113.9	27.3	8.1	22.3	15.6	20.7
111.1	25.7	33.7	123.3	53.2	35.5	12.2	2.7	36.4	19.9	6.1	54.5
58.1	53.6	70.6	97.0	119.7	89.6	31.8	44.7	12.2	0.0	0.3	6.2
21.9	112.2	28.1	87.3	148.2	26.4	7.9	27.1	57.3	4.0	20.0	10.2
18.6	70.7	169.4	78.6	187.0	52.5	52.8	15.8	7.2	2.3	14.5	0.2
75.5	59.2	59.6	13.0	7.3	22.0	39.7	1.1	33.7	0.0	1.4	21.1
27.0	49.1	178.4	145.3	76.5	53.3	48.2	10.5	1.2	0.0	8.1	63.5
63.7	46.1	168.9	42.1	60.1	26.7	34.3	38.9	1.7	25.3	41.9	16.8
224.1	148.7	49.4	75.1	86.2	117.8	71.9	39.5	22.6	0.0	2.9	17.3
118.4	33.6	141.1	212.4	53.5	5.7	53.7	8.4	0.0	0.0	15.2	28.7
43.4	101.4	81.5	74.8	122.4	114.1	120.7	39.3	9.6	1.5	2.3	3.7
43.3	119.5	39.4	21.1	94.6	45.0	2.9	22.6	94.4	4.8	11.2	0.0
14.0	66.0	168.6	86.8	89.7	92.1	125.2	10.0	0.5	6.0	32.4	1.9
0.8	81.7	108.2	125.3	37.6	80.3	29.5	8.6	1.1	1.4	0.0	10.7
62.5	94.5	53.2	38.6	86.2	26.9	6.3	61.7	10.4	0.2	0.0	0.3
110.9	15.3	62.8	54.6	58.4	89.7	89.9	5.3	10.8	5.8	15.9	0.0
86.2	70.1	55.7	64.4	58.4	65.0	21.8	11.7	12.6	0.0	0.0	9.2
50.5	157.1	130.7	5.0	25.3	69.1	11.0	25.9	3.3	12.5	0.0	5.3
70.6	37.5	63.2	5.9	23.0	28.6	26.4	15.9	9.5	3.3	73.7	8.0
38.4	96.0	135.5	137.4	65.9	97.8	99.7	53.5	0.1	3.7	64.8	0.4
61.4	69.5	127.7	32.1	64.0	48.9	17.9	45.6	33.4	3.4	6.2	0.8
46.6	30.9	7.0	44.0	66.9	23.6	16.6	111.7	0.4	0.6	0.4	0.9
0.0	195.7	19.4	165.3	204.5	37.8	33.3	49.8	0.5	36.2	1.5	0.0
146.3	83.6	83.9	117.5	5.8	88.2	33.4	9.4	2.3	0.0	0.0	30.7
31.9	83.5	102.4	84.8	106.2	62.6	21.3	69.4	0.0	2.5	22.9	49.6
44.6	23.4	50.9	130.9	46.7	102.8	51.1	8.0	5.5	0.0	7.4	0.6
33.7	44.1	142.4	22.7	20.4	141.3	14.7	61.2	10.1	0.0	0.0	32.2

Παράρτημα Ε

Για την εφαρμογή και τον έλεγχο του μοντέλου MPARSMAF (Multivariate Periodic Autoregressive model with Symmetric Moving Average Filter) του κεφαλαίου 5, αναπτύχθηκε πρόγραμμα σε γλώσσα Fortran το οποίο παρουσιάζεται στην συνέχεια.

E.1 Πρόγραμμα για την εφαρμογή του μοντέλου MPARSMAF

Περιγραφή προγράμματος

Το πρόγραμμα που αναπτύχθηκε πραγματοποιεί:

- Ανάλυση ιστορικών χρονοσειρών μηνιαίων τιμών υδρολογικών μεταβλητών που διατηρούν μηδενικής και 1^{ης} τάξεως αυτοσυσχέτιση και ετεροσυσχέτιση.
- Παραγωγή μηνιαίων συνθετικών χρονοσειρών των υδρολογικών μεταβλητών που αναλύθηκαν οι οποίες θα διατηρούν την μέση τιμή, την τυπική απόκλιση και την ασυμμετρία των ιστορικών χρονοσειρών, με μέριμνα τα παραπάνω στατιστικά χαρακτηριστικά να είναι διαφορετικά σε κάθε μήνα του έτους. Επίσης λαμβάνεται μέριμνα για την διατήρηση στις μηνιαίες συνθετικές χρονοσειρές μηδενικής και 1^{ης} τάξεως αυτοσυσχέτισης και ετεροσυσχέτισης, ενώ ταυτόχρονα αναπαράγεται η μακροπρόθεσμη εμμονή των ετήσιων ιστορικών χρονοσειρών με χρήση φίλτρου SMA.

Για την παραγωγή των συνθετικών χρονοσειρών γίνεται χρήση πολυμεταβλητού κυκλοστάσιμου μοντέλου MPAR(1) σε συνδυασμό με φίλτρο SMA.

Λειτουργία του προγράμματος

Αρχικά, εισάγουμε στο αρχείο HISTORIC.TXT τις ιστορικές χρονοσειρές των μηνιαίων τιμών των υδρολογικών μεταβλητών που θέλουμε να αναπαράγουμε συνθετικά. Οι στήλες αντιπροσωπεύουν τους μήνες και οι γραμμές τα έτη. Οι ιστορικές χρονοσειρές των υδρολογικών μεταβλητών πρέπει να έχουν τον ίδιο αριθμό ετών. Μετά το πέρας κάθε ιστορικής χρονοσειράς τοποθετείται μία γραμμή που πληρείται με αστερίσκους (*****).

Στην συνέχεια εκτελούμε το πρόγραμμα. Το πρόγραμμα ρωτάει για το πλήθος των μεταβλητών που έχουμε εισάγει, για τον αριθμό των ετών του ιστορικού δείγματος και για τον επιθυμητό αριθμό ετών των συνθετικών χρονοσειρών των υδρολογικών μεταβλητών που θέλουμε να αναπαράγουμε συνθετικά. Ακολούθως το πρόγραμμα ζητάει από τον χρήστη να εισάγει: (1) τον αριθμό των χρονικών βημάτων μετατόπισης (lags) στα οποία θα περιοριστεί η συνθετική αναπαραγωγή του θεωρητικού αυτοσυσχετογράμματος FGN, (2) τον συντελεστή ακρίβειας επίτευξης της εν λόγω αναπαραγωγής, (3) τους συντελεστές Hurst των ιστορικών χρονοσειρών που εισήχθησαν στο αρχείο HISTORIC.TXT.

Το πρόγραμμα παράγει τρία αρχεία, το αρχείο SYNTHETIC1.TXT, το αρχείο SYNTHETIC2.TXT και το αρχείο YEAR.TXT. Στο αρχείο SYNTHETIC1.TXT περιέχονται οι μηνιαίες συνθετικές χρονοσειρές υπό την μορφή στηλών, στο αρχείο SYNTHETIC2.TXT περιέχονται οι μηνιαίες συνθετικές χρονοσειρές υπό την μορφή πινάκων των οποίων οι γραμμές αντιπροσωπεύουν τα έτη και οι στήλες τους μήνες και στο αρχείο YEAR.TXT περιέχονται οι ετήσιες συνθετικές χρονοσειρές υπό την μορφή στηλών.

Κυρίως πρόγραμμα

```
PROGRAM MAIN
USE MSIMSL
INTEGER*4 N,M,N1

OPEN(10,FILE='HISTORIC.TXT')
OPEN(20,FILE='SYNTHETIC1.TXT')
OPEN(30,FILE='SYNTHETIC2.TXT')
OPEN(40,FILE='YEAR.TXT')

WRITE(*,*)'GIVE NUMBER OF VARIABLES (PLACES) '
READ(*,*)M
WRITE(*,*)'GIVE NUMBER OF YEARS OF THE HISTORIC SAMPLE '
WRITE(*,*)'(MUST BE THE SAME FOR ALL THE VARIABLES) '
READ(*,*)N
WRITE(*,*)'GIVE NUMBER OF SYNTHETIC YEARS TO BE GENERATED '
READ(*,*)N1

CALL HDIALOG(N,M,N1)

CLOSE(10)
CLOSE(20)
CLOSE(30)
CLOSE(40)
STOP
END
```

Υπορουτίνα διαλόγου σχετικά με την διατήρηση της μακροπρόθεσμης εμμονής

```
SUBROUTINE HDIALOG(N,M,N1)
INTEGER*4 N,M,N1

REAL*8 T,B,H(M),Q
INTEGER*4 A

! HURST DIALOG
WRITE(*,*)'NUMBER OF AUTOCORRELATIONS TO BE PRESERVED'
READ(*,*)T
WRITE(*,*)'PRECISION COEFFICIENT'
READ(*,*)B

DO 10 I=1,M,1
    WRITE(*,*)'HURST COEFFICIENT FOR TIME SERIES',I
    READ(*,*)H(I)
10 CONTINUE

Q=0.
DO 20 I=1,M,1
    Q=MAX(Q,MAX(T,(2.*B/(H(I)**2.-0.25))**(1./(H(I)-1.5))))
20 CONTINUE

WRITE(*,*)'THE LEAST NUMBER OF PARAMETERS NEEDED IS'
WRITE(*,*)Q
WRITE(*,*)'INPUT YOUR PREFERABLE NUMBER OF PARAMETERS'
READ(*,*)A
A=2*A+1

CALL SUBGEN(N,M,A-1+N1,A,N1,H)

RETURN
END
```

Κύρια υπορουτίνα καλέσματος όλων των υπολοίπων υπορουτινών

```
SUBROUTINE SUBGEN(N,M,N1,MH,NH,H)
INTEGER*4 N,M,N1,MH,NH
REAL*8 H(M)

REAL*8 HIST(N,12*M)

REAL*8 ASTOT(M,12*M),BSTOT(M,12*M),M3VSTOT(M,12)
REAL*8 EXM(M,12),SYNTHETIC(N1,M*12),SDM(M,12),HPR(NH,12*M)

INTEGER*4 I,J,K

! READING HISTORIC SAMPLE
CALL READING(HIST,N,M)

! FORMATING MATRIXES OF MONTHLY AVERAGES
CALL EX(N,M,HIST,EXM)

!FORMATING MATRIXES OF MONTHLY VAR
CALL VAR(N,M,HIST,SDM)

DO 10 K=1,M,1
    DO 20 J=1,12,1
        DO 30 I=1,N,1
            HIST(I,(K-1)*12+J)=(HIST(I,(K-1)*12+J)-EXM(K,J))/SDM(K,J)**0.5
        30 CONTINUE
    20 CONTINUE
10 CONTINUE
```

```

      20 CONTINUE
10 CONTINUE

!FORMATING MATRIXES ASTOT,BSTOT,EVSTOT,M3VSTOT
CALL ASBSMATR(N,M,ASTOT,BSTOT,HIST,M3VSTOT)

!CALCULATING SKEW FOR HURST
CALL SKHU(M,MH,H,M3VSTOT)

! CONSTRUCTING SYNTHETIC SERIES
CALL SYN(M,N1,ASTOT,BSTOT,M3VSTOT,SYNTHETIC)

!HURST
CALL HURST(M,N1,MH,NH,H,SYNTHETIC,HPR,EXM,SDM)

!PRINTING TO FILE
CALL PRIN(NH,M,HPR)

RETURN
END

```

Υπορουτίνα ανάγνωσης ιστορικών χρονοσειρών

```

SUBROUTINE READING(HIST,N,M)
INTEGER*4 N,M
REAL*8 HIST(N,12*M)

INTEGER*4 K,I,J

DO 10 K=0,M-1,1
  DO 20 I=1,N,1
    READ(10,*) (HIST(I,J),J=K*12+1,(K+1)*12,1)
    20 CONTINUE
  READ(10,*)
  10 CONTINUE

RETURN
END

```

Υπορουτίνα κατασκευής πινάκων a_s , b_s και v_s

```

SUBROUTINE ASBSMATR(N,M,ASTOT,BSTOT,HIST,M3VSTOT)
INTEGER*4 N,M
REAL*8 ASTOT(M,12*M),HIST(N,12*M),BSTOT(M,12*M),M3VSTOT(M,12)

INTEGER*4 S,I,J
REAL*8 CXSXS(M,M),CXXS1(M,M),CX1XS1(M,M)
REAL*8 INV(M,M),AS(M,M),BS(M,M),C(M,M),AST(M,M),MUL(M,M),MUL1(M,M)
REAL*8 M3VS(M)

DO 10 S=1,12,1

!CONSTRUCTING AS

  ! FORMATING MATRIX COV[X{S},X{S-1}]
  CALL XSXS1(S,HIST,CXSXS1,N,M)

  ! FORMATING MATRIX COV[X{S-1},X{S-1}]
  CALL XS1XS1(S,HIST,CX1XS1,N,M)

```

```

!INVERTING MATRIX COV[X{S-1},X{S-1}]
CALL DLINRG(M,CXS1XS1,M,INV,M)

!CONSTRUCTING AS
CALL MULTAB(M,M,CXSXS1,M,M,INV,AS)

! CONSTRUCTING BS

! CALCULATING THE TRANSPOSE OF AS
CALL TRAN(M,M,AS,AST)

!CALCULATING [CXS1XS1]*[AST]=[MUL]
CALL MULTAB(M,M,CXS1XS1,M,M,AST,MUL)

!CALCULATING [AS]*[MUL]=[MUL1]
CALL MULTAB(M,M,AS,M,M,MUL,MUL1)

!CALCULATING MATRIX COV[XS,XS]
CALL XSXS(S,HIST,CXSXS,N,M)

!CALCULATING MATRIX C
DO 20 I=1,M,1
    DO 30 J=1,M,1
        C(I,J)=CXSXS(I,J)-MUL1(I,J)
    30 CONTINUE
20 CONTINUE

! CALCULATING BS
CALL CHOL(M,C,BS)

! CALCULATING SKEW OF THE NOISE
CALL M3V(S,HIST,M3VS,N,M,AS,BS)

!FORMATING ASTOT,BSTOT,M3VSTOT
DO 40 I=1,M,1
    DO 50 J=1,M,1
        ASTOT(I,(S-1)*M+J)=AS(I,J)
        BSTOT(I,(S-1)*M+J)=BS(I,J)
    50 CONTINUE

M3VSTOT(I,S)=M3VS(I)

40 CONTINUE

10 CONTINUE

RETURN
END

```

Υπορουτίνα υπολογισμού μέσων τιμών μηνών

```

SUBROUTINE EX(N,M,HIST,EXM)
INTEGER*4 N,M
REAL*8 HIST(N,12*M),EXM(M,12)

INTEGER*4 I,J,K
REAL*8 X(N),XM

DO 10 K=0,M-1,1

```

```

DO 20 J=1,12,1
  DO 30 I=1,N,1
    X(I)=HIST(I,K*12+J)
  30 CONTINUE

  CALL AVER(N,X,XM)
  EXM(K+1,J)=XM

20 CONTINUE
10 CONTINUE

RETURN
END

```

Υπορουτίνα παραγωγής του συνθετικού δείγματος

```

SUBROUTINE SYN(M,N1,ASTOT,BSTOT,M3VSTOT,SYNTHETIC)
INTEGER*4 M,N1
REAL*8 ASTOT(M,12*M),BSTOT(M,12*M),M3VSTOT(M,12)
REAL*8 SYNTHETIC(N1,M*12)

INTEGER*4 K,S,I,J
REAL*8 XS(M),XS1(M),VS(M),AS(M,M),BS(M,M),BSVS(M),ASXS1(M)

DO 10 I=1,M,1
  XS1(I)=0.
  XS(I)=0.
10 CONTINUE

!CALCULATING SYNTHETIC SERIES
DO 20 K=1,N1,1
  DO 30 S=1,12,1

    !SELECTING MATRIXES AS,BS,VS
    DO 40 I=1,M,1
      CALL GAMA(M3VSTOT(I,S),VS(I))
      DO 50 J=1,M,1
        AS(I,J)=ASTOT(I,(S-1)*M+J)
        BS(I,J)=BSTOT(I,(S-1)*M+J)
      50 CONTINUE
    40 CONTINUE

    ! CALCULATING VECTOR [BSVS]=[BS]*[VS]
    CALL MULTAX(M,M,BS,VS,BSVS)

    ! CALCULATING VECTOR [ASXS1]=[AS]*[XS1]
    CALL MULTAX(M,M,AS,XS1,ASXS1)

    ! CALCULATING VECTOR XS
    DO 60 I=1,M,1
      XS(I)=ASXS1(I)+BSVS(I)
    60 CONTINUE

    ! CALCULATING MATRIX SYNTHETIC
    DO 70 I=0,M-1,1
      SYNTHETIC(K,I*12+S)=XS(I+1)
    70 CONTINUE

    DO 80 I=1,M,1
      XS1(I)=XS(I)
    80 CONTINUE

```

```

30 CONTINUE
20 CONTINUE

RETURN
END

```

Υπορουτίνα εκτύπωσης των αποτελεσμάτων

```

SUBROUTINE PRIN(N1,M,SYNTHETIC)
INTEGER*4 N1,M
REAL*8 SYNTHETIC(N1,12*M),ET(N1,M)

INTEGER*4 K,I,J
REAL*8 SUM

DO 20 I=1,N1,1
  DO 30 J=1,12,1
    WRITE(20,1000)(SYNTHETIC(I,K*12+J),K=0,M-1)
  30 CONTINUE
20 CONTINUE

DO 40 I=1,N1,1
  WRITE(30,2000)(SYNTHETIC(I,J),J=1,12*M,1)
40 CONTINUE

DO 35 K=1,M,1
  DO 50 I=1,N1,1
    SUM=0.
    DO 60 J=1,12,1
      SUM=SUM+SYNTHETIC(I,(K-1)*12+J)
    60 CONTINUE
    ET(I,K)=SUM
  50 CONTINUE
35 CONTINUE

DO 70 I=1,N1,1
  WRITE(40,1000)(ET(I,K),K=1,M,1)
70 CONTINUE

1000 FORMAT(10(1X,F13.4))
2000 FORMAT(120(1X,F9.4))

RETURN
END

```

Υπορουτίνα υπολογισμού πίνακα συνδιασπορών του μήνα αναφοράς με τον προηγούμενο του

```

SUBROUTINE XSXS1(S,HIST,CXSXS1,N,M)
INTEGER*4 N,M,S
REAL*8 HIST(N,12*M),CXXS1(M,M)

INTEGER*4 I,J,K
REAL*8 XI1(N-1),XJ1(N-1),XIS(N),XJS(N)

SELECT CASE(S)
CASE(1:1)
DO 10 I=0,M-1,1
  DO 20 J=1,M,1

```

```

                DO 30 K=2,N,1
                    XI1(K-1)=HIST(K,12*I+1)
                    XJ1(K-1)=HIST(K-1,12*J)
                30 CONTINUE

                CALL COVXY(N-1,XI1,XJ1,CXSXS1(I+1,J))

                20 CONTINUE
10 CONTINUE

CASE(2:12)
DO 40 I=0,M-1,1
    DO 50 J=0,M-1,1
        DO 60 K=1,N,1
            XIS(K)=HIST(K,12*I+S)
            XJS(K)=HIST(K,12*J+S-1)
        60 CONTINUE

        CALL COVXY(N,XIS,XJS,CXSXS1(I+1,J+1))

    50 CONTINUE
40 CONTINUE
ENDSELECT

RETURN
END

```

Υπορουτίνα υπολογισμού πίνακα συνδιασπορών του προηγούμενου μήνα από τον μήνα αναφοράς

```

SUBROUTINE XS1XS1(S,HIST,CXS1XS1,N,M)
INTEGER*4 N,M,S
REAL*8 HIST(N,12*M),CXS1XS1(M,M)

INTEGER*4 I,J,K,S1
REAL*8 XIS(N),XJS(N)

S1=S-1
    IF(S1.EQ.0) THEN
        S1=12
    ENDIF

DO 10 I=0,M-1,1
    DO 20 J=0,M-1,1
        DO 30 K=1,N,1
            XIS(K)=HIST(K,12*I+S1)
            XJS(K)=HIST(K,12*J+S1)
        30 CONTINUE

        CALL COVXY(N,XIS,XJS,CXS1XS1(I+1,J+1))

    20 CONTINUE
10 CONTINUE

RETURN
END

```

Υπορουτίνα υπολογισμού πίνακα συνδιασπορών του μήνα αναφοράς

```
SUBROUTINE XSXS (S, HIST, CXS1XS1, N, M)
INTEGER*4 N, M, S
REAL*8 HIST (N, 12*M), CXS1XS1 (M, M)

INTEGER*4 I, J, K
REAL*8 XIS (N), XJS (N)

DO 10 I=0, M-1, 1
  DO 20 J=0, M-1, 1
    DO 30 K=1, N, 1
      XIS (K) = HIST (K, 12*I+S)
      XJS (K) = HIST (K, 12*J+S)
    30 CONTINUE

    CALL COVXY (N, XIS, XJS, CXS1XS1 (I+1, J+1))

  20 CONTINUE
10 CONTINUE

RETURN
END
```

Υπορουτίνα υπολογισμού της ασυμμετρίας των διανυσμάτων του λευκού θορύβου

```
SUBROUTINE M3V (S, HIST, M3VS, N, M, AS, BS)
INTEGER*4 S, N, M
REAL*8 HIST (N, 12*M), AS (M, M), BS (M, M), M3VS (M)

INTEGER*4 S1, I, J
REAL*8 XS (M, N), XS1 (M, N), ASXS (M, N)
REAL*8 M3XS (M), M3ASXS (M), SBS (M)
REAL*8 INV (M, M), BS3 (M, M)

S1=S-1
  IF (S1.EQ.0) THEN
    S1=12
  ENDIF

! FORMATING XS
DO 10 I=0, M-1, 1
  DO 20 J=1, N, 1
    XS (I+1, J) = HIST (J, I*12+S)
  20 CONTINUE
10 CONTINUE

! FORMATING X(S-1)
DO 30 I=0, M-1, 1
  DO 40 J=1, N, 1
    XS1 (I+1, J) = HIST (J, I*12+S1)
  40 CONTINUE
30 CONTINUE

! CALCULATING [AS]*X(S-1)=[ASXS]
CALL MULTAB (M, M, AS, M, N, XS1, ASXS)

! CALCULATING M3XS
CALL SKEWA (M, N, XS, M3XS)

! CALCULATING M3ASXS
```



```

CALL SKEWA (M,N,ASXS,M3ASXS)

!CALCULATING M3XS-M3ASXS=SBS
  DO 50 I=1,M,1
    SBS (I) =M3XS (I) -M3ASXS (I)
  50 CONTINUE

! CALCULATING BS3
  DO 60 I=1,M,1
    DO 70 J=1,M,1
      BS3 (I, J) =BS (I, J) **3.
    70 CONTINUE
  60 CONTINUE

! CALCULATING INVERSE OF BS3
  CALL DLINRG (M,BS3,M,INV,M)

! CALCULATING M3VS
  CALL MULTAX (M,M,INV,SBS,M3VS)

RETURN
END

```

Υπορουτίνα υπολογισμού ασυμμετρίας διανύσματος

```

SUBROUTINE SKEWA (N,M,A,SKA)
  INTEGER*4 N,M
  REAL*8 A (N,M) , SKA (N)

  INTEGER*4 I,J
  REAL*8 X (M) , SK

  DO 10 I=1,N,1
    DO 20 J=1,M,1
      X (J) =A (I, J)
    20 CONTINUE

  CALL SKEW (M,X,SK)

  SKA (I) =SK

10 CONTINUE

RETURN
END

```

Υπορουτίνα υπολογισμού μέσης τιμής μίας σειράς τιμών

```

SUBROUTINE AVER (N,X,AV)
  INTEGER*4 N
  REAL*8 X (N) , AV

  REAL*8 SUM
  INTEGER*4 I

  SUM=0.
  DO 10 I=1,N,1
    SUM=SUM+X (I)
  10 CONTINUE
  AV=SUM/N

```

```
RETURN
END
```

Υπορουτίνα υπολογισμού συνδιασποράς δύο σειρών τιμών

```
SUBROUTINE COVXY (N, X, Y, CV)
INTEGER*4 N
REAL*8 X (N) , Y (N) , CV

REAL*8 XM, YM, SUM
INTEGER*4 I

CALL AVER (N, X, XM)
CALL AVER (N, Y, YM)

SUM=0.
DO 10 I=1, N, 1
    SUM=SUM+ (X (I) -XM) * (Y (I) -YM)
10 CONTINUE
CV=SUM/N

RETURN
END
```

Υπορουτίνα υπολογισμού ασυμμετρίας μίας σειράς τιμών

```
SUBROUTINE SKEW (N, X, SK)
INTEGER*4 N
REAL*8 X (N) , SK

REAL*8 SUM, XM
INTEGER*4 I

CALL AVER (N, X, XM)

SUM=0.
DO 10 I=1, N, 1
    SUM=SUM+ (X (I) -XM) **3.
10 CONTINUE
SK=SUM/N

RETURN
END
```

Υπορουτίνα υπολογισμού γινομένου δύο πινάκων

```
SUBROUTINE MULTAB (NA, MA, A, NB, MB, B, C)
INTEGER*4 NA, NB, MA, MB
REAL*8 A (NA, MA) , B (NB, MB) , C (NA, MB)

INTEGER*4 I, J, K
REAL*8 SUM

IF (MA.NE.NB) THEN
WRITE (*, *) 'CANNOT MULTIPLY MATRIXES'
STOP
ENDIF
```

```

DO 10 I=1,NA,1
  DO 20 J=1,MB,1
    SUM=0.
    DO 30 K=1,NB,1
      SUM=SUM+A(I,K)*B(K,J)
    30 CONTINUE
    C(I,J)=SUM
  20 CONTINUE
10 CONTINUE

RETURN
END

```

Υπορουτίνα υπολογισμού του γινομένου πίνακα με διάνυσμα

```

SUBROUTINE MULTAX(NA,MA,A,X,Y)
INTEGER*4 NA,MA
REAL*8 A(NA,MA),X(MA),Y(NA)

INTEGER*4 I,K
REAL*8 SUM

DO 10 I=1,NA,1
  SUM=0.
  DO 20 K=1,MA,1
    SUM=SUM+A(I,K)*X(K)
  20 CONTINUE
  Y(I)=SUM
10 CONTINUE

RETURN
END

```

Υπορουτίνα υπολογισμού ανάστροφου πίνακα

```

SUBROUTINE TRAN(NA,MA,A,AT)
INTEGER*4 NA,MA
REAL*8 A(NA,MA),AT(MA,NA)

DO 10 I=1,NA,1
  DO 20 J=1,MA,1
    AT(J,I)=A(I,J)
  20 CONTINUE
10 CONTINUE

RETURN
END

```

Υπορουτίνα που πραγματοποιεί αποσύνθεση Cholesky

```

SUBROUTINE CHOL(N,C,B)
INTEGER*4 N
REAL*8 C(N,N),B(N,N)

INTEGER*4 I,J,K
REAL*8 SUM

! ZEROING THE MATRIX B
DO 10 I=1,N,1
  DO 20 J=1,N,1

```

```

                B(I,J)=0.
            20 CONTINUE
10 CONTINUE

! CHECKING IF THE MATRIX IS POSITIVE DEFINED
IF(C(1,1).LE.0.)THEN
    WRITE(*,*)'C MATRIX IS NOT POSITIVE DEFINED'
    STOP
ENDIF

!CONSTRUCTION OF THE ELEMENT B(1,1)
B(1,1)=SQRT(C(1,1))

!CONSTRUCTING ELEMENTS
DO 30 I=2,N,1

!CONSTRUCTING ELEMENTS B(I,J)
    DO 40 J=1,I-1,1
        SUM=0.
            DO 50 K=1,J-1,1
                SUM=SUM+B(J,K)*B(I,K)
            50 CONTINUE
        B(I,J)=(C(I,J)-SUM)/B(J,J)
    40 CONTINUE

!CONSTRUCTING ELEMENTS B(I,I)
    SUM=0.
    DO 60 K=1,I-1,1
        SUM=SUM+B(I,K)**2.
    60 CONTINUE
    B(I,I)=C(I,I)-SUM
        ! CHECKING IF THE MATRIX IS POSITIVE DEFINED
        IF(B(I,I).LE.0.)THEN
            WRITE(*,*)'C MATRIX IS NOT POSITIVE DEFINED'
            STOP
        ENDIF
    B(I,I)=SQRT(B(I,I))
30 CONTINUE

RETURN
END

```

Υπορουτίνα υπολογισμού τυχαίων αριθμών που ακολουθούν κατανομή Γάμα με μηδενική μέση τιμή, μοναδιαία τυπική απόκλιση και δεδομένο συντελεστή ασυμμετρίας

```

SUBROUTINE GAMA(M3,G)
REAL*8 M3,G

REAL*8 L,K,C,R(1)

L=2./M3
K=L**2.
C=-L

CALL DRNGAM(1,K,R)
G=R(1)
G=G/L+C

```

RETURN
END

Στην συνέχεια παρουσιάζεται το αρχείο δεδομένων HISTORIC.TXT που περιέχει τις ιστορικές χρονοσειρές όπως αυτές χρησιμοποιήθηκαν από το πρόγραμμα. Επισημαίνεται ότι από τις ιστορικές χρονοσειρές των μηνιαίων τιμών των δύο υδρολογικών μεταβλητών χρησιμοποιήθηκαν μόνο οι τιμές της κοινής περιόδου του ιστορικού δείγματος δηλαδή οι μηνιαίες τιμές των ετών 1907-1908 ως και 1997-1998.

Αρχείο δεδομένων

14.8	15.6	16.9	20.4	16.6	17.3	12.3	5.4	2.9	1.3	2.1	4.4
14.1	13.0	44.1	58.3	37.1	30.9	33.6	14.0	12.0	2.6	1.4	6.1
7.6	10.0	13.2	19.5	53.5	38.7	34.5	19.4	16.1	0.6	2.5	7.0
10.6	13.0	16.2	19.4	13.9	20.8	19.9	11.5	9.0	2.9	4.0	10.2
9.3	28.0	21.7	36.5	34.7	25.3	19.6	16.6	7.7	5.5	2.6	6.6
9.2	33.6	49.9	21.8	45.5	80.5	38.5	17.1	13.9	3.4	3.9	6.9
24.7	14.0	18.6	43.4	22.3	23.1	13.6	4.9	5.2	3.6	3.3	9.1
9.8	31.3	28.0	47.3	40.3	39.3	32.2	18.2	7.1	3.6	2.3	10.1
14.9	12.4	12.9	13.1	18.5	15.9	4.6	8.2	1.8	0.6	0.8	3.3
6.7	7.8	8.9	10.5	15.1	12.3	1.4	0.6	0.5	0.4	0.4	1.2
5.7	8.3	10.6	13.0	19.5	28.7	21.5	4.9	2.9	1.3	2.1	4.5
9.3	26.8	37.5	53.0	62.1	50.4	33.0	26.3	16.6	3.2	1.4	11.7
12.1	16.7	21.7	20.2	19.8	38.7	19.2	12.9	12.3	0.2	1.3	6.0
23.9	55.2	65.1	56.1	50.2	38.8	27.3	19.7	13.4	3.8	2.8	10.6
22.0	37.0	81.5	81.2	56.7	40.4	23.7	14.7	8.6	1.3	0.7	5.9
10.0	23.6	22.2	49.9	34.8	37.8	30.6	32.7	22.6	7.3	2.9	8.5
10.6	12.2	17.1	34.1	44.0	33.7	20.3	8.4	6.6	0.3	0.0	5.6
8.6	39.5	31.1	22.9	31.5	46.2	34.1	22.9	14.1	4.9	0.0	4.0
10.4	10.7	16.1	27.4	24.0	35.1	14.9	1.5	3.1	0.0	0.0	2.3
7.1	6.7	10.6	24.9	25.5	29.0	19.8	5.7	0.0	0.0	0.0	2.3
19.8	16.4	29.9	56.7	63.5	74.7	57.7	22.2	11.2	1.2	0.0	3.5
17.9	26.7	40.8	36.8	50.2	49.6	31.9	13.7	10.4	1.3	0.0	13.9
13.9	28.1	21.2	24.0	52.0	54.0	34.6	19.9	11.0	10.2	0.0	5.8
11.5	12.2	20.0	39.7	59.4	42.1	61.5	24.3	17.5	0.1	0.0	8.5
11.5	10.7	32.9	31.7	29.3	70.5	40.1	13.2	3.8	0.6	0.5	8.9
11.2	17.8	14.2	24.6	36.3	21.6	19.2	11.3	11.6	1.9	3.6	8.9
7.9	7.7	25.6	37.5	55.4	56.1	28.5	9.5	13.0	3.4	0.8	4.8
8.4	11.1	22.6	44.0	38.8	32.7	19.3	9.2	6.3	0.6	0.0	2.0
5.9	11.6	34.2	26.3	30.9	13.7	8.7	19.3	7.2	5.2	0.1	4.0
9.5	15.7	30.8	19.8	34.4	18.9	16.5	9.8	4.4	0.9	0.0	6.0
19.3	18.7	40.4	46.8	78.2	46.7	85.3	38.9	12.7	3.6	1.6	12.6
15.6	13.8	40.6	42.3	26.2	86.3	46.0	17.2	22.0	8.2	0.0	9.7
12.1	11.9	20.2	56.4	35.8	31.9	24.3	26.1	14.5	3.6	6.1	9.9
10.3	9.4	33.7	41.8	39.0	27.4	14.9	34.0	29.4	24.8	15.1	9.5
16.5	18.8	18.9	35.5	67.7	58.2	34.8	13.0	10.8	6.7	4.3	10.5
14.5	20.9	15.2	15.8	14.1	18.8	13.2	15.8	4.5	3.8	3.8	11.3
10.8	16.8	14.2	25.0	34.1	31.2	25.6	13.7	6.5	3.8	6.9	10.2
10.7	11.3	20.7	38.9	27.5	31.7	25.1	10.8	3.4	1.3	1.3	11.4
11.4	21.9	35.4	64.2	31.4	34.7	28.7	17.7	2.3	2.2	1.9	9.0
12.8	14.7	48.8	70.9	66.5	34.2	17.0	13.0	11.6	3.6	4.6	12.3
13.7	20.6	27.5	18.6	18.8	22.9	23.2	17.1	7.1	4.7	4.6	9.3
10.8	11.7	18.7	24.6	30.6	32.8	24.3	12.8	11.4	0.0	7.2	11.6
14.5	21.5	16.3	21.7	20.6	38.1	27.5	17.0	5.1	5.1	6.8	11.0
11.7	12.1	16.5	26.8	23.4	24.9	16.2	6.6	6.7	7.0	3.4	6.8
21.6	32.1	21.5	39.4	39.4	23.7	13.4	9.7	5.9	2.9	0.0	6.3
7.5	7.7	17.4	28.7	18.3	18.5	14.5	8.9	7.8	0.0	0.0	6.7
11.2	29.3	15.6	31.2	44.4	36.9	26.6	13.9	5.5	3.8	5.0	7.7
9.8	13.1	32.9	28.9	13.6	20.0	27.6	14.0	4.1	0.0	6.1	9.6
19.1	21.5	16.9	24.2	82.2	65.5	33.0	13.5	8.3	0.0	0.0	9.6
9.8	9.7	11.9	16.2	12.8	16.4	6.6	6.2	6.2	19.4	0.0	7.6
24.2	42.0	31.8	35.9	19.2	28.5	22.0	11.3	8.1	0.0	9.7	28.0
12.7	21.5	24.4	25.8	19.8	30.5	22.4	16.8	8.0	0.0	7.9	10.4
12.3	17.2	17.8	33.3	28.3	33.8	22.5	13.9	4.6	0.0	1.1	11.3
11.5	11.3	18.5	19.3	20.0	48.6	18.1	9.9	1.0	0.0	0.0	3.6
10.7	10.8	16.3	12.5	18.8	22.5	7.1	0.0	0.0	0.0	0.0	4.2

13.3	24.7	91.1	49.0	66.9	45.3	27.9	21.3	6.9	0.0	0.0	6.9
21.7	17.2	24.6	34.0	33.4	41.1	22.7	8.3	0.0	0.0	0.0	9.5
10.6	8.7	13.3	28.5	36.8	40.1	25.7	15.2	8.3	2.8	2.0	5.7
9.2	9.4	9.0	23.4	11.5	37.7	23.7	12.7	7.2	2.2	1.8	6.8
9.0	16.5	23.4	21.3	20.4	30.0	21.5	9.8	4.7	1.4	2.3	7.6
14.9	17.7	28.2	31.1	32.5	34.2	19.5	9.6	5.2	1.5	1.5	7.6
19.6	23.5	104.9	75.3	37.6	46.4	30.4	13.1	0.0	0.0	5.1	13.9
16.3	15.4	26.4	28.0	20.0	31.7	10.7	12.9	0.0	0.0	0.0	9.2
12.7	13.0	13.2	24.0	24.1	46.7	30.7	11.6	0.0	0.0	0.0	11.5
13.8	19.6	18.6	48.9	43.2	42.1	34.5	27.0	0.0	0.0	4.1	11.3
16.4	25.4	14.4	32.8	31.3	35.4	25.7	0.0	6.8	0.0	0.0	0.0
0.0	14.8	22.4	25.6	34.9	53.8	29.3	12.8	0.0	0.0	0.0	11.8
19.9	18.2	18.9	20.6	25.9	27.6	5.3	0.0	0.0	0.0	0.0	6.5
13.7	15.0	29.7	25.7	45.5	33.0	28.6	7.3	0.0	0.0	0.0	3.4
9.6	12.1	12.3	10.3	1.8	8.4	8.1	2.8	2.5	0.5	1.1	5.8
2.4	3.8	14.4	34.1	38.5	23.9	15.7	4.9	0.1	0.0	0.0	3.0
7.7	9.3	22.2	19.6	18.4	13.9	6.8	3.8	0.4	0.0	0.0	3.9
14.5	23.3	19.6	32.4	26.1	47.9	25.8	17.4	4.8	0.0	0.0	5.1
21.5	16.0	28.2	58.7	51.4	31.8	25.6	8.1	1.8	0.7	2.0	8.9
9.7	11.1	15.8	13.5	28.0	48.7	45.1	28.1	11.5	2.1	3.2	6.5
7.5	11.5	17.0	14.2	14.2	21.7	5.8	2.5	4.1	0.2	0.0	0.0
3.8	6.5	27.0	22.4	34.8	39.3	40.9	18.3	2.2	1.9	1.8	6.1
6.0	10.1	13.9	52.8	22.9	33.5	26.2	9.0	3.6	0.0	0.3	3.2
9.2	13.6	15.9	14.1	20.6	21.5	9.7	5.2	1.1	0.0	0.0	1.0
9.2	11.1	10.2	22.3	20.4	40.8	37.5	19.3	3.7	0.0	0.0	2.0
6.5	9.6	9.9	11.6	21.4	34.1	15.2	5.1	0.5	0.0	0.0	0.4
3.7	9.4	22.4	13.7	9.1	26.7	11.6	1.8	0.0	0.0	0.0	0.0
4.3	5.4	6.7	7.6	4.7	1.2	0.0	0.0	0.0	0.0	1.4	2.7
3.6	5.5	19.2	21.3	19.4	28.0	24.5	12.4	1.6	0.0	0.0	3.0
5.6	7.9	10.2	10.6	11.8	13.8	6.9	2.1	0.4	0.0	0.0	1.7
4.0	5.2	6.2	7.8	8.6	9.4	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.8	3.6	5.3	13.2	38.1	22.1	12.7	4.1	0.0	0.0	0.0	0.0
10.2	10.7	13.6	30.4	19.2	25.1	18.9	2.8	0.0	0.0	0.0	1.1
5.6	7.7	15.9	23.8	38.8	35.9	22.8	5.4	5.6	0.1	0.0	2.6
6.0	7.6	9.4	41.0	13.6	23.5	18.7	10.3	0.4	0.0	0.0	0.9
4.8	10.6	19.4	11.8	14.7	20.7	20.2	13.9	2.0	0.7	0.0	0.0

0.0	115.2	66.3	58.8	37.9	38.0	6.3	23.6	0.0	15.0	5.1	118.0
60.5	79.7	227.5	80.6	58.5	27.4	38.9	84.7	10.7	0.0	5.5	72.6
46.4	56.1	61.4	130.0	145.8	92.8	40.2	88.1	37.1	1.5	20.8	55.4
22.6	76.7	95.1	58.3	48.8	51.7	87.6	70.4	74.4	20.9	23.4	105.6
4.1	138.2	98.1	59.1	97.5	40.2	33.0	33.3	61.2	17.5	0.0	2.5
30.4	209.1	121.3	43.1	198.2	55.9	7.4	20.0	15.9	0.0	7.8	24.1
94.3	48.0	133.6	179.8	32.7	22.3	15.0	23.4	23.6	16.0	51.5	1.8
23.4	235.7	104.1	60.4	129.4	18.3	106.1	12.6	24.9	10.2	9.5	51.7
46.5	34.1	44.5	79.8	95.3	22.1	43.9	56.7	0.0	0.0	51.1	35.1
15.0	28.4	59.8	64.8	75.8	24.6	50.2	25.6	16.5	0.0	0.0	8.4
101.0	100.3	103.0	17.0	123.1	195.6	4.5	24.6	18.3	0.0	17.5	0.0
269.9	233.8	117.3	179.3	128.4	104.9	6.6	90.6	18.2	0.0	0.8	42.9
110.4	67.1	103.3	93.1	109.2	47.7	16.8	66.2	23.3	10.9	8.9	0.0
216.6	160.2	172.0	74.4	113.2	17.3	79.2	20.6	54.5	0.8	0.0	142.4
65.2	177.2	211.6	114.9	53.1	17.8	8.9	26.4	0.0	0.0	2.0	0.0
77.7	139.4	97.4	154.0	70.0	61.3	56.9	77.5	167.8	10.2	0.0	1.0
20.0	39.2	142.7	158.0	79.8	71.7	0.0	29.2	17.6	0.0	7.6	91.0
103.3	104.0	40.3	30.5	90.6	176.9	43.2	80.8	29.2	46.9	0.0	0.0
45.5	112.0	31.9	130.4	67.4	39.3	11.4	27.9	6.6	2.3	6.1	3.8
1.3	46.7	221.5	70.2	81.3	51.6	61.9	19.8	0.0	0.0	5.8	18.0
237.4	9.4	138.8	331.8	67.3	141.7	34.0	5.8	0.0	0.0	0.0	7.9
19.7	219.8	99.1	79.2	127.2	37.5	17.1	8.9	4.6	0.0	0.0	124.2
73.1	112.0	65.5	90.1	233.4	49.4	111.0	87.3	83.5	50.5	0.0	55.6
70.1	82.9	131.4	92.0	135.6	74.6	77.2	75.0	30.2	0.0	1.3	13.7
63.5	44.0	210.1	52.8	118.2	159.1	11.2	24.4	26.7	0.0	41.1	0.5
14.7	60.4	16.6	139.2	78.4	13.5	35.6	37.0	41.8	6.6	6.9	12.7
44.7	42.6	169.7	138.2	153.4	114.9	18.3	22.4	15.5	11.4	0.0	1.0
34.4	45.2	114.6	184.9	71.2	99.8	8.4	4.3	20.6	2.5	0.0	0.0
58.4	56.7	122.5	114.8	98.4	32.0	34.5	69.6	74.8	11.7	1.3	2.0
47.3	138.6	180.8	51.2	95.9	9.4	46.2	49.0	43.4	13.4	2.5	22.6
152.2	125.5	152.0	76.0	120.3	53.3	165.6	3.6	0.0	0.0	5.6	36.1
63.5	30.5	229.1	102.7	52.6	186.3	57.6	8.9	73.6	0.0	20.1	56.6
24.6	54.2	135.4	139.0	74.6	68.9	53.3	159.1	23.6	6.4	11.3	1.0
52.6	41.8	172.9	98.5	95.6	32.0	32.3	21.1	5.9	1.5	0.0	13.0
107.4	105.3	57.8	139.6	126.9	102.6	38.5	2.3	15.2	15.5	4.8	0.0
91.9	111.9	23.3	56.7	37.0	95.2	33.3	69.3	15.2	0.0	0.0	95.9
58.8	83.0	46.0	92.1	135.2	66.7	86.3	22.0	3.2	8.6	209.4	0.0
48.0	2.1	120.7	98.2	49.8	31.0	40.2	0.0	4.1	0.0	15.1	72.8
36.2	154.6	159.5	193.2	24.9	95.9	41.4	33.1	13.9	5.7	0.5	5.3
42.2	32.7	271.0	145.0	67.0	8.0	11.0	2.0	7.0	1.0	20.0	20.0
73.0	113.0	122.0	51.0	119.0	51.0	84.0	27.0	35.0	4.0	0.0	47.0
15.0	103.0	110.0	86.0	54.0	71.0	29.0	14.0	8.0	18.0	1.0	36.0

78.0	100.0	49.0	100.0	35.0	143.0	70.0	35.0	5.0	0.0	2.0	56.0
30.0	39.0	153.0	152.0	50.0	82.0	6.0	11.0	11.0	3.0	8.0	98.0
166.0	178.0	94.0	93.0	75.0	51.0	8.0	58.0	16.0	29.0	0.0	21.0
27.0	141.0	174.0	171.0	30.0	55.0	31.0	77.0	21.0	5.0	10.0	5.0
160.2	136.1	58.0	155.2	95.1	67.3	51.0	43.4	6.3	0.0	0.0	6.5
65.9	147.5	144.9	82.9	19.2	72.8	128.4	2.0	12.7	4.8	21.0	76.8
201.3	160.4	50.1	67.5	181.4	108.6	39.1	13.0	8.6	0.0	0.0	17.5
18.2	62.7	35.9	118.1	22.6	54.4	29.3	32.9	15.8	1.5	2.5	41.1
206.0	75.8	97.4	85.9	3.0	91.2	26.8	12.3	42.3	1.3	0.0	119.1
67.3	127.7	25.6	76.6	24.5	61.4	64.6	20.7	21.8	10.0	4.5	57.6
91.8	79.7	47.5	126.4	71.4	66.4	43.4	42.2	24.3	8.9	22.7	44.7
13.6	43.9	194.3	95.5	50.9	154.2	24.3	13.0	11.0	4.6	4.1	0.4
37.7	60.7	139.5	37.0	117.0	156.0	7.0	25.0	1.0	0.0	0.0	126.0
174.0	159.0	155.0	38.3	70.4	72.2	31.7	72.2	40.6	16.4	1.8	0.7
234.0	52.1	38.1	162.7	43.5	60.5	8.5	16.0	50.0	1.0	3.0	56.0
20.5	6.5	86.0	125.0	110.0	87.8	34.2	55.9	35.1	5.1	9.6	0.0
37.1	31.6	55.2	109.3	11.5	152.2	30.9	36.5	36.1	0.0	11.3	32.4
20.1	120.9	101.5	38.5	57.8	83.0	43.5	13.7	15.1	3.5	61.7	39.6
137.2	67.1	124.3	81.1	82.7	69.0	19.4	21.9	26.6	0.0	5.3	60.4
164.9	113.3	216.9	80.6	20.8	94.3	25.0	0.0	0.8	0.0	0.0	14.5
1.5	40.6	192.6	43.1	41.5	84.8	1.9	69.4	28.8	27.8	1.7	32.3
85.7	12.0	76.0	52.0	84.3	98.7	24.2	11.8	6.7	18.0	51.3	29.6
112.5	61.3	69.7	181.4	82.2	24.5	113.9	27.3	8.1	22.3	15.6	20.7
111.1	25.7	33.7	123.3	53.2	35.5	12.2	2.7	36.4	19.9	6.1	54.5
58.1	53.6	70.6	97.0	119.7	89.6	31.8	44.7	12.2	0.0	0.3	6.2
21.9	112.2	28.1	87.3	148.2	26.4	7.9	27.1	57.3	4.0	20.0	10.2
18.6	70.7	169.4	78.6	187.0	52.5	52.8	15.8	7.2	2.3	14.5	0.2
75.5	59.2	59.6	13.0	7.3	22.0	39.7	1.1	33.7	0.0	1.4	21.1
27.0	49.1	178.4	145.3	76.5	53.3	48.2	10.5	1.2	0.0	8.1	63.5
63.7	46.1	168.9	42.1	60.1	26.7	34.3	38.9	1.7	25.3	41.9	16.8
224.1	148.7	49.4	75.1	86.2	117.8	71.9	39.5	22.6	0.0	2.9	17.3
118.4	33.6	141.1	212.4	53.5	5.7	53.7	8.4	0.0	0.0	15.2	28.7
43.4	101.4	81.5	74.8	122.4	114.1	120.7	39.3	9.6	1.5	2.3	3.7
43.3	119.5	39.4	21.1	94.6	45.0	2.9	22.6	94.4	4.8	11.2	0.0
14.0	66.0	168.6	86.8	89.7	92.1	125.2	10.0	0.5	6.0	32.4	1.9
0.8	81.7	108.2	125.3	37.6	80.3	29.5	8.6	1.1	1.4	0.0	10.7
62.5	94.5	53.2	38.6	86.2	26.9	6.3	61.7	10.4	0.2	0.0	0.3
110.9	15.3	62.8	54.6	58.4	89.7	89.9	5.3	10.8	5.8	15.9	0.0
86.2	70.1	55.7	64.4	58.4	65.0	21.8	11.7	12.6	0.0	0.0	9.2
50.5	157.1	130.7	5.0	25.3	69.1	11.0	25.9	3.3	12.5	0.0	5.3
70.6	37.5	63.2	5.9	23.0	28.6	26.4	15.9	9.5	3.3	73.7	8.0
38.4	96.0	135.5	137.4	65.9	97.8	99.7	53.5	0.1	3.7	64.8	0.4
61.4	69.5	127.7	32.1	64.0	48.9	17.9	45.6	33.4	3.4	6.2	0.8
46.6	30.9	7.0	44.0	66.9	23.6	16.6	111.7	0.4	0.6	0.4	0.9
0.0	195.7	19.4	165.3	204.5	37.8	33.3	49.8	0.5	36.2	1.5	0.0
146.3	83.6	83.9	117.5	5.8	88.2	33.4	9.4	2.3	0.0	0.0	30.7
31.9	83.5	102.4	84.8	106.2	62.6	21.3	69.4	0.0	2.5	22.9	49.6
44.6	23.4	50.9	130.9	46.7	102.8	51.1	8.0	5.5	0.0	7.4	0.6
33.7	44.1	142.4	22.7	20.4	141.3	14.7	61.2	10.1	0.0	0.0	32.2

Συντελεστές Hurst χρονοσειρών

Χρονοσειρά απορροών: $H = 0.784$

Χρονοσειρά βροχοπτώσεων: $H = 0.642$

Αριθμός παραμέτρων SMA

$q = 1000$

Παράρτημα ΣΤ

Στο παράρτημα αυτό παρουσιάζονται τα προγράμματα των μοντέλων PSMA και PPSMA που αναπτύχθηκαν στο κεφάλαιο 6 και στο παράρτημα Α αντίστοιχα. Επισημαίνεται ότι για την εφαρμογή κάθε μοντέλου γίνεται χρήση δύο προγραμμάτων: (1) του προγράμματος προσδιορισμού των παραμέτρων του μοντέλου και (2) του προγράμματος παραγωγής των συνθετικών χρονοσειρών. Το πρόγραμμα του προσδιορισμού των παραμέτρων είναι διαφορετικό για κάθε μοντέλο, ενώ το πρόγραμμα παραγωγής των συνθετικών χρονοσειρών είναι κοινό και για τα δύο μοντέλα.

Ο προσδιορισμός των παραμέτρων των μοντέλων γίνεται με βελτιστοποίηση και συγκεκριμένα με εφαρμογή της μεθόδου των συζυγών κλίσεων που περιγράφηκε στο εδάφιο 3.3.6. Οι υπορουτίνες βελτιστοποίησης, ελήφθησαν αρχικά από το βιβλίο (Press *et al.*, 1992) και στην συνέχεια τροποποιήθηκαν κατάλληλα από τον συγγραφέα ώστε να μπορούν να χρησιμοποιηθούν για βελτιστοποίηση των παραμέτρων του εκάστοτε μοντέλου. Στην συνέχεια παρουσιάζονται, τόσο τα προγράμματα βελτιστοποίησης όσο και το πρόγραμμα παραγωγής των συνθετικών χρονοσειρών.

ΣΤ.1 Πρόγραμμα βελτιστοποίησης παραμέτρων μοντέλου PSMA

Λειτουργία προγράμματος

Αρχικά τοποθετούμε στο αρχείο PARAMETERS.TXT τα απαραίτητα δεδομένα για την βελτιστοποίηση των παραμέτρων του μοντέλου¹. Στην συνέχεια τοποθετούμε στα αρχεία VARXS.TXT, COVXS.TXT, M3XS.TXT, M3ET.TXT και COVET.TXT τα στατιστικά χαρακτηριστικά του ιστορικού δείγματος που θέλουμε να αναπαράγουμε συνθετικά. Στο αρχείο VARXS.TXT, τοποθετούμε τις 12 σε αριθμό διασπορές των μηνών του ιστορικού δείγματος ξεκινώντας από τον μήνα Οκτώβριο. Στο αρχείο COVXS.TXT, τοποθετούμε τις 12 σε αριθμό συνδιασπορές των μηνών για μοναδιαίο βήμα χρονικής μετατόπισης ξεκινώντας από την συνδιασπορά του μήνα Οκτωβρίου με τον μήνα Σεπτέμβριο. Στο αρχείο M3XS.TXT, τοποθετούμε τις 12 σε αριθμό τρίτες ροπές των μηνών ξεκινώντας με την τρίτη ροπή του Οκτωβρίου. Στο αρχείο M3ET.TXT τοποθετούμε την ετήσια τρίτη ροπή της ιστορικής χρονοσειράς και στο αρχείο

¹ στο τέλος της ενότητας ΣΤ.1 παρατίθεται η μορφή του εν λόγω αρχείου

COVET.TXT τις $n+1$ σε αριθμό αυτοσυνδιασπορές (δηλαδή $\gamma_p = \text{Cov}[Z_i, Z_{i-p}]$, $p = 0, \dots, n$) της ετήσιας χρονοσειράς βάσει κάποιου θεωρητικού αυτοσυσχετογράμματος (π.χ. FGN). Ακολούθως τοποθετούμε στο αρχείο PINITIAL.TXT το αρχικό διάνυσμα $\zeta = [\alpha_0^1, \alpha_1^1, \dots, \alpha_q^1, \alpha_0^2, \alpha_1^2, \dots, \alpha_q^2, \dots, \dots, \alpha_0^{12}, \alpha_1^{12}, \dots, \alpha_q^{12}, \zeta_v]^T$ διαστάσεως $12(q+1)+1$, του οποίου τα στοιχεία λαμβάνονται τυχαία.

Μετά την εκτέλεσή του, το πρόγραμμα παράγει το αρχείο PFINAL.TXT το οποίο περιέχει τις βελτιστοποιημένες παραμέτρους α_j^s ($j = 0, \dots, q$ και $s = 1, \dots, 12$) του μοντέλου PSMA και το αρχείο INFO.TXT το οποίο περιέχει τον αριθμό των επαναλήψεων που απαιτήθηκαν για την βελτιστοποίηση, καθώς και την τιμή της αντικειμενικής συναρτήσεως που επιτεύχθηκε. Στην συνέχεια παρουσιάζεται ο κώδικας, σε γλώσσα Fortran, του προγράμματος βελτιστοποίησης των παραμέτρων του μοντέλου PSMA.

Κυρίως πρόγραμμα

```
PROGRAM PSMA
INTEGER*4 N,K,ITMAX
REAL*8 FTOL,EPS,TOL,L(5)

OPEN(10,FILE='PARAMETERS.TXT')

READ(10,*)
READ(10,*)
READ(10,*)N
READ(10,*)
READ(10,*)
READ(10,*)K
READ(10,*)
READ(10,*)
READ(10,*)ITMAX
READ(10,*)
READ(10,*)
READ(10,*)FTOL
READ(10,*)
READ(10,*)
READ(10,*)TOL
READ(10,*)
READ(10,*)EPS
READ(10,*)
READ(10,*)L(1)
READ(10,*)
READ(10,*)L(2)
READ(10,*)
READ(10,*)L(3)
READ(10,*)
READ(10,*)L(4)
```

```

READ(10,*)
READ(10,*)
READ(10,*)L(5)

CALL MATR(N,K,ITMAX,FTOL,EPS,TOL,L)

CLOSE(10)

STOP
END

```

Υπορουτίνα που καλεί την υπορουτίνα βελτιστοποίησης

```

SUBROUTINE MATR(N,K,ITMAX,FTOL,EPS,TOL,L)
INTEGER*4 N,K,ITMAX
REAL*8 FTOL,EPS,TOL,L(5)

REAL*8 P(12*(N+1)+1),VARXS(12),COVXS(12),COVET(K+1),M3XS(12),M3ET,FRET
INTEGER*4 I,ITER

OPEN(20,FILE='PINITIAL.TXT')
OPEN(30,FILE='VARXS.TXT')
OPEN(40,FILE='M3XS.TXT')
OPEN(50,FILE='COVXS.TXT')
OPEN(60,FILE='COVET.TXT')
OPEN(70,FILE='M3ET.TXT')
OPEN(80,FILE='PFINAL.TXT')
OPEN(90,FILE='INFO.TXT')
!READING FROM FILES
DO 10 I=1,12*(N+1)+1,1
    READ(20,*)P(I)
10 CONTINUE

DO 20 I=1,12,1
    READ(30,*)VARXS(I)
    READ(40,*)M3XS(I)
    READ(50,*)COVXS(I)
20 CONTINUE

DO 30 I=1,K+1,1
    READ(60,*)COVET(I)
30 CONTINUE

READ(70,*)M3ET

CALL FRPRMN(N,K,P,L,VARXS,COVXS,COVET,M3XS,M3ET,FTOL,ITER,FRET,
ITMAX,EPS,TOL)

DO 40 I=1,12*(N+1)+1,1
    WRITE(80,*)P(I)
40 CONTINUE

WRITE(90,*)'minF(X)=' ,FRET
WRITE(90,*)'NUMBER OF INTERATIONS=' ,ITER

CLOSE(20)
CLOSE(30)
CLOSE(40)
CLOSE(50)
CLOSE(60)
CLOSE(70)
CLOSE(80)

```

CLOSE (90)

RETURN
END

Υπορουτίνα βελτιστοποίησης με την μέθοδο των συζυγών κλίσεων

SUBROUTINE FRPRMN (N, K, P, L, VARXS, COVXS, COVET, M3XS, M3ET, FTOL,
ITER, FRET, ITMAX, EPS, TOL)

INTEGER*4 N, K, ITMAX, ITER
REAL*8 P (12* (N+1) +1), L (5), VARXS (12), COVXS (12), COVET (K+1), M3XS (12), M3ET
REAL*8 FRET, FTOL, EPS, TOL
REAL*8 FUNC

INTEGER*4 ITS, J
REAL*8 DGG, FP, GAM, GG, G (12* (N+1) +1), H (12* (N+1) +1), XI (12* (N+1) +1)

FP=FUNC (N, K, P, L, VARXS, COVXS, COVET, M3XS, M3ET)
CALL DFUNC (N, K, P, L, VARXS, COVXS, COVET, M3XS, M3ET, XI)

DO 10 J=1, 12* (N+1) +1, 1
G (J)=-XI (J)
H (J)=G (J)
XI (J)=H (J)
10 CONTINUE

DO 20 ITS=1, ITMAX, 1

ITER=ITS

CALL DLINMIN (N, K, P, L, VARXS, COVXS, COVET, M3XS, M3ET, XI, FRET, TOL)

WRITE (*, *) 'INTERATION:', ITER
WRITE (*, *) 'F (X) =', FRET

!NORMAL RETURN
IF (2.*DABS (FRET-FP) .LE. FTOL* (DABS (FRET) +DABS (FP) +EPS)) THEN
RETURN
ENDIF

FP=FRET
CALL DFUNC (N, K, P, L, VARXS, COVXS, COVET, M3XS, M3ET, XI)
GG=0.
DGG=0.

DO 30 J=1, 12* (N+1) +1, 1
GG=GG+G (J) **2.
! DGG=DGG+XI (J) **2. !FOR FLETCHER-REEVES
DGG=DGG+ (XI (J) +G (J)) *XI (J) !FOR POLAK-RIBIERE
30 CONTINUE
IF (GG.EQ.0.) THEN
RETURN !IF GRADIENT IS EXACTLY ZERO (NOT VERY COMMON)
ENDIF
GAM=DGG/GG
DO 40 J=1, 12* (N+1) +1, 1
G (J)=-XI (J)
H (J)=G (J) +GAM*H (J)
XI (J)=H (J)
40 CONTINUE

20 CONTINUE

PAUSE 'MAXIMUM ITERATIONS OF SUBROUTINE "FRPRMN" EXCEEDED'

```

RETURN
END

```

Υπορουτίνες ελαχιστοποίησης συναρτήσεων μίας μεταβλητής

```

SUBROUTINE DLINMIN(N,K,P,L,VARXS,COVXS,COVET,M3XS,M3ET,XI,FRET,TOL)
INTEGER*4 N,K
REAL*8 P(12*(N+1)+1),L(5),VARXS(12),COVXS(12),COVET(K+1),M3XS(12),M3ET,
XI(12*(N+1)+1)
REAL*8 FRET,TOL

```

```

REAL*8 DBRENT
INTEGER*4 J,NCOM
REAL*8 AX,BX,FA,FB,FX,XMIN,XX,PCOM(12*(N+1)+1),XICOM(12*(N+1)+1)

```

```

AX=0.
XX=1.
CALL MNBRAK(N,K,P,L,VARXS,COVXS,COVET,M3XS,M3ET,XI,AX,XX,BX,FA,FX,FB)
!write(*,*)ax,xx,bx
!write(*,*)fa,fx,fb
FRET=DBRENT(N,K,P,L,VARXS,COVXS,COVET,M3XS,M3ET,XI,AX,XX,BX,TOL,XMIN)
!write(*,*)xmin
DO 10 J=1,12*(N+1)+1,1
    P(J)=P(J)+XMIN*XI(J)
10 CONTINUE
WRITE(*,*)XMIN
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE MNBRAK(N,K,P,L,VARXS,COVXS,COVET,M3XS,M3ET,XI,AX,BX,CX,
FA,FB,FC)
INTEGER*4 N,K
REAL*8 P(12*(N+1)+1),L(5),VARXS(12),COVXS(12),COVET(K+1),M3XS(12),
M3ET,XI(12*(N+1)+1)
REAL*8 AX,BX,CX,FA,FB,FC
REAL*8 GOLD,GLIMIT,TINY

```

```

PARAMETER (GOLD=1.618034, GLIMIT=100., TINY=1.E-10)

```

```

REAL*8 F1DIM
REAL*8 DUM,FU,Q,R,U,ULIM

```

```

FA=F1DIM(N,K,P,L,VARXS,COVXS,COVET,M3XS,M3ET,AX,XI)
FB=F1DIM(N,K,P,L,VARXS,COVXS,COVET,M3XS,M3ET,BX,XI)

```

```

    IF (FB.GT.FA) THEN
        DUM=AX
        AX=BX
        BX=DUM
        DUM=FB
        FB=FA
        FA=DUM
    ENDIF

```

```

CX=BX+GOLD*(BX-AX)
FC=F1DIM(N,K,P,L,VARXS,COVXS,COVET,M3XS,M3ET,CX,XI)
write(*,*)fa,fb,fc
10 CONTINUE

```

```

    IF (FB.GE.FC) THEN
        R=(BX-AX)*(FB-FC)
        Q=(BX-CX)*(FB-FA)

```

```

U=BX- ( (BX-CX) *Q- (BX-AX) *R) / (2.*DSIGN (DMAX1 (DABS (Q-R) , TINY) , Q-R) )
      ULIM=BX+GLIMIT* (CX-BX)
      IF ( (BX-U) * (U-CX) .GT.0.) THEN

FU=F1DIM (N, K, P, L, VARXS, COVXS, COVET, M3XS, M3ET, U, XI)
IF (FU.LT.FC) THEN
AX=BX
FA=FB
BX=U
FB=FU
RETURN
ELSE IF (FU.GT.FB) THEN
CX=U
FC=FU
RETURN
ENDIF
U=CX+GOLD* (CX-BX)
FU=F1DIM (N, K, P, L, VARXS, COVXS, COVET, M3XS, M3ET, U, XI)
      ELSE IF ( (CX-U) * (U-ULIM) .GT.0.) THEN
          FU=F1DIM (N, K, P, L, VARXS, COVXS, COVET, M3XS, M3ET, U, XI)
          IF (FU.LT.FC) THEN
              BX=CX
              CX=U
              U=CX+GOLD* (CX-BX)
              FB=FC
              FC=FU
              FU=F1DIM (N, K, P, L, VARXS, COVXS, COVET, M3XS, M3ET, U, XI)
          ENDIF
          ELSE IF ( (U-ULIM) * (ULIM-CX) .GE.0.) THEN
              U=ULIM
              FU=F1DIM (N, K, P, L, VARXS, COVXS, COVET, M3XS, M3ET, U, XI)
          ELSE
              U=CX+GOLD* (CX-BX)
              FU=F1DIM (N, K, P, L, VARXS, COVXS, COVET, M3XS, M3ET, U, XI)
          ENDIF
              AX=BX
              BX=CX
              CX=U
              FA=FB
              FB=FC
              FC=FU
          GOTO 10
      ENDIF
RETURN
END

```

```

FUNCTION DBRENT (N, K, P, L, VARXS, COVXS, COVET, M3XS, M3ET, XI, AX, BX, CX, TOL,
XMIN)
INTEGER*4 N, K
REAL*8 P (12* (N+1) +1) , L (5) , VARXS (12) , COVXS (12) , COVET (K+1) , M3XS (12) ,
M3ET, XI (12* (N+1) +1)
REAL*8 AX, BX, CX, TOL, XMIN

INTEGER*4 ITMAX
REAL*8 ZEPS
PARAMETER (ITMAX=1000, ZEPS=1.E-20)

REAL*8 F1DIM, DF1DIM, DBRENT
INTEGER*4 ITER
REAL*8 A, B, D, D1, D2, DU, DV, DW, DX, E, FU, FV, FW, FX, OLDE, TOL1, TOL2, U, U1, U2, V,
W, X, XM
LOGICAL OK1, OK2

```

```

A=DMIN1 (AX, CX)
B=DMAX1 (AX, CX)
V=BX
W=V
X=V
E=0.
FX=F1DIM(N, K, P, L, VARXS, COVXS, COVET, M3XS, M3ET, X, XI)
FV=FX
FW=FX
DX=DF1DIM(N, K, P, L, VARXS, COVXS, COVET, M3XS, M3ET, X, XI)
DV=DX
DW=DX

DO 10 ITER=1, ITMAX, 1
    XM=0.5*(A+B)
    TOL1=TOL*DABS(X)+ZEPS
    TOL2=2.*TOL1

    IF(DABS(X-XM).LE.(TOL2-0.5*(B-A)))GOTO 3
    IF(DABS(E).GT.TOL1) THEN
        D1=2.*(B-A)
        D2=D1
        IF(DW.NE.DX) D1=(W-X)*DX/(DX-DW)
        IF(DV.NE.DX) D2=(V-X)*DX/(DX-DV)
        U1=X+D1
        U2=X+D2
        OK1=((A-U1)*(U1-B).GT.0.).AND.(DX*D1.LE.0.)
        OK2=((A-U2)*(U2-B).GT.0.).AND.(DX*D2.LE.0.)
        OLDE=E
        E=D
        IF(.NOT.(OK1.OR.OK2)) THEN
            GOTO 1
        ELSE IF(OK1.AND.OK2) THEN
            IF(DABS(D1).LT.DABS(D2)) THEN
                D=D1
            ELSE
                D=D2
            ENDIF
        ELSE IF(OK1) THEN
            D=D1
        ELSE
            D=D2
        ENDIF
        IF(DABS(D).GT.DABS(0.5*OLDE))GOTO 1
        U=X+D
        IF((U-A.LT.TOL2).OR.(B-U.LT.TOL2))D=DSIGN(TOL1, XM-X)
        GOTO 2
    ENDIF
1 CONTINUE
IF(DX.GE.0.) THEN
E=A-X
ELSE
E=B-X
ENDIF
D=0.5*E
2 CONTINUE
IF(DABS(D).GE.TOL1) THEN
    U=X+D
FU=F1DIM(N, K, P, L, VARXS, COVXS, COVET, M3XS, M3ET, U, XI)
ELSE
    U=X+DSIGN(TOL1, D)
FU=F1DIM(N, K, P, L, VARXS, COVXS, COVET, M3XS, M3ET, U, XI)

```

```

        IF (FU.GT.FX) GOTO 3
    ENDIF
    DU=DF1DIM(N,K,P,L,VARXS,COVXS,COVET,M3XS,M3ET,U,XI)
    IF (FU.LE.FX) THEN
        IF (U.GE.X) THEN
            A=X
            ELSE
            B=X
        ENDIF
        V=W
        FV=FW
        DV=DW
        W=X
        FW=FX
        DW=DX
        X=U
        FX=FU
        DX=DU
        ELSE
        IF (U.LT.X) THEN
            A=U
            ELSE
            B=U
        ENDIF
        IF ((FU.LE.FW).OR.(W.EQ.X)) THEN
            V=W
            FV=FW
            DV=DW
            W=U
            FW=FU
            DW=DU
        ELSE IF ((FU.LE.FV).OR.(V.EQ.X).OR.(V.EQ.W)) THEN
            V=U
            FV=FU
            DV=DU
        ENDIF
    ENDIF
10 CONTINUE
WRITE(*,*) 'SUBROUTINE DBRENT EXCEEDED MAXIMUM ITERATIONS '
3 CONTINUE
XMIN=X
DBRENT=FX

RETURN
END

```

Υπορουτίνες αντικειμενικής συναρτήσεως

```

FUNCTION F1DIM(N,K,P,L,VARXS,COVXS,COVET,M3XS,M3ET,X,XI)
INTEGER*4 N,K
REAL*8
P(12*(N+1)+1),L(5),VARXS(12),COVXS(12),COVET(K+1),M3XS(12),M3ET,X,XI(12
*(N+1)+1)
REAL*8 FUNC,F1DIM

INTEGER*4 J
REAL*8 XT(12*(N+1)+1)

DO 10 J=1,12*(N+1)+1,1
    XT(J)=P(J)+X*XI(J)
10 CONTINUE

```

```

F1DIM=FUNC (N,K,XT,L,VARXS,COVXS,COVET,M3XS,M3ET)

RETURN
END

FUNCTION FUNC (N,K,P,L,VARXS,COVXS,COVET,M3XS,M3ET)
INTEGER*4 N,K
REAL*8 FUNC
REAL*8 P (12*(N+1)+1),L (5),VARXS (12),COVXS (12),COVET (K+1),M3XS (12),M3ET

REAL*8 PFAC (2*N+12,13),NORM (5),XV
INTEGER*4 I

REAL*8 MTH1 (12),MTH2 (12),MTH3 (12),MTH4 (K+1),MTH5

!EXTERNAL SUBROUTINES:KATAT,TH1,TH2,TH3,TH4,TH5

!FILLING NORM WITH ZEROS
DO 10 I=1,5,1
    NORM(I)=0.
10 CONTINUE

! FIXING THE PSMA ARRAY OF FACTORS AND SUMS
CALL KATAT (N,P,PFAC)

!SKEWNESS OF WHITE NOISE
XV=P (12*(N+1)+1)

!CALCULATING NORMA OF VARIANCES
    !CALCULATING MATRIX [è1 (J) -è1] ->(12,1)
    CALL TH1 (N,PFAC,VARXS,MTH1)
    DO 20 I=1,12,1
        NORM(1)=NORM(1)+MTH1 (I) **2.
    20 CONTINUE

!CALCULATING NORMA OF MONTHLY M3
    !CALCULATING MATRIX [è2 (J) -è2] ->(12,1)
    CALL TH2 (N,PFAC,XV,M3XS,MTH2)
    DO 30 I=1,12,1
        NORM(2)=NORM(2)+MTH2 (I) **2.
    30 CONTINUE

!CALCULATING NORMA OF COVARIANCES AMONG MONTHS
    !CALCULATING MATRIX [è3 (J) -è3] ->(12,1)
    CALL TH3 (N,PFAC,COVXS,MTH3)
    DO 40 I=1,12,1
        NORM(3)=NORM(3)+MTH3 (I) **2.
    40 CONTINUE

!CALCULATING NORMA OF COVARIANCES AMONG YEARS
    !CALCULATING MATRIX [è4 (J) -è4] ->(K+1,1)
    CALL TH4 (N,K,PFAC,COVET,MTH4)
    DO 50 I=1,K+1,1
        NORM(4)=NORM(4)+MTH4 (I) **2.
    50 CONTINUE

!CALCULATING NORMA OF YEAR M3
    !CALCULATING [è4 (J) -è4] ->(1,1)
    CALL TH5 (N,PFAC,XV,M3ET,MTH5)
    NORM(5)=DABS (MTH5) **2.

```



```

!CALCULATING VALUE OF FUNC
  FUNC=0.
  DO 60 I=1,5,1
    FUNC=FUNC+L(I)*NORM(I)
  60 CONTINUE

RETURN
END

!SUBROUTINE FOR GENERATING MATRIX PFAC
SUBROUTINE KATAT(N,P,PFAC)
INTEGER*4 N
REAL*8 P(12*(N+1)+1),PFAC(2*N+12,13)

INTEGER*4 I,J

! FILLING PFAC WITH ZEROS
  DO 10 I=1,2*N+12,1
    DO 20 J=1,13,1
      PFAC(I,J)=0.
    20 CONTINUE
  10 CONTINUE

!FIXING PFAC WITH ELLEMENTS
  DO 30 I=1,12,1
    DO 40 J=1,N+1,1
      PFAC(N+J+(I-1),I)=P((I-1)*(N+1)+J)
      PFAC(N-J+I+1,I)=P((I-1)*(N+1)+J)
    40 CONTINUE
  30 CONTINUE

  DO 50 J=1,2*N+12,1
    DO 60 I=1,12,1
      PFAC(J,13)=PFAC(J,13)+PFAC(J,I)
    60 CONTINUE
  50 CONTINUE

RETURN
END

!SUBROUTINE FOR CALCULATION OF MATRIX [ $\epsilon_1(J) - \epsilon_1$ ]->(12,1)
SUBROUTINE TH1(N,PFAC,VARXS,MTH1)
INTEGER*4 N
REAL*8 PFAC(2*N+12,13),VARXS(12)

REAL*8 MTH1(12)
INTEGER*4 I,J

!FILLING MATRIX MTH1 WITH ZEROS
  DO 10 J=1,12,1
    MTH1(J)=0.
  10 CONTINUE

!CALCULATING MATRIX MTH1
  DO 20 J=1,12,1
    DO 30 I=1,2*N+12,1
      MTH1(J)=MTH1(J)+PFAC(I,J)**2.
    30 CONTINUE

```

```

        MTH1 (J)=MTH1 (J)-VARXS (J)
20 CONTINUE

RETURN
END

!SUBROUTINE FOR CALCULATION OF MATRIX [è2 (J)-è2]->(12,1)
SUBROUTINE TH2 (N, PFAC, XV, M3XS, MTH2)
INTEGER*4 N
REAL*8 PFAC (2*N+12, 13), M3XS (12), XV

REAL*8 MTH2 (12)
INTEGER*4 I, J

!FILLING MATRIX MTH2 WITH ZEROS
DO 10 J=1, 12, 1
    MTH2 (J)=0.
10 CONTINUE

!CALCULATING MATRIX MTH2
DO 20 J=1, 12, 1
    DO 30 I=1, 2*N+12, 1
        MTH2 (J)=MTH2 (J)+PFAC (I, J)**3.
    30 CONTINUE
    MTH2 (J)=MTH2 (J)*XV-M3XS (J)
20 CONTINUE

RETURN
END

!SUBROUTINE FOR CALCULATION OF MATRIX [è3 (J)-è3]->(12,1)
SUBROUTINE TH3 (N, PFAC, COVXS, MTH3)
INTEGER*4 N
REAL*8 PFAC (2*N+12, 13), COVXS (12)

REAL*8 MTH3 (12)
INTEGER*4 I, J

!FILLING MATRIX MTH3 WITH ZEROS
DO 10 J=1, 12, 1
    MTH3 (J)=0.
10 CONTINUE

!CALCULATING MATRIX MTH3
DO 20 I=1, 2*N, 1
    MTH3 (1)=MTH3 (1)+PFAC (I+12, 12)*PFAC (I, 1)
20 CONTINUE
MTH3 (1)=MTH3 (1)-COVXS (1)

DO 30 J=2, 12, 1
    DO 40 I=1, 2*N+12, 1
        MTH3 (J)=MTH3 (J)+PFAC (I, J-1)*PFAC (I, J)
    40 CONTINUE
    MTH3 (J)=MTH3 (J)-COVXS (J)
30 CONTINUE

RETURN
END

```

```

!SUBROUTINE FOR CALCULATION OF MATRIX [è4(J)-è4]->(K+1,1)
SUBROUTINE TH4(N,K,PFAC,COVET,MTH4)
INTEGER*4 N,K
REAL*8 PFAC(2*N+12,13),COVET(K+1)

REAL*8 MTH4(K+1)
INTEGER*4 I,J,II

!FILLING MATRIX MTH4 WITH ZEROS
DO 10 J=1,K+1,1
    MTH4(J)=0.
10 CONTINUE

!CALCULATING MATRIX MTH4
II=0
DO 20 I=0,K,1
    II=II+1
    DO 30 J=1,2*N+12-12*I,1
        MTH4(II)=MTH4(II)+PFAC(J+12*I,13)*PFAC(J,13)
    30 CONTINUE
    MTH4(II)=MTH4(II)-COVET(II)
20 CONTINUE

RETURN
END

```

```

!SUBROUTINE FOR CALCULATION OF [è5(J)-è5]->(1,1)
SUBROUTINE TH5(N,PFAC,XV,M3ET,MTH5)
INTEGER*4 N
REAL*8 PFAC(2*N+12,13),M3ET,XV

REAL*8 MTH5
INTEGER*4 I

MTH5=0.

!CALCULATING MTH5
MTH5=0.
DO 10 I=1,2*N+12,1
    MTH5=MTH5+PFAC(I,13)**3.
10 CONTINUE
MTH5=MTH5*XV
MTH5=MTH5-M3ET

RETURN
END

```

Υπορουτίνες υπολογισμού παραγώγου αντικειμενικής συναρτήσεως

```

FUNCTION DF1DIM(N,K,P,L,VARXS,COVXS,COVET,M3XS,M3ET,X,XI)
INTEGER*4 N,K
REAL*8 P(12*(N+1)+1),L(5),VARXS(12),COVXS(12),COVET(K+1),M3XS(12),M3ET,
X,XI(12*(N+1)+1)
REAL*8 DF1DIM

INTEGER*4 J
REAL*8 XT(12*(N+1)+1),DF(12*(N+1)+1)

```

```

DO 10 J=1,12*(N+1)+1,1
      XT(J)=P(J)+X*XI(J)
10 CONTINUE

CALL DFUNC(N,K,XT,L,VARXS,COVXS,COVET,M3XS,M3ET,DF)

DF1DIM=0.
DO 20 J=1,12*(N+1)+1,1
      DF1DIM=DF1DIM+DF(J)*XI(J)
20 CONTINUE

RETURN
END

SUBROUTINE DFUNC(N,K,P,L,VARXS,COVXS,COVET,M3XS,M3ET,DF)
INTEGER*4 N,K
REAL*8P(12*(N+1)+1),DF(12*(N+1)+1),L(5),VARXS(12),COVXS(12),COVET(K+1),
M3XS(12),M3ET

REAL*8 PFAC(2*N+12,13),PFAC1(N+1,12),XV
REAL*8 DNORM1(12*(N+1)+1),DNORM2(12*(N+1)+1),DNORM3(12*(N+1)+1),
DNORM4(12*(N+1)+1)
INTEGER*4 J

REAL*8 P1(12,12*(N+1)+1),P2(12,12*(N+1)+1),P3(12,12*(N+1)+1),
P4(K+1,12*(N+1)+1),P5(12*(N+1)+1)
REAL*8 MTH1(12),MTH2(12),MTH3(12),MTH4(K+1),MTH5

!EXTERNAL
!SUBROUTINES:KATAT,KAT1,CALP1,CALP2,CALP3,CALP4,CALP5,TH1,TH2,TH3,TH4,T
!H5,MULVA

!FILLING DNORM WITH ZEROS
DO 10 J=1,12*(N+1)+1,1
      DNORM1(J)=0.
      DNORM2(J)=0.
      DNORM3(J)=0.
      DNORM4(J)=0.
      DF(J)=0.
10 CONTINUE

! FIXING THE PSMA ARRAY OF FACTORS AND SUMS
CALL KATAT(N,P,PFAC)
CALL KAT1(N,P,PFAC1)

!SKEWNESS OF WHITE NOISE
XV=P(12*(N+1)+1)

!CALCULATING MATRIX P1 (DERIVATIVES OF MONTHLY VARS)
CALL CALP1(N,PFAC1,P1)

!CALCULATING MATRIX P2 (DERIVATIVES OF MONTLY M3)
CALL CALP2(N,XV,PFAC1,P2)

!CALCULATING MATRIX P3 (DERIVATIVES OF MONTHLY COV)
CALL CALP3(N,PFAC1,P3)

!CALCULATING MATRIX P4 (DERIVATIVES OF YEAR AUTOCOV)
CALL CALP4(N,K,PFAC1,P4)

```

```

!CALCULATING VECTOR P5 (DERIVATIVES OF YEAR M3)
CALL CALP5 (N, PFAC1, PFAC, XV, P5)

!CALCULATING MATRIXES MTH1, MTH2, MTH3, MTH4 & VALUE MTH5
CALL TH1 (N, PFAC, VARXS, MTH1)
CALL TH2 (N, PFAC, XV, M3XS, MTH2)
CALL TH3 (N, PFAC, COVXS, MTH3)
CALL TH4 (N, K, PFAC, COVET, MTH4)
CALL TH5 (N, PFAC, XV, M3ET, MTH5)

!CALCULATING VECTOR DF
CALL MULVA (12, 12* (N+1) +1, MTH1, P1, DNORM1)
CALL MULVA (12, 12* (N+1) +1, MTH2, P2, DNORM2)
CALL MULVA (12, 12* (N+1) +1, MTH3, P3, DNORM3)
CALL MULVA (K+1, 12* (N+1) +1, MTH4, P4, DNORM4)

DO 20 J=1, 12* (N+1) +1, 1
DF (J) =2.* (L (1) *DNORM1 (J) +L (2) *DNORM2 (J) +L (3) *DNORM3 (J) +L (4) *DNORM4 (J) +
MTH5*L (5) *P5 (J))

20 CONTINUE

!DF (12* (N+1) +1) =DF (12* (N+1) +1) +2.* (XV-3.5) *100000000.
RETURN
END

!SUBROUTINE FOR PLACING PSMA FACTORS
SUBROUTINE KAT1 (N, P, PFAC1)
INTEGER*4 N
REAL*8 P (12* (N+1) +1), PFAC1 (N+1, 12)

INTEGER*4 I, J

!CALCULATING MATRIX PFAC1
DO 10 I=1, 12, 1
DO 20 J=1, N+1, 1
PFAC1 (J, I) =P ((I-1) * (N+1) +J)
20 CONTINUE
10 CONTINUE

RETURN
END

!SUBROUTINE FOR CALCULATING MATRIX P1 (DERIVATIVES OF MONTHLY VARS)
SUBROUTINE CALP1 (N, PFAC1, P1)
INTEGER*4 N
REAL*8 PFAC1 (N+1, 12), P1 (12, 12* (N+1) +1)

INTEGER*4 I, J, K

!FILLING P1 WITH ZEROS
DO 10 I=1, 12, 1
DO 20 J=1, 12* (N+1) +1, 1
P1 (I, J) =0.
20 CONTINUE
10 CONTINUE

!CALCULATING MATRIX P1->[12, 12* (N+1) +1]

```

```

DO 30 I=1,12,1
  DO 40 K=0,N,1
    J=(I-1)*(N+1)+1+K
    IF(K.EQ.0) THEN
      P1(I,J)=2.*PFAC1(K+1,I)
    ENDIF
    IF(K.GT.0) THEN
      P1(I,J)=4.*PFAC1(K+1,I)
    ENDIF
  40 CONTINUE
30 CONTINUE

RETURN
END

!SUBROUTINE FOR CALCULATING MATRIX P2 (DERIVATIVES OF MONTHLY M3)
SUBROUTINE CALP2(N,XV,PFAC1,P2)
INTEGER*4 N
REAL*8 PFAC1(N+1,12),P2(12,12*(N+1)+1),XV

INTEGER*4 I,J,K

!FILLING P2 WITH ZEROS
DO 10 I=1,12,1
  DO 20 J=1,12*(N+1)+1,1
    P2(I,J)=0.
  20 CONTINUE
10 CONTINUE

!CALCULATING MATRIX P2->[12,12*(N+1)+1]
DO 30 I=1,12,1
  DO 40 K=0,N,1
    J=(I-1)*(N+1)+1+K
    IF(K.EQ.0) THEN
      P2(I,J)=3.*XV*PFAC1(K+1,I)**2.
    ENDIF
    IF(K.GT.0) THEN
      P2(I,J)=6.*XV*PFAC1(K+1,I)**2.
    ENDIF
  40 CONTINUE
30 CONTINUE

DO 50 I=1,12,1
  P2(I,12*(N+1)+1)=PFAC1(1,I)**3.
  DO 60 J=2,N+1,1
    P2(I,12*(N+1)+1)=P2(I,12*(N+1)+1)+2.*PFAC1(J,I)**3.
  60 CONTINUE
50 CONTINUE

RETURN
END

!SUBROUTINE FOR CALCULATING MATRIX P3 (DERIVATIVES OF MONTHLY COV)
SUBROUTINE CALP3(N,PFAC1,P3)
INTEGER*4 N
REAL*8 PFAC1(N+1,12),P3(12,12*(N+1)+1)

INTEGER*4 I,J,K

```

```

!FILLING P3 WITH ZEROS
DO 10 I=1,12,1
    DO 20 J=1,12*(N+1)+1,1
        P3(I,J)=0.
    20 CONTINUE
10 CONTINUE

!CALCULATING MATRIX P3->[12,12*(N+1)+1]

!FIRST ROW OF THE MATRIX
DO 30 J=1,N+1,1
    IF(N-J.GE.0) THEN
        P3(1,J)=P3(1,J)+PFAC1(J+1,12)
    ENDIF
    IF(J-2.GE.0) THEN
        P3(1,J)=P3(1,J)+PFAC1(IABS(J-2)+1,12)
    ENDIF
30 CONTINUE

DO 40 J=11*(N+1)+1,12*(N+1),1
    K=J-11*(N+1)
    IF(N-K.GE.0) THEN
        P3(1,J)=P3(1,J)+PFAC1(K+1,1)
    ENDIF
    IF(K-2.GE.0) THEN
        P3(1,J)=P3(1,J)+PFAC1(IABS(K-2)+1,1)
    ENDIF
40 CONTINUE

!NEXT ROWS OF THE MATRIX
DO 50 I=2,12,1
    DO 60 J=(I-2)*(N+1)+1,(I-1)*(N+1),1
        K=J-(I-2)*(N+1)
        IF(N-K.GE.0) THEN
            P3(I,J)=P3(I,J)+PFAC1(K+1,I)
        ENDIF
        IF(K-2.GE.0) THEN
            P3(I,J)=P3(I,J)+PFAC1(IABS(K-2)+1,I)
        ENDIF
    60 CONTINUE

    DO 70 J=(I-1)*(N+1)+1,I*(N+1),1
        K=J-(I-1)*(N+1)
        IF(N-K.GE.0) THEN
            P3(I,J)=P3(I,J)+PFAC1(K+1,I-1)
        ENDIF
        IF(K-2.GE.0) THEN
            P3(I,J)=P3(I,J)+PFAC1(IABS(K-2)+1,I-1)
        ENDIF
    70 CONTINUE
50 CONTINUE

RETURN
END

!SUBROUTINE FOR CALCULATING MATRIX P4 (DERIVATIVES OF YEAR AUTOCOV)
SUBROUTINE CALP4(N,Z,PFAC1,P4)
INTEGER*4 N,Z
REAL*8 PFAC1(N+1,12),P4(Z+1,12*(N+1)+1)

INTEGER*4 I,J,S,K,L

```

```

!FILLING P4 WITH ZEROS
DO 10 I=1,Z+1,1
  DO 20 J=1,12*(N+1)+1,1
    P4(I,J)=0.
  20 CONTINUE
10 CONTINUE

!CALCULATING MATRIX P4->[Z+1,12*(N+1)+1]
DO 30 I=0,Z,1
  DO 40 S=1,12,1
    DO 50 K=0,N,1
      J=(S-1)*(N+1)+K+1
      DO 60 L=1,12,1
        IF(N-IABS(12*I-S+K+L).GE.0) THEN

          P4(I+1,J)=P4(I+1,J)+PFAC1(IABS(12*I-S+K+L)+1,L)
          ENDIF
          IF(N-IABS(12*I-S-K+L).GE.0) THEN

          P4(I+1,J)=P4(I+1,J)+PFAC1(IABS(12*I-S-K+L)+1,L)
          ENDIF
          IF(N-IABS(12*I+S-K-L).GE.0) THEN

          P4(I+1,J)=P4(I+1,J)+PFAC1(IABS(12*I+S-K-L)+1,L)
          ENDIF
          IF(N-IABS(12*I+S+K-L).GE.0) THEN

          P4(I+1,J)=P4(I+1,J)+PFAC1(IABS(12*I+S+K-L)+1,L)
          ENDIF

          60 CONTINUE
          IF(K.EQ.0) THEN
            P4(I+1,J)=P4(I+1,J)/2.
          ENDIF
        50 CONTINUE
      40 CONTINUE
    30 CONTINUE

RETURN
END

```

```

!SUBROUTINE FOR CALCULATING VECTOR P5 (DERIVATIVES OF YEAR M3)
SUBROUTINE CALP5(N,PFAC1,PFAC,XV,P5)
INTEGER*4 N
REAL*8 PFAC1(N+1,12),PFAC(2*N+12,13),XV,P5(12*(N+1)+1)

INTEGER*4 I,S,K,J
REAL*8 SUM1,SUM2

!FILLING P5 WITH ZEROS
DO 10 I=1,12*(N+1)+1,1
  P5(I)=0.
10 CONTINUE

!CALCULATING VECTOR P5->(1,12*(N+1)+1)
DO 20 S=1,12,1
  DO 30 K=0,N,1
    J=(S-1)*(N+1)+K+1
    SUM1=0.
    SUM2=0.
    DO 40 I=1,12,1

```



```

                IF (N-IABS (K-S+I) .GE. 0) THEN
                    SUM1=SUM1+PFAC1 (IABS (K-S+I)+1, I)
                ENDIF
                IF (N-IABS (K+S-I) .GE. 0) THEN
                    SUM2=SUM2+PFAC1 (IABS (K+S-I)+1, I)
                ENDIF
            40 CONTINUE
            P5 (J)=3.*XV*(SUM1**2.+SUM2**2.)
            IF (K.EQ. 0) THEN
                P5 (J)=P5 (J) /2.
            ENDIF
        30 CONTINUE
    20 CONTINUE

DO 50 I=1, 2*N+12, 1
    P5 (12*(N+1)+1)=P5 (12*(N+1)+1)+PFAC (I, 13) **3.
50 CONTINUE

RETURN
END

```

Υπορουτίνα πολλαπλασιασμού πίνακα με διάνυσμα

```

SUBROUTINE MULVA (K, N, X, A, Y)
INTEGER*4 K, N
REAL*8 X (K), A (K, N), Y (N)

INTEGER I, J
REAL*8 SUM

DO 10 J=1, N, 1
    SUM=0.
    DO 20 I=1, K, 1
        SUM=SUM+X (I) *A (I, J)
    20 CONTINUE
    Y (J)=SUM
10 CONTINUE

RETURN
END

```

Αρχείο Δεδομένων PARAMETERS .TXT

```

NUMBER OF PSMA FACTORS (q)
*****
120
NUMBER OF YEAR COVARIANCES TO PRESERVE
*****
19
MAXIMUM NUMBER OF ITERATIONS
*****
200
CONVERGENCE TOLERANCE OF THE OBJECTIVE FUNCTION
*****
1.e-20
TOLERANCE FOR LINE MINIMIZATION
*****
1.e-20

```

```

CASE OF CONVERGING TO EXACTLY ZERO FUNCTION VALUE
*****
1.E-10
OBJECTIVE FUNCTION WEIGHT FOR MONTHLY VARIANCES
*****
1
OBJECTIVE FUNCTION WEIGHT FOR MONTHLY BASED SKEWNESS
*****
1
OBJECTIVE FUNCTION WEIGHT FOR LAG 1 COVARIANCE
*****
1
OBJECTIVE FUNCTION WEIGHT FOR HURST COVARIANCES
*****
1
OBJECTIVE FUNCTION WEIGHT FOR YEAR BASED SKEWNESS
*****
1

```

ΣΤ.2 Πρόγραμμα βελτιστοποίησης παραμέτρων μοντέλου PPSMA

Λειτουργία προγράμματος

Αρχικά τοποθετούμε στο αρχείο PARAMETERS.TXT τα απαραίτητα δεδομένα για την βελτιστοποίηση των παραμέτρων του μοντέλου². Στην συνέχεια τοποθετούμε στα αρχεία VARXS.TXT, COVXS.TXT, M3XS.TXT, M3ET.TXT και COVET.TXT, τα στατιστικά χαρακτηριστικά του ιστορικού δείγματος που θέλουμε να αναπαράγουμε συνθετικά, καθ' όμοιο τρόπο με αυτόν που περιγράφηκε στην ενότητα ΣΤ.1. Ακολούθως τοποθετούμε στο αρχείο PARMINI.TXT το αρχικό διάνυσμα $\beta = [\beta_0^1, \beta_1^1, \dots, \beta_d^1, \beta_0^2, \beta_1^2, \dots, \beta_d^2, \dots, \dots, \beta_0^{12}, \beta_1^{12}, \dots, \beta_d^{12}, \zeta_v]^T$ διαστάσεως $12(d+1)+1$, του οποίου τα στοιχεία λαμβάνονται τυχαία. Υπενθυμίζεται ότι το πρόγραμμα κάνει την παραδοχή ότι $d = 48$ και $c = 24$ (βλέπε ενότητα Α.2), οπότε το διάνυσμα β έχει 589 στοιχεία.

Μετά την εκτέλεσή του, το πρόγραμμα παράγει το αρχείο PARMFIN.TXT το οποίο περιέχει τις βελτιστοποιημένες παραμέτρους β_l^s ($l = 0, \dots, 48$ και $s = 1, \dots, 12$) της μαθηματικής εκφράσεως (Α.1), το αρχείο PFINAL.TXT το οποίο περιέχει το διάνυσμα $\zeta = [a_0^1, a_1^1, \dots, a_q^1, a_0^2, a_1^2, \dots, a_q^2, \dots, \dots, a_0^k, a_1^k, \dots, a_q^k, \zeta_v]^T$ που προκύπτει για το βελτιστοποιημένο διάνυσμα β συναρτήσεως της μαθηματικής εκφράσεως (Α.1) και το αρχείο INFO.TXT το οποίο περιέχει τον αριθμό των επαναλήψεων που απαιτήθηκαν για την βελτιστοποίηση, καθώς και την τιμή της αντικειμενικής συναρτήσεως που επιτεύχθηκε. Στην συνέχεια παρουσιάζεται ο κώδικας, σε γλώσσα Fortran, του

² στο τέλος της ενότητας ΣΤ.2 παρατίθεται η μορφή του εν λόγω αρχείου

προγράμματος βελτιστοποίησης των παραμέτρων της μαθηματικής εκφράσεως (A.1), του μοντέλου PPSMA.

Κυρίως πρόγραμμα

```
PROGRAM PPSMA
INTEGER*4 N,K,ITMAX
REAL*8 FTOL,EPS,TOL,L(5)

OPEN(10,FILE='PARAMETERS.TXT')

READ(10,*)
READ(10,*)
READ(10,*)N
READ(10,*)
READ(10,*)
READ(10,*)K
READ(10,*)
READ(10,*)
READ(10,*)ITMAX
READ(10,*)
READ(10,*)
READ(10,*)FTOL
READ(10,*)
READ(10,*)
READ(10,*)TOL
READ(10,*)
READ(10,*)EPS
READ(10,*)
READ(10,*)
READ(10,*)L(1)
READ(10,*)
READ(10,*)
READ(10,*)L(2)
READ(10,*)
READ(10,*)
READ(10,*)L(3)
READ(10,*)
READ(10,*)
READ(10,*)L(4)
READ(10,*)
READ(10,*)
READ(10,*)L(5)

CALL MATR(N,K,ITMAX,FTOL,EPS,TOL,L)

CLOSE(10)

STOP
END
```

Υπορουτίνα που καλεί την υπορουτίνα βελτιστοποίησης

```
SUBROUTINE MATR(N,K,ITMAX,FTOL,EPS,TOL,L)
INTEGER*4 N,K,ITMAX
REAL*8 FTOL,EPS,TOL,L(5)

REAL*8 P(12*(N+1)+1),VARXS(12),COVXS(12),COVET(K+1),M3XS(12),M3ET,FRET
INTEGER*4 I,ITER,NPAR
```

```

PARAMETER (NPAR=589)
REAL*8 PARAM(NPAR)

OPEN (20, FILE=' PARMINI. TXT ')
OPEN (30, FILE=' VARXS. TXT ')
OPEN (40, FILE=' M3XS. TXT ')
OPEN (50, FILE=' COVXS. TXT ')
OPEN (60, FILE=' COVET. TXT ')
OPEN (70, FILE=' M3ET. TXT ')
OPEN (80, FILE=' PFINAL. TXT ')
OPEN (85, FILE=' PARMFIN. TXT ')
OPEN (90, FILE=' INFO. TXT ')
!READING FROM FILES

DO 10 I=1, NPAR, 1
    READ (20, *) PARAM(I)
10 CONTINUE

DO 20 I=1, 12, 1
    READ (30, *) VARXS(I)
    READ (40, *) M3XS(I)
    READ (50, *) COVXS(I)
20 CONTINUE

DO 30 I=1, K+1, 1
    READ (60, *) COVET(I)
30 CONTINUE

READ (70, *) M3ET

!DO 35 I=1, ITMAX, 1

CALL
FRPRMN (N, K, NPAR, PARAM, L, VARXS, COVXS, COVET, M3XS, M3ET, FTOL, ITER, FRET, ITMA
X, EPS, TOL)
WRITE (*, *) I
35 CONTINUE

!WRITING PARAMETERS
DO 40 I=1, NPAR, 1
    WRITE (85, *) PARAM(I)
40 CONTINUE

!PRODUCTING FACTORS FROM PARAMETERS
CALL PARTOP (NPAR, PARAM, N, P)

!WRITTING FACTORS
DO 50 I=1, 12*(N+1)+1, 1
    WRITE (80, *) P(I)
50 CONTINUE

WRITE (90, *) 'minF(X)=', FRET
WRITE (90, *) 'NUMBER OF INTERATIONS=', ITER

CLOSE (20)
CLOSE (30)
CLOSE (40)
CLOSE (50)
CLOSE (60)
CLOSE (70)
CLOSE (80)
CLOSE (85)
CLOSE (90)

```

```
RETURN
END
```

Υπορουτίνα βελτιστοποίησης με την μέθοδο των συζυγών κλίσεων

```
SUBROUTINE FRPRMN(N,K,NPAR,PARAM,L,VARXS,COVXS,COVET,M3XS,M3ET,FTOL,
ITER,FRET,ITMAX,EPS,TOL)
INTEGER*4 N,K,NPAR,ITMAX,ITER
REAL*8 PARAM(NPAR),L(5),VARXS(12),COVXS(12),COVET(K+1),M3XS(12),M3ET
REAL*8 FRET,FTOL,EPS,TOL
REAL*8 FUNC

INTEGER*4 ITS,J,FLAG
REAL*8 DGG,FP,GAM,GG,G(NPAR),H(NPAR),XI(NPAR)
REAL*8 P(12*(N+1)+1),DF(12*(N+1)+1),CHAN(12*(N+1)+1,NPAR)

!PRODUCTING FACTORS FROM PARAMETERS
CALL PARTOP(NPAR,PARAM,N,P)

!CALCULATING OBJECTIVE FUNCTION
FP=FUNC(N,K,P,L,VARXS,COVXS,COVET,M3XS,M3ET)

!CALCULATING VECTOR OF DERIVATIVES (FACTORS)
CALL DFUNC(N,K,P,L,VARXS,COVXS,COVET,M3XS,M3ET,DF)

!CALCULATING MATRIX FOR CONVERTING DERIVATIVES
CALL CHANDE(NPAR,PARAM,N,CHAN)

!MULTIPLICATION OF VECTOR WITH AN ARRAY
CALL MULVA(12*(N+1)+1,NPAR,DF,CHAN,XI)

DO 10 J=1,NPAR,1
    G(J)=-XI(J)
    H(J)=G(J)
    XI(J)=H(J)
10 CONTINUE

DO 20 ITS=1,ITMAX,1
    ! DO 20 ITS=1,20,1

        ITER=ITS

        CALL DLINMIN(N,K,NPAR,PARAM,L,VARXS,COVXS,COVET,M3XS,M3ET,XI,
FRET,TOL,FLAG)

        WRITE(*,*)'INTERATION:',ITER
        WRITE(*,*)'F(X)=' ,FRET

            !NORMAL RETURN
            ! IF(2.*DABS(FRET-FP).LE.FTOL*(DABS(FRET)+DABS(FP)+EPS)) THEN
            ! RETURN
            ! ENDDIF
            IF(FLAG.EQ.1) THEN
                RETURN
            ENDDIF

        FP=FRET

        !CALCULATING DERIVATIVE
        CALL PARTOP(NPAR,PARAM,N,P)
```

```

CALL DFUNC(N,K,P,L,VARXS,COVXS,COVET,M3XS,M3ET,DF)
CALL CHANDE(NPAR,PARAM,N,CHAN)
CALL MULVA(12*(N+1)+1,NPAR,DF,CHAN,XI)

GG=0.
DGG=0.
DO 30 J=1,NPAR,1
  GG=GG+G(J)**2.
  ! DGG=DGG+XI(J)**2. !FOR FLETCHER-REEVES
  DGG=DGG+(XI(J)+G(J))*XI(J) !FOR POLAK-RIBIERE
30 CONTINUE
IF(GG.EQ.0.)THEN
  RETURN !IF GRADIENT IS EXACTLY ZERO (NOT VERY COMMON)
ENDIF
GAM=DGG/GG
DO 40 J=1,NPAR,1
  G(J)=-XI(J)
  H(J)=G(J)+GAM*H(J)
  XI(J)=H(J)
40 CONTINUE
20 CONTINUE

!PAUSE 'MAXIMUM ITERATIONS OF SUBROUTINE "FRPRMN" EXCEEDED'
RETURN
END

```

Υπορουτίνες ελαχιστοποιήσεως συναρτήσεων μίας μεταβλητής

```

SUBROUTINE DLINMIN(N,K,NPAR,PARAM,L,VARXS,COVXS,COVET,M3XS,M3ET,XI,
FRET,TOL,FLAG)
INTEGER*4 N,K,NPAR,FLAG
REAL*8 PARAM(NPAR),L(5),VARXS(12),COVXS(12),COVET(K+1),M3XS(12),M3ET,
XI(NPAR)
REAL*8 FRET,TOL
REAL*8 DBRENT
INTEGER*4 J
REAL*8 AX,BX,FA,FB,FX,XMIN,XX
AX=0.
XX=1.
CALL MNBRAK(N,K,NPAR,PARAM,L,VARXS,COVXS,COVET,M3XS,M3ET,XI,AX,XX,BX,
FA,FX,FB)
!write(*,*)ax,xx,bx
!write(*,*)fa,fx,fb
FRET=DBRENT(N,K,NPAR,PARAM,L,VARXS,COVXS,COVET,M3XS,M3ET,XI,AX,XX,BX,
TOL,XMIN)

FLAG=0
IF(XMIN.EQ.0.)THEN
FLAG=1
RETURN
ENDIF

DO 10 J=1,NPAR,1
PARAM(J)=PARAM(J)+XMIN*XI(J)
10 CONTINUE

WRITE(*,*)XMIN

RETURN
END

```

```

SUBROUTINE MNBRAK (N, K, NPAR, PARAM, L, VARXS, COVXS, COVET, M3XS, M3ET, XI, AX,
BX, CX, FA, FB, FC)
INTEGER*4 N, K, NPAR
REAL*8 PARAM (NPAR), L (5), VARXS (12), COVXS (12), COVET (K+1), M3XS (12), M3ET,
XI (NPAR)
REAL*8 AX, BX, CX, FA, FB, FC
REAL*8 GOLD, GLIMIT, TINY

PARAMETER (GOLD=1.618034, GLIMIT=100., TINY=1.E-10)

REAL*8 F1DIM
REAL*8 DUM, FU, Q, R, U, ULIM

FA=F1DIM(N, K, NPAR, PARAM, L, VARXS, COVXS, COVET, M3XS, M3ET, AX, XI)
FB=F1DIM(N, K, NPAR, PARAM, L, VARXS, COVXS, COVET, M3XS, M3ET, BX, XI)

IF (FB.GT.FA) THEN
    DUM=AX
    AX=BX
    BX=DUM
    DUM=FB
    FB=FA
    FA=DUM
ENDIF
CX=BX+GOLD*(BX-AX)
FC=F1DIM(N, K, NPAR, PARAM, L, VARXS, COVXS, COVET, M3XS, M3ET, CX, XI)

write(*,*) fa, fb, fc

10 CONTINUE
IF (FB.GE.FC) THEN
    R= (BX-AX) * (FB-FC)
    Q= (BX-CX) * (FB-FA)
    U=BX- ( (BX-CX) *Q- (BX-AX) *R) / (2.*DSIGN (DMAX1 (DABS (Q-R), TINY), Q-R))
    ULIM=BX+GLIMIT*(CX-BX)
    IF ( (BX-U) * (U-CX) .GT.0.) THEN
        FU=F1DIM(N, K, NPAR, PARAM, L, VARXS, COVXS, COVET, M3XS, M3ET, U, XI)
        IF (FU.LT.FC) THEN
            AX=BX
            FA=FB
            BX=U
            FB=FU
            RETURN
        ELSE IF (FU.GT.FB) THEN
            CX=U
            FC=FU
            RETURN
        ENDIF
        U=CX+GOLD*(CX-BX)
        FU=F1DIM(N, K, NPAR, PARAM, L, VARXS, COVXS, COVET, M3XS, M3ET, U, XI)
    ELSE IF ( (CX-U) * (U-ULIM) .GT.0.) THEN
        FU=F1DIM(N, K, NPAR, PARAM, L, VARXS, COVXS, COVET, M3XS, M3ET, U, XI)
        IF (FU.LT.FC) THEN
            BX=CX
            CX=U
            U=CX+GOLD*(CX-BX)
            FB=FC
            FC=FU
            FU=F1DIM(N, K, NPAR, PARAM, L, VARXS, COVXS, COVET, M3XS, M3ET, U, XI)

```

```

ENDIF
ELSE IF ( (U-ULIM) * (ULIM-CX) .GE.0.) THEN
U=ULIM
FU=F1DIM(N,K,NPAR,PARAM,L,VARXS,COVXS,COVET,M3XS,M3ET,U,XI)
ELSE
U=CX+GOLD*(CX-BX)
FU=F1DIM(N,K,NPAR,PARAM,L,VARXS,COVXS,COVET,M3XS,M3ET,U,XI)
ENDIF
AX=BX
BX=CX
CX=U
FA=FB
FB=FC
FC=FU
GOTO 10
ENDIF
RETURN
END

```

```

FUNCTION DBRENT(N,K,NPAR,PARAM,L,VARXS,COVXS,COVET,M3XS,M3ET,XI,AX,BX,
CX,TOL,XMIN)
INTEGER*4 N,K,NPAR
REAL*8 PARAM(NPAR),L(5),VARXS(12),COVXS(12),COVET(K+1),M3XS(12),M3ET,
XI(NPAR)
REAL*8 AX,BX,CX,TOL,XMIN

INTEGER*4 ITMAX
REAL*8 ZEPS
PARAMETER (ITMAX=1000,ZEPS=1.E-20)

REAL*8 F1DIM,DF1DIM,DBRENT
INTEGER*4 ITER
REAL*8 A,B,D,D1,D2,DU,DV,DW,DX,E,FU,FV,FW,FX,OLDE,TOL1,TOL2,U,U1,U2,
V,W,X,XM
LOGICAL OK1,OK2

```

```

A=DMIN1(AX,CX)
B=DMAX1(AX,CX)
V=BX
W=V
X=V
E=0.
FX=F1DIM(N,K,NPAR,PARAM,L,VARXS,COVXS,COVET,M3XS,M3ET,X,XI)
FV=FX
FW=FX
DX=DF1DIM(N,K,NPAR,PARAM,L,VARXS,COVXS,COVET,M3XS,M3ET,X,XI)
DV=DX
DW=DX

```

```

DO 10 ITER=1,ITMAX,1
XM=0.5*(A+B)
TOL1=TOL*DABS(X)+ZEPS
TOL2=2.*TOL1

IF(DABS(X-XM).LE.(TOL2-0.5*(B-A)))GOTO 3
IF(DABS(E).GT.TOL1) THEN
D1=2.*(B-A)
D2=D1
IF(DW.NE.DX) D1=(W-X)*DX/(DX-DW)
IF(DV.NE.DX) D2=(V-X)*DX/(DX-DV)

```



```

        U1=X+D1
        U2=X+D2
        OK1= (( (A-U1) * (U1-B) .GT.0. ) .AND. (DX*D1 .LE.0. ) )
        OK2= (( (A-U2) * (U2-B) .GT.0. ) .AND. (DX*D2 .LE.0. ) )
        OLDE=E
        E=D
        IF (.NOT. (OK1 .OR. OK2) ) THEN
            GOTO 1
        ELSE IF (OK1 .AND. OK2) THEN
            IF (DABS (D1) .LT. DABS (D2) ) THEN
                D=D1
            ELSE
                D=D2
            ENDIF
        ELSE IF (OK1) THEN
            D=D1
        ELSE
            D=D2
        ENDIF
        IF (DABS (D) .GT. DABS (0.5*OLDE) ) GOTO 1
        U=X+D
        IF ((U-A .LT. TOL2) .OR. (B-U .LT. TOL2) ) D=DSIGN (TOL1, XM-X)
        GOTO 2
    ENDIF
1 CONTINUE
IF (DX .GE. 0. ) THEN
    E=A-X
ELSE
    E=B-X
ENDIF
D=0.5*E
2 CONTINUE
IF (DABS (D) .GE. TOL1) THEN
    U=X+D

FU=F1DIM (N, K, NPAR, PARAM, L, VARXS, COVXS, COVET, M3XS, M3ET, U, XI)
ELSE
    U=X+DSIGN (TOL1, D)

FU=F1DIM (N, K, NPAR, PARAM, L, VARXS, COVXS, COVET, M3XS, M3ET, U, XI)
IF (FU .GT. FX) GOTO 3
ENDIF
DU=DF1DIM (N, K, NPAR, PARAM, L, VARXS, COVXS, COVET, M3XS, M3ET, U, XI)
IF (FU .LE. FX) THEN
    IF (U .GE. X) THEN
        A=X
    ELSE
        B=X
    ENDIF
    V=W
    FV=FW
    DV=DW
    W=X
    FW=FX
    DW=DX
    X=U
    FX=FU
    DX=DU
    ELSE
        IF (U .LT. X) THEN
            A=U
        ELSE
            B=U

```

```

                                ENDIF
                                IF ( (FU.LE.FW) .OR. (W.EQ.X) ) THEN
                                    V=W
                                    FV=FW
                                    DV=DW
                                    W=U
                                    FW=FU
                                    DW=DU
                                ELSE IF ( (FU.LE.FV) .OR. (V.EQ.X) .OR. (V.EQ.W) ) THEN
                                    V=U
                                    FV=FU
                                    DV=DU
                                ENDIF
                                ENDIF
                                10 CONTINUE
WRITE (*,*) 'SUBROUTINE DBRENT EXCEEDED MAXIMUM ITERATIONS '
3 CONTINUE
XMIN=X
DBRENT=FX

RETURN
END

```

Υπορουτίνες αντικειμενικής συναρτήσεως

```

FUNCTION F1DIM(N,K,NPAR,PARAM,L,VARXS,COVXS,COVET,M3XS,M3ET,X,XI)
INTEGER*4 N,K,NPAR
REAL*8 PARAM(NPAR),L(5),VARXS(12),COVXS(12),COVET(K+1),M3XS(12),
M3ET,X,XI(NPAR)
REAL*8 FUNC,F1DIM

INTEGER*4 J
REAL*8 XT(NPAR),P(12*(N+1)+1)

DO 10 J=1,NPAR,1
    XT(J)=PARAM(J)+X*XI(J)
10 CONTINUE

CALL PARTOP(NPAR,XT,N,P)
F1DIM=FUNC(N,K,P,L,VARXS,COVXS,COVET,M3XS,M3ET)

RETURN
END

```

```

FUNCTION FUNC(N,K,P,L,VARXS,COVXS,COVET,M3XS,M3ET)
INTEGER*4 N,K
REAL*8 FUNC
REAL*8 P(12*(N+1)+1),L(5),VARXS(12),COVXS(12),COVET(K+1),M3XS(12),M3ET

REAL*8 PFAC(2*N+12,13),NORM(5),XV
INTEGER*4 I

REAL*8 MTH1(12),MTH2(12),MTH3(12),MTH4(K+1),MTH5

!EXTERNAL SUBROUTINES:KATAT,TH1,TH2,TH3,TH4,TH5

!FILLING NORM WITH ZEROS
DO 10 I=1,5,1
    NORM(I)=0.
10 CONTINUE

```

```

! FIXING THE PSMA ARRAY OF FACTORS AND SUMS
CALL KATAT(N,P,PFAC)

!SKEWNESS OF WHITE NOISE
XV=P(12*(N+1)+1)

!CALCULATING NORMA OF VARIANCES
!CALCULATING MATRIX [è1(J)-è1]->(12,1)
CALL TH1(N,PFAC,VARXS,MTH1)
DO 20 I=1,12,1
    NORM(1)=NORM(1)+MTH1(I)**2.
20 CONTINUE

!CALCULATING NORMA OF MONTHLY M3
!CALCULATING MATRIX [è2(J)-è2]->(12,1)
CALL TH2(N,PFAC,XV,M3XS,MTH2)
DO 30 I=1,12,1
    NORM(2)=NORM(2)+MTH2(I)**2.
30 CONTINUE

!CALCULATING NORMA OF COVARIANCES AMONG MONTHS
!CALCULATING MATRIX [è3(J)-è3]->(12,1)
CALL TH3(N,PFAC,COVXS,MTH3)
DO 40 I=1,12,1
    NORM(3)=NORM(3)+MTH3(I)**2.
40 CONTINUE

!CALCULATING NORMA OF COVARIANCES AMONG YEARS
!CALCULATING MATRIX [è4(J)-è4]->(K+1,1)
CALL TH4(N,K,PFAC,COVET,MTH4)
DO 50 I=1,K+1,1
    NORM(4)=NORM(4)+MTH4(I)**2.
50 CONTINUE

!CALCULATING NORMA OF YEAR M3
!CALCULATING [è4(J)-è4]->(1,1)
CALL TH5(N,PFAC,XV,M3ET,MTH5)
NORM(5)=DABS(MTH5)**2.

!CALCULATING VALUE OF FUNC
FUNC=0.
DO 60 I=1,5,1
    FUNC=FUNC+L(I)*NORM(I)
60 CONTINUE

RETURN
END

!SUBROUTINE FOR GENERATING MATRIX PFAC
SUBROUTINE KATAT(N,P,PFAC)
INTEGER*4 N
REAL*8 P(12*(N+1)+1),PFAC(2*N+12,13)

INTEGER*4 I,J

! FILLING PFAC WITH ZEROS
DO 10 I=1,2*N+12,1
    DO 20 J=1,13,1
        PFAC(I,J)=0.
20 CONTINUE

```

```

10 CONTINUE

!FIXING PFAC WITH ELLEMENTS
DO 30 I=1,12,1
  DO 40 J=1,N+1,1
    PFAC(N+J+(I-1),I)=P((I-1)*(N+1)+J)
    PFAC(N-J+I+1,I)=P((I-1)*(N+1)+J)
  40 CONTINUE
30 CONTINUE

DO 50 J=1,2*N+12,1
  DO 60 I=1,12,1
    PFAC(J,13)=PFAC(J,13)+PFAC(J,I)
  60 CONTINUE
50 CONTINUE

RETURN
END

!SUBROUTINE FOR CALCULATION OF MATRIX [è1(J)-è1]->(12,1)
SUBROUTINE TH1(N,PFAC,VARXS,MTH1)
INTEGER*4 N
REAL*8 PFAC(2*N+12,13),VARXS(12)

REAL*8 MTH1(12)
INTEGER*4 I,J

!FILLING MATRIX MTH1 WITH ZEROS
DO 10 J=1,12,1
  MTH1(J)=0.
10 CONTINUE

!CALCULATING MATRIX MTH1
DO 20 J=1,12,1
  DO 30 I=1,2*N+12,1
    MTH1(J)=MTH1(J)+PFAC(I,J)**2.
  30 CONTINUE
  MTH1(J)=MTH1(J)-VARXS(J)
20 CONTINUE

RETURN
END

!SUBROUTINE FOR CALCULATION OF MATRIX [è2(J)-è2]->(12,1)
SUBROUTINE TH2(N,PFAC,XV,M3XS,MTH2)
INTEGER*4 N
REAL*8 PFAC(2*N+12,13),M3XS(12),XV

REAL*8 MTH2(12)
INTEGER*4 I,J

!FILLING MATRIX MTH2 WITH ZEROS
DO 10 J=1,12,1
  MTH2(J)=0.
10 CONTINUE

!CALCULATING MATRIX MTH2
DO 20 J=1,12,1
  DO 30 I=1,2*N+12,1

```

```

                MTH2 (J) =MTH2 (J) +PFAC (I, J) **3.
    30 CONTINUE
    MTH2 (J) =MTH2 (J) *XV-M3XS (J)
20 CONTINUE

RETURN
END

!SUBROUTINE FOR CALCULATION OF MATRIX [è3(J)-è3]->(12,1)
SUBROUTINE TH3(N, PFAC, COVXS, MTH3)
INTEGER*4 N
REAL*8 PFAC(2*N+12, 13), COVXS(12)

REAL*8 MTH3(12)
INTEGER*4 I, J

!FILLING MATRIX MTH3 WITH ZEROS
DO 10 J=1, 12, 1
    MTH3(J)=0.
10 CONTINUE

!CALCULATING MATRIX MTH3
DO 20 I=1, 2*N, 1
    MTH3(1)=MTH3(1)+PFAC(I+12, 12)*PFAC(I, 1)
20 CONTINUE
MTH3(1)=MTH3(1)-COVXS(1)

DO 30 J=2, 12, 1
    DO 40 I=1, 2*N+12, 1
        MTH3(J)=MTH3(J)+PFAC(I, J-1)*PFAC(I, J)
    40 CONTINUE
    MTH3(J)=MTH3(J)-COVXS(J)
30 CONTINUE

RETURN
END

!SUBROUTINE FOR CALCULATION OF MATRIX [è4(J)-è4]->(K+1,1)
SUBROUTINE TH4(N, K, PFAC, COVET, MTH4)
INTEGER*4 N, K
REAL*8 PFAC(2*N+12, 13), COVET(K+1)

REAL*8 MTH4(K+1)
INTEGER*4 I, J, II

!FILLING MATRIX MTH4 WITH ZEROS
DO 10 J=1, K+1, 1
    MTH4(J)=0.
10 CONTINUE

!CALCULATING MATRIX MTH4
II=0
DO 20 I=0, K, 1
    II=II+1
    DO 30 J=1, 2*N+12-12*I, 1
        MTH4(II)=MTH4(II)+PFAC(J+12*I, 13)*PFAC(J, 13)
    30 CONTINUE
    MTH4(II)=MTH4(II)-COVET(II)
20 CONTINUE

```

```

RETURN
END

```

```

!SUBROUTINE FOR CALCULATION OF [è5 (J) -è5] -> (1, 1)

```

```

SUBROUTINE TH5 (N, PFAC, XV, M3ET, MTH5)

```

```

INTEGER*4 N

```

```

REAL*8 PFAC (2*N+12, 13), M3ET, XV

```

```

REAL*8 MTH5

```

```

INTEGER*4 I

```

```

MTH5=0.

```

```

!CALCULATING MTH5

```

```

MTH5=0.

```

```

DO 10 I=1, 2*N+12, 1

```

```

    MTH5=MTH5+PFAC (I, 13) **3.

```

```

10 CONTINUE

```

```

MTH5=MTH5*XV

```

```

MTH5=MTH5-M3ET

```

```

RETURN

```

```

END

```

Υπορουτίνες υπολογισμού παραγώγου αντικειμενικής συναρτήσεως

```

FUNCTION DF1DIM (N, K, NPAR, PARAM, L, VARXS, COVXS, COVET, M3XS, M3ET, X, XI)

```

```

INTEGER*4 N, K, NPAR

```

```

REAL*8 PARAM (NPAR), L (5), VARXS (12), COVXS (12), COVET (K+1), M3XS (12), M3ET,

```

```

X, XI (NPAR)

```

```

REAL*8 DF1DIM

```

```

INTEGER*4 J

```

```

REAL*8 XT (NPAR), DF1 (12* (N+1) +1), DF (NPAR), P (12* (N+1) +1), CHAN (12* (N+1) +1,
NPAR)

```

```

DO 10 J=1, NPAR, 1

```

```

    XT (J) = PARAM (J) + X * XI (J)

```

```

10 CONTINUE

```

```

CALL PARTOP (NPAR, XT, N, P)

```

```

CALL DFUNC (N, K, P, L, VARXS, COVXS, COVET, M3XS, M3ET, DF1)

```

```

CALL CHANDE (NPAR, XT, N, CHAN)

```

```

CALL MULVA (12* (N+1) +1, NPAR, DF1, CHAN, DF)

```

```

DF1DIM=0.

```

```

DO 20 J=1, NPAR, 1

```

```

    DF1DIM=DF1DIM+DF (J) * XI (J)

```

```

20 CONTINUE

```

```

RETURN

```

```

END

```

```

SUBROUTINE DFUNC (N, K, P, L, VARXS, COVXS, COVET, M3XS, M3ET, DF)

```

```

INTEGER*4 N, K

```

```

REAL*8 P (12* (N+1) +1), DF (12* (N+1) +1), L (5), VARXS (12), COVXS (12),

```

```

COVET (K+1) ,M3XS (12) ,M3ET

REAL*8 PFAC (2*N+12,13) ,PFAC1 (N+1,12) ,XV
REAL*8 DNORM1 (12*(N+1)+1) ,DNORM2 (12*(N+1)+1) ,DNORM3 (12*(N+1)+1) ,
DNORM4 (12*(N+1)+1)
INTEGER*4 J

REAL*8 P1 (12,12*(N+1)+1) ,P2 (12,12*(N+1)+1) ,P3 (12,12*(N+1)+1) ,
P4 (K+1,12*(N+1)+1) ,P5 (12*(N+1)+1)
REAL*8 MTH1 (12) ,MTH2 (12) ,MTH3 (12) ,MTH4 (K+1) ,MTH5

!EXTERNAL
!SUBROUTINES:KATAT,KAT1,CALP1,CALP2,CALP3,CALP4,CALP5,TH1,TH2,TH3,TH4,T
!H5,MULVA

!FILLING DNORM WITH ZEROS
DO 10 J=1,12*(N+1)+1,1
    DNORM1 (J)=0.
    DNORM2 (J)=0.
    DNORM3 (J)=0.
    DNORM4 (J)=0.
    DF (J)=0.
10 CONTINUE

! FIXING THE PSMA ARRAY OF FACTORS AND SUMS
CALL KATAT (N,P,PFAC)
CALL KAT1 (N,P,PFAC1)

!SKEWNESS OF WHITE NOISE
XV=P (12*(N+1)+1)

!CALCULATING MATRIX P1 (DERIVATIVES OF MONTHLY VARS)
CALL CALP1 (N,PFAC1,P1)

!CALCULATING MATRIX P2 (DERIVATIVES OF MONTHLY M3)
CALL CALP2 (N,XV,PFAC1,P2)

!CALCULATING MATRIX P3 (DERIVATIVES OF MONTHLY COV)
CALL CALP3 (N,PFAC1,P3)

!CALCULATING MATRIX P4 (DERIVATIVES OF YEAR AUTOCOV)
CALL CALP4 (N,K,PFAC1,P4)

!CALCULATING VECTOR P5 (DERIVATIVES OF YEAR M3)
CALL CALP5 (N,PFAC1,PFAC,XV,P5)

!CALCULATING MATRIXES MTH1,MTH2,MTH3,MTH4 & VALUE MTH5
CALL TH1 (N,PFAC,VARXS,MTH1)
CALL TH2 (N,PFAC,XV,M3XS,MTH2)
CALL TH3 (N,PFAC,COVXS,MTH3)
CALL TH4 (N,K,PFAC,COVET,MTH4)
CALL TH5 (N,PFAC,XV,M3ET,MTH5)

!CALCULATING VECTOR DF
CALL MULVA (12,12*(N+1)+1,MTH1,P1,DNORM1)
CALL MULVA (12,12*(N+1)+1,MTH2,P2,DNORM2)
CALL MULVA (12,12*(N+1)+1,MTH3,P3,DNORM3)
CALL MULVA (K+1,12*(N+1)+1,MTH4,P4,DNORM4)

DO 20 J=1,12*(N+1)+1,1
    DF (J)=2.*(L (1) *DNORM1 (J)+L (2) *DNORM2 (J)+L (3) *DNORM3 (J)+

```

```

      L(4)*DNORM4(J)+MTH5*L(5)*P5(J))
20 CONTINUE

```

```

RETURN
END

```

```

!SUBROUTINE FOR PLACING PSMA FACTORS
SUBROUTINE KAT1(N,P,PFAC1)
INTEGER*4 N
REAL*8 P(12*(N+1)+1),PFAC1(N+1,12)

INTEGER*4 I,J

!CALCULATING MATRIX PFAC1
DO 10 I=1,12,1
  DO 20 J=1,N+1,1
    PFAC1(J,I)=P((I-1)*(N+1)+J)
  20 CONTINUE
10 CONTINUE

```

```

RETURN
END

```

```

!SUBROUTINE FOR CALCULATING MATRIX P1 (DERIVATIVES OF MONTHLY VARS)
SUBROUTINE CALP1(N,PFAC1,P1)
INTEGER*4 N
REAL*8 PFAC1(N+1,12),P1(12,12*(N+1)+1)
INTEGER*4 I,J,K

!FILLING P1 WITH ZEROS
DO 10 I=1,12,1
  DO 20 J=1,12*(N+1)+1,1
    P1(I,J)=0.
  20 CONTINUE
10 CONTINUE

```

```

!CALCULATING MATRIX P1->[12,12*(N+1)+1]
DO 30 I=1,12,1
  DO 40 K=0,N,1
    J=(I-1)*(N+1)+1+K
    IF(K.EQ.0) THEN
      P1(I,J)=2.*PFAC1(K+1,I)
    ENDIF
    IF(K.GT.0) THEN
      P1(I,J)=4.*PFAC1(K+1,I)
    ENDIF
  40 CONTINUE
30 CONTINUE

```

```

RETURN
END

```

```

!SUBROUTINE FOR CALCULATING MATRIX P2 (DERIVATIVES OF MONTHLY M3)
SUBROUTINE CALP2(N,XV,PFAC1,P2)
INTEGER*4 N
REAL*8 PFAC1(N+1,12),P2(12,12*(N+1)+1),XV

```



```

INTEGER*4 I,J,K

!FILLING P2 WITH ZEROS
DO 10 I=1,12,1
  DO 20 J=1,12*(N+1)+1,1
    P2(I,J)=0.
  20 CONTINUE
10 CONTINUE

!CALCULATING MATRIX P2->[12,12*(N+1)+1]
DO 30 I=1,12,1
  DO 40 K=0,N,1
    J=(I-1)*(N+1)+1+K
    IF(K.EQ.0) THEN
      P2(I,J)=3.*XV*PFAC1(K+1,I)**2.
    ENDIF
    IF(K.GT.0) THEN
      P2(I,J)=6.*XV*PFAC1(K+1,I)**2.
    ENDIF
  40 CONTINUE
30 CONTINUE

DO 50 I=1,12,1
  P2(I,12*(N+1)+1)=PFAC1(1,I)**3.
  DO 60 J=2,N+1,1
    P2(I,12*(N+1)+1)=P2(I,12*(N+1)+1)+2.*PFAC1(J,I)**3.
  60 CONTINUE
50 CONTINUE

RETURN
END

!SUBROUTINE FOR CALCULATING MATRIX P3 (DERIVATIVES OF MONTHLY COV)
SUBROUTINE CALP3(N,PFAC1,P3)
INTEGER*4 N
REAL*8 PFAC1(N+1,12),P3(12,12*(N+1)+1)

INTEGER*4 I,J,K

!FILLING P3 WITH ZEROS
DO 10 I=1,12,1
  DO 20 J=1,12*(N+1)+1,1
    P3(I,J)=0.
  20 CONTINUE
10 CONTINUE

!CALCULATING MATRIX P3->[12,12*(N+1)+1]

!FIRST ROW OF THE MATRIX
DO 30 J=1,N+1,1
  IF(N-J.GE.0) THEN
    P3(1,J)=P3(1,J)+PFAC1(J+1,12)
  ENDIF
  IF(J-2.GE.0) THEN
    P3(1,J)=P3(1,J)+PFAC1(IABS(J-2)+1,12)
  ENDIF
30 CONTINUE

DO 40 J=11*(N+1)+1,12*(N+1),1
  K=J-11*(N+1)

```

```

        IF (N-K.GE.0) THEN
            P3 (1, J) = P3 (1, J) + PFAC1 (K+1, 1)
        ENDIF
        IF (K-2.GE.0) THEN
            P3 (1, J) = P3 (1, J) + PFAC1 (IABS (K-2) + 1, 1)
        ENDIF
40 CONTINUE

!NEXT ROWS OF THE MATRIX
DO 50 I=2, 12, 1
    DO 60 J=(I-2) * (N+1) + 1, (I-1) * (N+1), 1
        K=J-(I-2) * (N+1)
        IF (N-K.GE.0) THEN
            P3 (I, J) = P3 (I, J) + PFAC1 (K+1, I)
        ENDIF
        IF (K-2.GE.0) THEN
            P3 (I, J) = P3 (I, J) + PFAC1 (IABS (K-2) + 1, I)
        ENDIF
    60 CONTINUE

    DO 70 J=(I-1) * (N+1) + 1, I * (N+1), 1
        K=J-(I-1) * (N+1)
        IF (N-K.GE.0) THEN
            P3 (I, J) = P3 (I, J) + PFAC1 (K+1, I-1)
        ENDIF
        IF (K-2.GE.0) THEN
            P3 (I, J) = P3 (I, J) + PFAC1 (IABS (K-2) + 1, I-1)
        ENDIF
    70 CONTINUE
50 CONTINUE

RETURN
END

```

```

!SUBROUTINE FOR CALCULATING MATRIX P4 (DERIVATIVES OF YEAR AUTOCOV)
SUBROUTINE CALP4 (N, Z, PFAC1, P4)
INTEGER*4 N, Z
REAL*8 PFAC1 (N+1, 12), P4 (Z+1, 12 * (N+1) + 1)

INTEGER*4 I, J, S, K, L

!FILLING P4 WITH ZEROS
DO 10 I=1, Z+1, 1
    DO 20 J=1, 12 * (N+1) + 1, 1
        P4 (I, J) = 0.
    20 CONTINUE
10 CONTINUE

!CALCULATING MATRIX P4->[Z+1, 12 * (N+1) + 1]
DO 30 I=0, Z, 1
    DO 40 S=1, 12, 1
        DO 50 K=0, N, 1
            J=(S-1) * (N+1) + 1 + K
            DO 60 L=1, 12, 1
                IF (N-IABS (12 * I - S + K + L) .GE.0) THEN

                    P4 (I+1, J) = P4 (I+1, J) + PFAC1 (IABS (12 * I - S + K + L) + 1, L)
                ENDIF
                IF (N-IABS (12 * I - S - K + L) .GE.0) THEN

```

```

P4 (I+1, J) = P4 (I+1, J) + PFAC1 ( IABS (12*I-S-K+L) +1, L)
                                ENDIF
                                IF (N-IABS (12*I+S-K-L) .GE.0) THEN

P4 (I+1, J) = P4 (I+1, J) + PFAC1 ( IABS (12*I+S-K-L) +1, L)
                                ENDIF
                                IF (N-IABS (12*I+S+K-L) .GE.0) THEN

P4 (I+1, J) = P4 (I+1, J) + PFAC1 ( IABS (12*I+S+K-L) +1, L)
                                ENDIF
                                60 CONTINUE
                                IF (K.EQ.0) THEN
                                    P4 (I+1, J) = P4 (I+1, J) /2.
                                ENDIF
                                50 CONTINUE
                                40 CONTINUE
                                30 CONTINUE

RETURN
END

```

```

!SUBROUTINE FOR CALCULATING VECTOR P5 (DERIVATIVES OF YEAR M3)
SUBROUTINE CALP5 (N, PFAC1, PFAC, XV, P5)
INTEGER*4 N
REAL*8 PFAC1 (N+1, 12), PFAC (2*N+12, 13), XV, P5 (12* (N+1) +1)

INTEGER*4 I, S, K, J
REAL*8 SUM1, SUM2

!FILLING P5 WITH ZEROS
DO 10 I=1, 12* (N+1) +1, 1
    P5 (I) =0.
10 CONTINUE

!CALCULATING VECTOR P5->(1, 12* (N+1) +1)
DO 20 S=1, 12, 1
    DO 30 K=0, N, 1
        J=(S-1) * (N+1) +K+1
        SUM1=0.
        SUM2=0.
        DO 40 I=1, 12, 1
            IF (N-IABS (K-S+I) .GE.0) THEN
                SUM1=SUM1+PFAC1 ( IABS (K-S+I) +1, I)
            ENDIF
            IF (N-IABS (K+S-I) .GE.0) THEN
                SUM2=SUM2+PFAC1 ( IABS (K+S-I) +1, I)
            ENDIF
        40 CONTINUE
        P5 (J) =3. *XV* (SUM1**2. +SUM2**2.)
        IF (K.EQ.0) THEN
            P5 (J) =P5 (J) /2.
        ENDIF
    30 CONTINUE
20 CONTINUE

DO 50 I=1, 2*N+12, 1
    P5 (12* (N+1) +1) =P5 (12* (N+1) +1) +PFAC (I, 13) **3.
50 CONTINUE

```

```
RETURN
END
```

Υπορουτίνα πολλαπλασιασμού πίνακα με διάνυσμα

```
SUBROUTINE MULVA (K, N, X, A, Y)
INTEGER*4 K, N
REAL*8 X (K), A (K, N), Y (N)

INTEGER I, J
REAL*8 SUM

DO 10 J=1, N, 1
    SUM=0.
    DO 20 I=1, K, 1
        SUM=SUM+X (I) *A (I, J)
    20 CONTINUE
    Y (J)=SUM
10 CONTINUE

RETURN
END
```

Υπορουτίνα υπολογισμού του διανύσματος των παραμέτρων του μοντέλου, συναρτήσει του διανύσματος των παραμέτρων της μαθηματικής εκφράσεως

```
SUBROUTINE PARTOP (NPAR, PARAM, N, P)
INTEGER*4 NPAR, N
REAL*8 PARAM (NPAR), P (12 * (N+1) +1)

INTEGER*4 S, I, J
REAL*8 TEMP (24), AR (N)

DO 5 I=1, N, 1
    AR (I)=1./DFLOAT (I)
5 CONTINUE

DO 10 S=1, 12, 1

    J=0
    DO 20 I=1, 49, 1
        IF (I.LE.25) THEN
            P ((S-1) * (N+1) +I)=PARAM ((S-1) *49+I)
        ENDIF

        IF (I.GE.26) THEN
            J=J+1
            TEMP (J)=PARAM ((S-1) *49+I)
        ENDIF
    20 CONTINUE

    DO 30 I=26, N+1, 1
        P ((S-1) * (N+1) +I)=0.

        DO 40 J=1, 24, 1
            P ((S-1) * (N+1) +I)=P ((S-1) * (N+1) +I) +AR (I-26+J) *TEMP (J)
        40 CONTINUE

    30 CONTINUE
```

```

10 CONTINUE

P(12*(N+1)+1)=PARAM(NPAR)

RETURN
END

```

Υπορουτίνα υπολογισμού της παραγώγου του διανύσματος των παραμέτρων του μοντέλου, ως προς το διάνυσμα των παραμέτρων της μαθηματικής εκφράσεως

```

SUBROUTINE CHANDE(NPAR,PARAM,N,CHAN)
INTEGER*4 NPAR,N
REAL*8 PARAM(NPAR),CHAN(12*(N+1)+1,NPAR)

REAL*8 TEMP(12,12),AR(N)
INTEGER*4 S,I,J,II,JJ,ISO1,ISO2

DO 5 I=1,N,1
    AR(I)=1./DFLOAT(I)
5 CONTINUE

!FILLING MATRIX [CHAN] WITH ZEROS
DO 10 I=1,12*(N+1)+1,1
    DO 20 J=1,NPAR,1
        CHAN(I,J)=0.
    20 CONTINUE
10 CONTINUE

!FILLING MATRIX [TEMP] WITH PARAMETERS
DO 30 S=1,12,1
    J=0
    DO 40 I=26,49,1
        J=J+1
        TEMP(J,S)=PARAM((S-1)*49+I)
    40 CONTINUE
30 CONTINUE

!FILLING MATRIX [CHAN] WITH ELEMENTS
DO 50 S=1,12,1
    DO 60 II=1,N+1,1
        DO 70 JJ=1,49,1

            I=(S-1)*(N+1)+II
            J=(S-1)*49+JJ

            IF((II.EQ.JJ).AND.(JJ.LE.25)) THEN
                CHAN(I,J)=1.
            ENDIF

            IF((II.GT.25).AND.(JJ.GT.25)) THEN
                ISO1=JJ-25
                ISO2=II-26

                CHAN(I,J)=AR(ISO1+ISO2)
            ENDIF
        70 CONTINUE
    60 CONTINUE
50 CONTINUE
CHAN(12*(N+1)+1,NPAR)=1.

```

RETURN
END

Αρχείο Δεδομένων PARAMETERS .TXT

```
NUMBER OF PPSMA FACTORS (q)
*****
960
NUMBER OF YEAR COVARIANCES TO PRESERVE
*****
80
MAXIMUM NUMBER OF ITERATIONS
*****
300
CONVERGENCE TOLERANCE OF THE OBJECTIVE FUNCTION
*****
1.e-20
TOLERANCE FOR LINE MINIMIZATION
*****
1.e-20
CASE OF CONVERGING TO EXACTLY ZERO FUNCTION VALUE
*****
1.E-10
OBJECTIVE FUNCTION WEIGHT FOR MONTHLY VARIANCES
*****
1
OBJECTIVE FUNCTION WEIGHT FOR MONTHLY BASED SKEWNESS
*****
1
OBJECTIVE FUNCTION WEIGHT FOR LAG 1 COVARIANCE
*****
1
OBJECTIVE FUNCTION WEIGHT FOR HURST COVARIANCES
*****
1
OBJECTIVE FUNCTION WEIGHT FOR YEAR BASED SKEWNESS
*****
1
```

ΣΤ.3 Πρόγραμμα παραγωγής συνθετικών χρονοσειρών

Λειτουργία του προγράμματος

Το πρόγραμμα χρησιμοποιεί το αρχείο PFINAL.TXT που παράγεται κατά την εκτέλεση των προγραμμάτων βελτιστοποίησης που αναπτύχθηκαν για τα μοντέλα PSMA και PPSMA, με στόχο την παραγωγή συνθετικών χρονοσειρών δεδομένων στατιστικών χαρακτηριστικών. Κατά την εκτέλεσή του, το πρόγραμμα ρωτάει τον χρήστη για τον αριθμό q των παραμέτρων α_j^s ($j = 0, \dots, q$ και $s = 1, \dots, 12$) που περιέχονται στο αρχείο PFINAL.TXT, καθώς και για τον αριθμό των ετών που θέλει να παράγει ο χρήστης συνθετικά. Στην συνέχεια το πρόγραμμα εκτυπώνει δύο αρχεία: (1) το αρχείο

PFAC2.TXT που περιέχει τις παραμέτρους α_j^s ($j = 0, \dots, q$ και $s = 1, \dots, 12$) του χρησιμοποιούμενου μοντέλου (PSMA ή PPSMA) υπό την μορφή στηλών, κάθε μία εκ των οποίων αντιστοιχεί σε έναν μήνα s ($s = 1, \dots, 12$) και (2) το αρχείο SERIES.TXT, το οποίο περιέχει την συνθετική χρονοσειρά που επιθυμεί ο χρήστης υπό την μορφή πίνακα του οποίου οι γραμμές αντιπροσωπεύουν τα έτη και οι στήλες τους μήνες. Στην συνέχεια παρουσιάζεται ο κώδικας, σε γλώσσα Fortran, του προγράμματος.

Κυρίως πρόγραμμα

```
PROGRAM MAIN
USE MSIMSL
INTEGER*4 N,K

WRITE(*,*) 'NUMBER OF PSMA FACTORS'
READ(*,*) N

WRITE(*,*) 'GIVE NUMBER OF SYNTHETIC YEARS TO GENERATE'
READ(*,*) K

OPEN(10, FILE='PFINAL.TXT')
OPEN(20, FILE='SERIES.TXT')
OPEN(30, FILE='PFAC2.TXT')

CALL MANIP(N,K)

CLOSE(10)
CLOSE(20)
CLOSE(30)

STOP
END
```

Υπορουτίνα παραγωγής συνθετικών χρονοσειρών

```
SUBROUTINE MANIP(N,K)
INTEGER*4 N,K

REAL*8 PFAC(2*N+12,13), P(12*(N+1)+1), PFAC2(2*N+1,12), XV, TIME(K,12),
WN(12*K+2*N)
INTEGER*4 I,J,L,M
REAL*8 SUM

DO 10 I=1,12*(N+1)+1,1
    READ(10,*) P(I)
10 CONTINUE

XV=P(12*(N+1)+1)

!GENERATING MATRIXES OF PSMA FACTORS
CALL KATAT(N,P,PFAC)
CALL KATAT2(N,P,PFAC2)

!GENERATING WHITE NOISE
CALL GAMA(XV,WN,12*K+2*N)
```

```

!GENERATING TIME SERIES
M=-1
DO 20 I=1,K,1
  DO 30 J=1,12,1
    SUM=0.
    M=M+1
    DO 40 L=1,2*N+1,1
      SUM=SUM+PFAC2(L,J)*WN(M+L)
    40 CONTINUE
    TIME(I,J)=SUM
  30 CONTINUE
20 CONTINUE

!PRINTING PSMA FACTORS
DO 60 I=1,2*N+1,1
  WRITE(30,1000)(PFAC2(I,J),J=1,12,1)
60 CONTINUE

!PRINTING TIME SERIES
DO 70 I=1,K,1
  WRITE(20,1000)(TIME(I,J),J=1,12,1)
70 CONTINUE

1000 FORMAT(12(1X,F15.8,1X))

RETURN
END

```

Υπορουτίνες κατάταξης παραμέτρων σε πίνακες

```

!SUBROUTINE FOR GENERATING MATRIX PFAC
SUBROUTINE KATAT(N,P,PFAC)
INTEGER*4 N
REAL*8 P(12*(N+1)+1),PFAC(2*N+12,13)

INTEGER*4 I,J

! FILLING PFAC WITH ZEROS
DO 10 I=1,2*N+12,1
  DO 20 J=1,13,1
    PFAC(I,J)=0.
  20 CONTINUE
10 CONTINUE

!FIXING PFAC WITH ELLEMENTS
DO 30 I=1,12,1
  DO 40 J=1,N+1,1
    PFAC(N+J+(I-1),I)=P((I-1)*(N+1)+J)
    PFAC(N-J+I+1,I)=P((I-1)*(N+1)+J)
  40 CONTINUE
30 CONTINUE

DO 50 J=1,2*N+12,1
  DO 60 I=1,12,1
    PFAC(J,13)=PFAC(J,13)+PFAC(J,I)
  60 CONTINUE
50 CONTINUE

RETURN
END

```



```

!SUBROUTINE FOR GENERATING MATRIX PFAC2
SUBROUTINE KATAT2 (N, P, PFAC2)
INTEGER*4 N
REAL*8 P (12*(N+1)+1), PFAC2 (2*N+1, 12)

INTEGER*4 I, J

! FILLING PFAC WITH ZEROS
DO 10 I=1, 2*N+1, 1
    DO 20 J=1, 12, 1
        PFAC2 (I, J)=0.
    20 CONTINUE
10 CONTINUE

!FIXING PFAC2 WITH ELLEMENTS
DO 30 I=1, 12, 1
    DO 40 J=1, N+1, 1
        PFAC2 (N+J, I)=P ((I-1) * (N+1) +J)
        PFAC2 (N-J+2, I)=P ((I-1) * (N+1) +J)
    40 CONTINUE
30 CONTINUE

RETURN
END

```

Υπορουτίνα παραγωγής λευκού θορύβου με ασυμμετρία

```

SUBROUTINE GAMA (M3, R, N)
REAL*8 M3
INTEGER*4 N

REAL*8 L, K, C, R (N)
INTEGER*4 I

L=2./M3
K=L**2.
C=-L

DO 10 I=1, N, 1
    R (I)=0.
10 CONTINUE

CALL DRNGAM (N, K, R)

DO 20 I=1, N, 1
R (I)=R (I) /L+C
20 CONTINUE

RETURN
END

```

Παράρτημα Z

Στο παράρτημα αυτό παρουσιάζονται τα προγράμματα που αναπτύχθηκαν, με σκοπό την εφαρμογή του Splitmodel στην συνθετική αναπαραγωγή των στατιστικών χαρακτηριστικών ιστορικών χρονοσειρών μηνιαίας κλίμακας ($k = 12$). Για την εφαρμογή του μοντέλου γίνεται χρήση πέντε προγραμμάτων: (1) του προγράμματος βελτιστοποίησης των στατιστικών χαρακτηριστικών των τυχαίων μεταβλητών Y_i, W_i του Splitmodel, (2) του προγράμματος προσδιορισμού της σειράς των αυτοσυνδιασπορών της τυχαίας μεταβλητής Y_i με χρήση του γενικευμένου αντίστροφου μητρώου ελάχιστης νόρμας, (3) του προγράμματος προσδιορισμού των παραμέτρων του μοντέλου SMA για την αναπαραγωγή των στατιστικών χαρακτηριστικών της τυχαίας μεταβλητής Y_i , (4) του προγράμματος βελτιστοποίησης των παραμέτρων f_0^i και f_1^i ($i = 1, \dots, 12$) του μοντέλου PFMA καθώς και των συντελεστών ασυμμετρίας ξ_r^i ($i = 1, \dots, 12$) της μεταβλητής λευκού θορύβου R_i , και (5) του προγράμματος παραγωγής συνθετικών χρονοσειρών. Η μη γραμμική βελτιστοποίηση που πραγματοποιούν τα προγράμματα (1) και (4), γίνεται με εφαρμογή της μεθόδου των συζυγών κλίσεων που περιγράφηκε στο εδάφιο 3.3.6. Οι υπορουτίνες βελτιστοποίησης, ελήφθησαν αρχικά από το βιβλίο (Press *et al.*, 1992) και στην συνέχεια τροποποιήθηκαν κατάλληλα ώστε να μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τις ανάγκες της εκάστοτε βελτιστοποίησης. Στην συνέχεια παρουσιάζεται ο τρόπος λειτουργίας του εκάστοτε προγράμματος, καθώς και ο κώδικας αυτών σε γλώσσα Fortran.

Z.1 Πρόγραμμα βελτιστοποίησης των παραμέτρων του Splitmodel

Λειτουργία προγράμματος

Αρχικά τοποθετούμε στο αρχείο PARAMETERS.TXT τα απαραίτητα δεδομένα για την βελτιστοποίηση των παραμέτρων του μοντέλου¹. Στην συνέχεια τοποθετούμε στα αρχεία VARXS.TXT, COVXS.TXT, M3XS.TXT και VARET.TXT τα στατιστικά χαρακτηριστικά του ιστορικού δείγματος που θέλουμε να αναπαράγουμε συνθετικά. Στο αρχείο VARXS.TXT, τοποθετούμε τις 12 σε αριθμό διασπορές των μηνών του ιστορικού δείγματος ξεκινώντας από τον μήνα Οκτώβριο. Στο αρχείο COVXS.TXT, τοποθετούμε τις 12 σε αριθμό συνδιασπορές των μηνών για μοναδιαίο βήμα χρονικής μετατόπισης

¹ στο τέλος του παραρτήματος παρατίθεται η μορφή του εν λόγω αρχείου

ξεκινώντας από την συνδιασπορά του μήνα Οκτωβρίου με τον μήνα Σεπτέμβριο. Στο αρχείο M3XS.TXT τοποθετούμε τις 12 σε αριθμό τρίτες ροπές των μηνών ξεκινώντας με την τρίτη ροπή του Οκτωβρίου και στο αρχείο VARET.TXT τοποθετούμε την διασπορά της ετήσιας ιστορικής χρονοσειράς. Ακολούθως τοποθετούμε στο αρχείο PINIT1.TXT το αρχικό διάνυσμα $\zeta = [e_1, \dots, e_{12}, \delta_0^1, \dots, \delta_0^{12}, \delta_1^1, \dots, \delta_1^{12}, \mu_3[Y_i], \mu_3[W_1], \dots, \mu_3[W_{12}], \gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{12(n+1)-1}]^T$ διαστάσεως $12(n+5)+1$, του οποίου τα στοιχεία λαμβάνονται τυχαία.

Κατά την εκτέλεσή του, το πρόγραμμα δημιουργεί: (1) το αρχείο PFIN1.TXT το οποίο περιέχει το βελτιστοποιημένο διάνυσμα ζ^* , (2) το αρχείο ES.TXT το οποίο περιέχει τις βελτιστοποιημένες παραμέτρους e_i ($i = 1, \dots, 12$) του μοντέλου (7.3), (3) το αρχείο VARW.TXT το οποίο περιέχει τις διασπορές δ_0^i ($i = 1, \dots, 12$) της κυκλοστάσιμης στοχαστικής ανέλιξης W_i , (4) το αρχείο COVW.TXT το οποίο περιέχει τις συνδιασπορές των εποχών (μηνών) της κυκλοστάσιμης στοχαστικής ανέλιξης W_i για μοναδιαίο βήμα χρονικής μετατόπισης δ_1^i ($i = 1, \dots, 12$), (5) το αρχείο M3Y.TXT το οποίο περιέχει την τρίτη ροπή της τυχαίας μεταβλητής Y_i , (6) το αρχείο M3W.TXT το οποίο περιέχει τις τρίτες ροπές $\mu_3[W_i]$ ($i = 1, \dots, 12$) της κυκλοστάσιμης στοχαστικής ανέλιξης W_i , (7) το αρχείο YCOV1.TXT το οποίο περιέχει τις αυτοσυνδιασπορές της τυχαίας μεταβλητής Y_i για τα πρώτα $12(n+1)-1$ βήματα χρονικής μετατόπισης (δηλαδή $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{12(n+1)-1}$), και (8) το αρχείο INFO1.TXT το οποίο περιέχει τον αριθμό των επαναλήψεων που απαιτήθηκαν για την βελτιστοποίηση, καθώς και την τιμή της αντικειμενικής συναρτήσεως που επιτεύχθηκε. Στην συνέχεια παρουσιάζεται ο κώδικας, σε γλώσσα Fortran, του προγράμματος.

Κυρίως πρόγραμμα

```
PROGRAM OPT1
INTEGER*4 K, ITMAX, NPAR
REAL*8 FTOL, EPS, TOL, L(4), H

OPEN (10, FILE='PARAMETERS.TXT')

READ (10, *)
READ (10, *)
READ (10, *)
READ (10, *)
READ (10, *) H
READ (10, *)
READ (10, *)
READ (10, *) K
READ (10, *)
READ (10, *)
READ (10, *) ITMAX
READ (10, *)
READ (10, *)
READ (10, *) FTOL
```

```

READ(10,*)
READ(10,*)
READ(10,*)TOL
READ(10,*)
READ(10,*)
READ(10,*)EPS
READ(10,*)
READ(10,*)
READ(10,*)L(1)
READ(10,*)
READ(10,*)
READ(10,*)L(2)
READ(10,*)
READ(10,*)
READ(10,*)L(3)
READ(10,*)
READ(10,*)
READ(10,*)L(4)

NPAR=12*K+61
CALL MATR(NPAR,K,H,ITMAX,FTOL,EPS,TOL,L)

CLOSE(10)

STOP
END

```

Υπορουτίνα που καλεί την υπορουτίνα βελτιστοποίησης

```

SUBROUTINE MATR(NPAR,K,H,ITMAX,FTOL,EPS,TOL,L)
INTEGER*4 NPAR,K,ITMAX
REAL*8 FTOL,EPS,TOL,L(4),H

REAL*8 P(NPAR),VARXS(12),COVXS(12),COVET(K+1),M3XS(12),FRET
INTEGER*4 I,ITER
REAL*8 AS(12),VARW(12),COVW(12),M3Z,M3W(12),GZ(12*K+12)

OPEN(20,FILE='PINIT1.TXT')
OPEN(30,FILE='VARXS.TXT')
OPEN(40,FILE='M3XS.TXT')
OPEN(50,FILE='COVXS.TXT')
OPEN(60,FILE='VARET.TXT')
OPEN(80,FILE='PFIN1.TXT')
OPEN(90,FILE='INFO1.TXT')

OPEN(200,FILE='ES.TXT')
OPEN(210,FILE='VARW.TXT')
OPEN(220,FILE='COVW.TXT')
OPEN(230,FILE='M3Y.TXT')
OPEN(240,FILE='M3W.TXT')
OPEN(250,FILE='YCOV1.TXT')

!READING FROM FILES
DO 10 I=1,NPAR,1
  READ(20,*)P(I)
10 CONTINUE

DO 20 I=1,12,1
  READ(30,*)VARXS(I)
  READ(40,*)M3XS(I)
  READ(50,*)COVXS(I)

```

```

20 CONTINUE

!FILLING MATRIX [COVET]
READ(60,*)COVET(1)
DO 30 I=1,K,1
    COVET(I+1)=COVET(1)*(0.5*((DFLOAT(I+1))**(2.*H)+
(DFLOAT(I-1))**(2.*H))-DFLOAT(I)**(2.*H))
30 CONTINUE

DO 35 I=1,ITMAX,1

WRITE(*,*)'ITER=',I

CALL FRPRMN1(NPAR,K,P,VARXS,M3XS,COVXS,COVET,L,FTOL,ITER,FRET,
ITMAX,EPS,TOL)

WRITE(*,*)'minF(X)=' ,FRET

35 CONTINUE

WRITE(90,*)'minF(X)=' ,FRET
WRITE(90,*)'NUMBER OF INTERATIONS=' ,I

DO 40 I=1,NPAR,1
    WRITE(80,*)P(I)
40 CONTINUE

CALL TRANS(K,P,AS,VARW,COVW,M3Z,M3W,GZ)

DO 50 I=1,12,1
    WRITE(200,*)AS(I)
    WRITE(210,*)VARW(I)
    WRITE(220,*)COVW(I)
    WRITE(240,*)M3W(I)
50 CONTINUE

WRITE(230,*)M3Z

DO 60 I=1,12*K+12,1
    WRITE(250,1000)GZ(I)
60 CONTINUE

CLOSE(20)
CLOSE(30)
CLOSE(40)
CLOSE(50)
CLOSE(60)
CLOSE(80)
CLOSE(90)
CLOSE(200)
CLOSE(210)
CLOSE(220)
CLOSE(230)
CLOSE(240)
CLOSE(250)
1000 FORMAT(1X,F15.10,1X)
RETURN
END

```

Υπορουτίνα βελτιστοποίησης με την μέθοδο των συζυγών κλίσεων

```
SUBROUTINE FRPRMN1 (NPAR, K, P, VARXS, M3XS, COVXS, COVET, L, FTOL, ITER, FRET,
ITMAX, EPS, TOL)
INTEGER*4 NPAR, K, ITMAX, ITER
REAL*8 P (NPAR), L (4), VARXS (12), COVXS (12), COVET (K+1), M3XS (12)
REAL*8 FRET, FTOL, EPS, TOL
REAL*8 FUNC1

INTEGER*4 ITS, J
REAL*8 DGG, FP, GAM, GG, G (NPAR), H (NPAR), XI (NPAR)

FP=FUNC1 (K, P, VARXS, M3XS, COVXS, COVET, L)
CALL DFUNC1 (K, P, VARXS, M3XS, COVXS, COVET, L, XI)

DO 10 J=1, NPAR, 1
    G (J)=-XI (J)
    H (J)=G (J)
    XI (J)=H (J)
10 CONTINUE

!DO 20 ITS=1, ITMAX, 1
DO 20 ITS=1, 50, 1

    ITER=ITS

    CALL DLINMIN1 (NPAR, K, P, L, VARXS, COVXS, COVET, M3XS, XI, FRET, TOL)

    !WRITE (*, *) 'INTERATION: ', ITER
    !WRITE (*, *) 'F (X) = ', FRET

    !NORMAL RETURN
    IF (2. *DABS (FRET-FP) .LE. FTOL* (DABS (FRET) +DABS (FP) +EPS) ) THEN
        RETURN
    ENDIF

    FP=FRET
    CALL DFUNC1 (K, P, VARXS, M3XS, COVXS, COVET, L, XI)
    GG=0.
    DGG=0.
    DO 30 J=1, NPAR, 1
        GG=GG+G (J) **2.
        ! DGG=DGG+XI (J) **2. !FOR FLETCHER-REEVES
        DGG=DGG+ (XI (J) +G (J) ) *XI (J) !FOR POLAK-RIBIERE
    30 CONTINUE
    IF (GG.EQ.0.) THEN
        RETURN !IF GRADIENT IS EXACTLY ZERO (NOT VERY COMMON)
    ENDIF
    GAM=DGG/GG
    DO 40 J=1, NPAR, 1
        G (J)=-XI (J)
        H (J)=G (J) +GAM*H (J)
        XI (J)=H (J)
    40 CONTINUE
20 CONTINUE

!PAUSE 'MAXIMUM ITERATIONS OF SUBROUTINE "FRPRMN" EXCEEDED'
RETURN
END
```

Υπορουτίνες ελαχιστοποίησης συναρτήσεων μίας μεταβλητής

```
SUBROUTINE DLINMIN1 (NPAR, K, P, L, VARXS, COVXS, COVET, M3XS, XI, FRET, TOL)
INTEGER*4 NPAR, K
REAL*8 P (NPAR), L (4), VARXS (12), COVXS (12), COVET (K+1), M3XS (12), XI (NPAR)
REAL*8 FRET, TOL

REAL*8 DBRENT1
INTEGER*4 J
REAL*8 AX, BX, FA, FB, FX, XMIN, XX

AX=0.
XX=1.
CALL MNBRAK1 (NPAR, K, P, L, VARXS, COVXS, COVET, M3XS, XI, AX, XX, BX, FA, FX, FB)

FRET=DBRENT1 (NPAR, K, P, L, VARXS, COVXS, COVET, M3XS, XI, AX, XX, BX, TOL, XMIN)

DO 10 J=1, NPAR, 1
    P (J) = P (J) + XMIN * XI (J)
10 CONTINUE

!WRITE (*, *) XMIN
RETURN
END

SUBROUTINE MNBRAK1 (NPAR, K, P, L, VARXS, COVXS, COVET, M3XS, XI, AX, BX, CX, FA,
FB, FC)
INTEGER*4 NPAR, K
REAL*8 P (NPAR), L (4), VARXS (12), COVXS (12), COVET (K+1), M3XS (12), XI (NPAR)
REAL*8 AX, BX, CX, FA, FB, FC
REAL*8 GOLD, GLIMIT, TINY

PARAMETER (GOLD=1.618034, GLIMIT=100., TINY=1.E-10)

REAL*8 F1DIM1
REAL*8 DUM, FU, Q, R, U, ULIM

FA=F1DIM1 (NPAR, K, P, L, VARXS, COVXS, COVET, M3XS, AX, XI)
FB=F1DIM1 (NPAR, K, P, L, VARXS, COVXS, COVET, M3XS, BX, XI)

    IF (FB.GT.FA) THEN
        DUM=AX
        AX=BX
        BX=DUM
        DUM=FB
        FB=FA
        FA=DUM
    ENDIF
CX=BX+GOLD* (BX-AX)

FC=F1DIM1 (NPAR, K, P, L, VARXS, COVXS, COVET, M3XS, CX, XI)

!write (*, *) fa, fb, fc

10 CONTINUE
    IF (FB.GE.FC) THEN
        R= (BX-AX) * (FB-FC)
        Q= (BX-CX) * (FB-FA)
        U=BX- ( (BX-CX) * Q - (BX-AX) * R) / (2.*DSIGN (DMAX1 (DABS (Q-
R), TINY), Q-R))
        ULIM=BX+GLIMIT* (CX-BX)
```

```

        IF ( (BX-U) * (U-CX) .GT.0.) THEN

            FU=F1DIM1 (NPAR, K, P, L, VARXS, COVXS, COVET, M3XS, U, XI)
            IF (FU.LT.FC) THEN
                AX=BX
                FA=FB
                BX=U
                FB=FU
            RETURN
            ELSE IF (FU.GT.FB) THEN
                CX=U
                FC=FU
                RETURN
            ENDIF
        U=CX+GOLD* (CX-BX)
        FU=F1DIM1 (NPAR, K, P, L, VARXS, COVXS, COVET, M3XS, U, XI)
            ELSE IF ( (CX-U) * (U-ULIM) .GT.0.) THEN
        FU=F1DIM1 (NPAR, K, P, L, VARXS, COVXS, COVET, M3XS, U, XI)
        IF (FU.LT.FC) THEN
            BX=CX
            CX=U
            U=CX+GOLD* (CX-BX)
            FB=FC
            FC=FU
        FU=F1DIM1 (NPAR, K, P, L, VARXS, COVXS, COVET, M3XS, U, XI)
        ENDIF
            ELSE IF ( (U-ULIM) * (ULIM-CX) .GE.0.) THEN
        U=ULIM
        FU=F1DIM1 (NPAR, K, P, L, VARXS, COVXS, COVET, M3XS, U, XI)
            ELSE
                U=CX+GOLD* (CX-BX)
                FU=F1DIM1 (NPAR, K, P, L, VARXS, COVXS, COVET, M3XS, U, XI)
            ENDIF
            AX=BX
            BX=CX
            CX=U
            FA=FB
            FB=FC
            FC=FU
            GOTO 10
        ENDIF
    RETURN
END

FUNCTION DBRENT1 (NPAR, K, P, L, VARXS, COVXS, COVET, M3XS, XI, AX, BX, CX,
    TOL, XMIN)
    INTEGER*4 NPAR, K
    REAL*8 P (NPAR), L (4), VARXS (12), COVXS (12), COVET (K+1), M3XS (12), XI (NPAR)
    REAL*8 AX, BX, CX, TOL, XMIN

    INTEGER*4 ITMAX
    REAL*8 ZEPS
    PARAMETER (ITMAX=1000, ZEPS=1.E-20)

    REAL*8 F1DIM1, DF1DIM1, DBRENT1
    INTEGER*4 ITER
    REAL*8 A, B, D, D1, D2, DU, DV, DW, DX, E, FU, FV, FW, FX, OLDE, TOL1, TOL2, U, U1,
    U2, V, W, X, XM
    LOGICAL OK1, OK2

    A=DMIN1 (AX, CX)

```



```

B=DMAX1 (AX, CX)
V=BX
W=V
X=V
E=0.
FX=F1DIM1 (NPAR, K, P, L, VARXS, COVXS, COVET, M3XS, X, XI)
FV=FX
FW=FX
DX=DF1DIM1 (NPAR, K, P, L, VARXS, COVXS, COVET, M3XS, X, XI)
DV=DX
DW=DX

DO 10 ITER=1, ITMAX, 1
    XM=0.5*(A+B)
    TOL1=TOL*DABS(X)+ZEPS
    TOL2=2.*TOL1

    IF (DABS(X-XM) .LE. (TOL2-0.5*(B-A))) GOTO 3
    IF (DABS(E) .GT. TOL1) THEN
        D1=2.*(B-A)
        D2=D1
        IF (DW.NE.DX) D1=(W-X)*DX/(DX-DW)
        IF (DV.NE.DX) D2=(V-X)*DX/(DX-DV)
        U1=X+D1
        U2=X+D2
        OK1=((A-U1)*(U1-B) .GT. 0.) .AND. (DX*D1 .LE. 0.)
        OK2=((A-U2)*(U2-B) .GT. 0.) .AND. (DX*D2 .LE. 0.)
        OLDE=E
        E=D
    IF (.NOT. (OK1 .OR. OK2)) THEN
        GOTO 1
    ELSE IF (OK1 .AND. OK2) THEN
        IF (DABS(D1) .LT. DABS(D2)) THEN
            D=D1
        ELSE
            D=D2
        ENDIF
        ELSE IF (OK1) THEN
            D=D1
        ELSE
            D=D2
        ENDIF
    IF (DABS(D) .GT. DABS(0.5*OLDE)) GOTO 1
        U=X+D
    IF ((U-A) .LT. TOL2) .OR. (B-U) .LT. TOL2) D=DSIGN(TOL1, XM-X)
        GOTO 2
    ENDIF
    1 CONTINUE
    IF (DX .GE. 0.) THEN
        E=A-X
    ELSE
        E=B-X
    ENDIF
    D=0.5*E
    2 CONTINUE
    IF (DABS(D) .GE. TOL1) THEN
        U=X+D
        FU=F1DIM1 (NPAR, K, P, L, VARXS, COVXS, COVET, M3XS, U, XI)
        ELSE
            U=X+DSIGN(TOL1, D)
            FU=F1DIM1 (NPAR, K, P, L, VARXS, COVXS, COVET, M3XS, U, XI)
            IF (FU .GT. FX) GOTO 3
        ENDIF

```

```

DU=DF1DIM1 (NPAR, K, P, L, VARXS, COVXS, COVET, M3XS, U, XI)
  IF (FU.LE.FX) THEN
    IF (U.GE.X) THEN
      A=X
    ELSE
      B=X
    ENDIF
    V=W
    FV=FW
    DV=DW
    W=X
    FW=FX
    DW=DX
    X=U
    FX=FU
    DX=DU
  ELSE
    IF (U.LT.X) THEN
      A=U
    ELSE
      B=U
    ENDIF
  IF ( (FU.LE.FW) .OR. (W.EQ.X) ) THEN
    V=W
    FV=FW
    DV=DW
    W=U
    FW=FU
    DW=DU
  ELSE IF ( (FU.LE.FV) .OR. (V.EQ.X) .OR. (V.EQ.W) ) THEN
    V=U
    FV=FU
    DV=DU
  ENDIF
ENDIF
10 CONTINUE
WRITE (*, *) 'SUBROUTINE DBRENT EXCEEDED MAXIMUM ITERATIONS '
3 CONTINUE
XMIN=X
DBRENT1=FX

RETURN
END

```

Υπορουτίνες αντικειμενικής συναρτήσεως

```

FUNCTION F1DIM1 (NPAR, K, P, L, VARXS, COVXS, COVET, M3XS, X, XI)
INTEGER*4 NPAR, K
REAL*8 P (NPAR), L (4), VARXS (12), COVXS (12), COVET (K+1), M3XS (12), X, XI (NPAR)
REAL*8 FUNC1, F1DIM1

INTEGER*4 J
REAL*8 XT (NPAR)

DO 10 J=1, NPAR, 1
  XT (J) = P (J) + X * XI (J)
10 CONTINUE

F1DIM1 = FUNC1 (K, XT, VARXS, M3XS, COVXS, COVET, L)

RETURN

```

END

```
FUNCTION FUNC1 (K, P, VARXS, M3XS, COVXS, COVET, L)
INTEGER*4 K
REAL*8 VARXS (12), M3XS (12), COVXS (12), COVET (K+1), P (12*K+61), L (4)
REAL*8 FUNC1

REAL*8 AS (12), VARW (12), COVW (12), M3Z, M3W (12), GZ (12*K+12)
REAL*8 MTH1 (12), MTH2 (12), MTH3 (12), MTH4 (K+1), MTH6 (12)
REAL*8 NORM (4)

INTEGER*4 I

!PENALTIES
REAL*8 MINVAR, MAXR, MAXXV, MINGZ
REAL*8 P2 !ITS THE PENALTY FACTOR FOR LARGE COVW
PARAMETER (P2=1.E10)
REAL*8 PENAL1, PENAL2, PENAL3, PENAL4, PENAL5
PARAMETER (MINVAR=0.05, MAXR=0.9, MAXXV=5., MINGZ=0.001)

!FILLING NORM WITH ZEROS
DO 10 I=1, 4, 1
    NORM (I)=0.
10 CONTINUE

FUNC1=0.

!TRANSLATE VECTOR P TO MATRIXES: [AS], [VARW], [COVW], M3Z, [M3W], [GZ]
CALL TRANS (K, P, AS, VARW, COVW, M3Z, M3W, GZ)

!CALCULATING VECTOR [MTH1]
CALL TH1 (K, AS, GZ, VARW, VARXS, MTH1)

!CALCULATING VECTOR [MTH2]
CALL TH2 (AS, M3Z, M3W, M3XS, MTH2)

!CALCULATING VECTOR [MTH3]
CALL TH3 (K, AS, GZ, COVW, COVXS, MTH3)

!CALCULATING VECTOR [MTH4]
CALL TH4 (K, AS, GZ, VARW, COVW, COVET, MTH4)

!CALCULATING VECTOR [NORM]
DO 20 I=1, 12, 1
    NORM (1)=NORM (1)+MTH1 (I)**2.
    NORM (2)=NORM (2)+MTH2 (I)**2.
    NORM (3)=NORM (3)+MTH3 (I)**2.
20 CONTINUE

DO 30 I=1, K+1, 1
    NORM (4)=NORM (4)+MTH4 (I)**2.
30 CONTINUE
!CALCULATING FUNC
DO 40 I=1, 4, 1
    FUNC1=FUNC1+L (I)*NORM (I)
40 CONTINUE

!!!!!!!!!!!!!!!!PENALTIES!!!!!!!!!!!!!!

! PENALTY FOR VAR LESS OR EQUAL TO ZERO (PENAL1)
CALL PENALTY1 (K, MINVAR, VARW, GZ, PENAL1)
```

```

!PENALTY FOR LARGE COV AMONG MONTHS (PENAL2)
PENAL2=0.
!GENERATING VECTOR [MTH6]
CALL TH6 (MAXR, VARW, COVW, MTH6)

DO 50 I=1,12,1
    PENAL2=PENAL2+P2*MTH6(I)**2.
50 CONTINUE

!PENALTY FOR NEGATIVE OR ZERO AUTOCOVIARANCES OF Z, FOR LAG
!GRATER THAN ZERO (PENAL3)
CALL PENALTY3 (K, MINGZ, GZ, PENAL3)

!PENALTY FOR LARGE AUTOCOVIARANCES OF Z (PENAL4)
CALL PENALTY4 (K, MAXR, GZ, PENAL4)

!PENALTY FOR LARGE SKEWNESS OF W (PENAL5)
CALL PENALTY5 (MAXXV, M3W, VARW, PENAL5)

!VALUE OF OBJECTIVE FUNCTION WITH PENALTIES
FUNC1=FUNC1+PENAL1+PENAL2+PENAL3+PENAL4+PENAL5

RETURN
END

!SUBROUTINE FOR CALCULATING PENAL5
SUBROUTINE PENALTY5 (MAXXV, M3W, VARW, PENAL5)
REAL*8 MAXXV, M3W(12), VARW(12), PENAL5

REAL*8 FLAG, P5 !ITS THE PENALTY FACTOR
PARAMETER (P5=1.E10)
INTEGER*4 I

PENAL5=0.

DO 10 I=1,12,1
    FLAG=(M3W(I)**2.)-(MAXXV**2.)*(VARW(I)**3.)
    IF (FLAG.GE.0.) THEN
        PENAL5=PENAL5+P5*FLAG
    ENDIF
10 CONTINUE

RETURN
END

!SUBROUTINE FOR CALCULATING PENAL4
SUBROUTINE PENALTY4 (K, MAXR, GZ, PENAL4)
INTEGER*4 K
REAL*8 MAXR, GZ(12*K+12), PENAL4

REAL*8 FLAG, P4 !ITS THE PENALTY FACTOR
PARAMETER (P4=1.E10)
INTEGER*4 I

PENAL4=0.

DO 10 I=2,12*K+12,1
    FLAG=GZ(I)-MAXR*GZ(1)

```

```

                IF (FLAG.GE.0.) THEN
                    PENAL4=PENAL4+P4* (FLAG**2.)
                ENDIF
10 CONTINUE

RETURN
END

!SUBROUTINE FOR CALCULATING PENAL3
SUBROUTINE PENALTY3 (K,MINGZ,GZ,PENAL3)
INTEGER*4 K
REAL*8 MINGZ,GZ (12*K+12),PENAL3

REAL*8 FLAG,P3      !ITS THE PENALTY FACTOR
PARAMETER (P3=1.E10)
INTEGER*4 I

PENAL3=0.

DO 10 I=2,12*K+12,1
    FLAG=MINGZ-GZ (I)
    IF (FLAG.GE.0.) THEN
        PENAL3=PENAL3+P3* (FLAG**2.)
    ENDIF
10 CONTINUE

RETURN
END

!SUBROUTINE FOR GENERATING PENALTY VECTOR TH6 (FOR LARGE COVW)
SUBROUTINE TH6 (MAXR,VARW,COVW,MTH6)
REAL*8 MAXR,VARW (12),COVW (12),MTH6 (12)

REAL*8 FLAG
INTEGER*4 I

!FILLING [MTH6] WITH ZEROS
DO 10 I=1,12,1
    MTH6 (I)=0.
10 CONTINUE

!CALCULATING [MTH6]
!FIRST ELEMENT
FLAG=COVW (1)**2.- (MAXR**2.)*VARW (1)*VARW (12)
IF (FLAG.GE.0.) THEN
    MTH6 (1)=FLAG
ENDIF

!NEXT 11 ELEMENTS

DO 20 I=2,12,1
    FLAG=COVW (I)**2.- (MAXR**2.)*VARW (I)*VARW (I-1)
    IF (FLAG.GE.0.) THEN
        MTH6 (I)=FLAG
    ENDIF
20 CONTINUE

RETURN
END

```

```

!SUBROUTINE FOR PENALTY FOR LOW VAR
SUBROUTINE PENALTY1 (K,MINVAR,VARW,GZ,PENAL1)
INTEGER*4 K
REAL*8 MINVAR,VARW(12),GZ(12*K+12),PENAL1

REAL*8 P1,FLAG
PARAMETER(P1=1.E10)      !ITS THE PENALTY FACTOR
INTEGER*4 I

PENAL1=0.

DO 10 I=1,12,1
    FLAG=MINVAR-VARW(I)
    IF(FLAG.GE.0.) THEN
        PENAL1=PENAL1+P1*(VARW(I)-MINVAR)**2.
    ENDIF
10 CONTINUE

FLAG=MINVAR-GZ(1)
IF(FLAG.GE.0.) THEN
    PENAL1=PENAL1+P1*(GZ(1)-MINVAR)**2.
ENDIF

RETURN
END

!SUBROUTINE FOR CALCULATING VECTOR [MTH4]
SUBROUTINE TH4(K,AS,GZ,VARW,COVW,COVET,MTH4)
INTEGER*4 K
REAL*8 AS(12),GZ(12*K+12),VARW(12),COVW(12),COVET(K+1),MTH4(K+1)

INTEGER*4 I,J,L
REAL*8 SUM1,SUM2,SUM3,SUM4

!FILLING ZEROS
SUM1=0.
SUM2=0.
SUM3=0.
SUM4=0.

DO 5 I=1,K+1,1
    MTH4(I)=0.
5 CONTINUE

!FIRST ELEMENT VAR OF THE YEAR
DO 10 I=1,12,1
    SUM1=SUM1+AS(I)**2.
10 CONTINUE

DO 20 I=1,11,1
    DO 30 J=I+1,12,1
        SUM2=SUM2+AS(I)*AS(J)*GZ(J-I+1)
    30 CONTINUE
20 CONTINUE

DO 40 I=1,12,1
    SUM3=SUM3+VARW(I)
40 CONTINUE

DO 50 I=2,12,1
    SUM4=SUM4+COVW(I)

```

```

50 CONTINUE

MTH4 (1) =GZ (1) *SUM1+2.*SUM2+SUM3+2.*SUM4

!NEXT K ELEMENTS
DO 60 L=1,K,1
    DO 70 J=1,12,1
        DO 80 I=1,12,1
            MTH4 (L+1) =MTH4 (L+1) +AS (J) *AS (I) *GZ (12*L-I+J+1)
        80 CONTINUE
    70 CONTINUE

    IF (L.EQ.1) THEN
        MTH4 (L+1) =MTH4 (L+1) +COVW (L)
    ENDIF
60 CONTINUE

!FIXING DIFFERENCES
DO 90 I=1,K+1,1
    MTH4 (I) =MTH4 (I) -COVET (I)
90 CONTINUE

RETURN
END

!SUBROUTINE FOR CALCULATING VECTOR [MTH3]
SUBROUTINE TH3 (K, AS, GZ, COVW, COVXS, MTH3)
INTEGER*4 K
REAL*8 AS (12), GZ (12*K+12), COVW (12), COVXS (12), MTH3 (12)

INTEGER*4 I

!FIRST ELEMENT
MTH3 (1) = (AS (12) *AS (1) *GZ (2) +COVW (1)) -COVXS (1)

!NEXT ELEMENTS
DO 10 I=2,12,1
    MTH3 (I) = (AS (I) *AS (I-1) *GZ (2) +COVW (I)) -COVXS (I)
10 CONTINUE

RETURN
END

!SUBROUTINE FOR CALCULATING VECTOR [MTH2]
SUBROUTINE TH2 (AS, M3Z, M3W, M3XS, MTH2)
REAL*8 AS (12), M3Z, M3W (12), M3XS (12), MTH2 (12)

INTEGER*4 I

!CALCULATING [MTH2]
DO 20 I=1,12,1
    MTH2 (I) = ( (AS (I) **3.) *M3Z+M3W (I)) -M3XS (I)
20 CONTINUE

RETURN
END

!SUBROUTINE FOR CALCULATING VECTOR [MTH1]
SUBROUTINE TH1 (K, AS, GZ, VARW, VARXS, MTH1)

```

```

INTEGER*4 K
REAL*8 AS (12) , GZ (12*K+12) , VARW (12) , VARXS (12) , MTH1 (12)

INTEGER*4 I

!GENERATING MATRIX MTH1
DO 20 I=1,12,1
    MTH1 (I) = ( AS (I) **2.) *GZ (1) +VARW (I) ) -VARXS (I)
20 CONTINUE

RETURN
END

```

```

!SUBROUTINE FOR TRANSLATING VECTOR P TO MATRIXES
SUBROUTINE TRANS (K, P, AS, VARW, COVW, M3Z, M3W, GZ)
INTEGER*4 K
REAL*8 P (12*K+61) , AS (12) , VARW (12) , COVW (12) , M3Z, M3W (12) , GZ (12*K+12)

INTEGER*4 I

DO 10 I=1,12,1
    AS (I) =P (I)
    VARW (I) =P (12+I)
    COVW (I) =P (24+I)
    M3W (I) =P (37+I)
10 CONTINUE

M3Z=P (37)

DO 20 I=1,12*K+12,1
    GZ (I) =P (49+I)
20 CONTINUE

RETURN
END

```

Υπορουτίνες υπολογισμού παραγώγου αντικειμενικής συναρτήσεως

```

FUNCTION DF1DIM1 (NPAR, K, P, L, VARXS, COVXS, COVET, M3XS, X, XI)
INTEGER*4 NPAR, K
REAL*8 P (NPAR) , L (4) , VARXS (12) , COVXS (12) , COVET (K+1) , M3XS (12) , X, XI (NPAR)
REAL*8 DF1DIM1
INTEGER*4 J
REAL*8 XT (NPAR) , DF (NPAR)

DO 10 J=1, NPAR, 1
    XT (J) =P (J) +X*XI (J)
10 CONTINUE

CALL DFUNC1 (K, XT, VARXS, M3XS, COVXS, COVET, L, DF)

DF1DIM1=0.
DO 20 J=1, NPAR, 1
    DF1DIM1=DF1DIM1+DF (J) *XI (J)
20 CONTINUE

RETURN
END

```



```

SUBROUTINE DFUNC1 (K, P, VARXS, M3XS, COVXS, COVET, L, DF)
INTEGER*4 K
REAL*8 VARXS (12), M3XS (12), COVXS (12), COVET (K+1), P (12*K+61), L (4),
DF (12*K+61)

REAL*8 AS (12), VARW (12), COVW (12), M3Z, M3W (12), GZ (12*K+12)
REAL*8 MTH1 (12), MTH2 (12), MTH3 (12), MTH4 (K+1), MTH6 (12)
INTEGER*4 NR
PARAMETER (NR=12)

!DERIVATIVE MATRIXES
REAL*8
MP1 (12, 12*K+61), MP2 (12, 12*K+61), MP3 (12, 12*K+61), MP4 (K+1, 12*K+61),
MP6 (12, 12*K+61)

!DERIVATIVE VECTORS
REAL*8 DF1 (12*K+61), DF2 (12*K+61), DF3 (12*K+61), DF4 (12*K+61)

!PENALTIES
REAL*8 MINVAR, MAXR, MAXXV, MINGZ
REAL*8 P2 !ITS THE PENALTY FACTOR FOR LARGE COVW
PARAMETER (P2=1.E10) !MUST HAVE THE SAME VALUE AS IN FUNC1
REAL*8 DF5 (12*K+61), DF6 (12*K+61), DF7 (12*K+61), DF8 (12*K+61), DF9 (12*K+61)
PARAMETER (MINVAR=0.05, MAXR=0.9, MAXXV=5., MINGZ=0.001)
!MUST BE TE SAMEWITH FUNC1

!COUNTERS
INTEGER*4 I

!TRANSLATE VECTOR P TO MATRIXES: [AS], [VARW], [COVW], M3Z, [M3W], [GZ]
CALL TRANS (K, P, AS, VARW, COVW, M3Z, M3W, GZ) !USED BY FUNC1 AS WELL

!NORMAL DERIVATIVES (NO PENALTIES)

!CALCULATING VECTORS [MTH1], [MTH2], [MTH3], [MTH4]
CALL TH1 (K, AS, GZ, VARW, VARXS, MTH1) !USED BY FUNC1 AS WELL
CALL TH2 (AS, M3Z, M3W, M3XS, MTH2) !USED BY FUNC1 AS WELL
CALL TH3 (K, AS, GZ, COVW, COVXS, MTH3) !USED BY FUNC1 AS WELL
CALL TH4 (K, AS, GZ, VARW, COVW, COVET, MTH4) !USED BY FUNC1 AS WELL

!CALCULATING MATRIX [MP1] (DERIVATIVE OF TH1)
CALL CALCMP1 (K, AS, GZ, MP1)

!CALCULATING MATRIX [MP2] (DERIVATIVE OF TH2)
CALL CALCMP2 (K, AS, M3Z, MP2)

!CALCULATING MATRIX [MP3] (DERIVATIVE OF TH3)
CALL CALCMP3 (K, AS, GZ, MP3)

!CALCULATING MATRIX [MP4] (DERIVATIVE OF TH4)
CALL CALCMP4 (K, AS, GZ, MP4)

!CALCULATING DERIVATIVE VECTORS
CALL MULVA (NR, 12*K+61, MTH1, MP1, DF1)
CALL MULVA (NR, 12*K+61, MTH2, MP2, DF2)
CALL MULVA (NR, 12*K+61, MTH3, MP3, DF3)
CALL MULVA (K+1, 12*K+61, MTH4, MP4, DF4)

!CALCULATING [DF] WITHOUT PENALTIES
DO 10 I=1, 12*K+61, 1
DF (I) = 2. * (L (1) * DF1 (I) + L (2) * DF2 (I) + L (3) * DF3 (I) + L (4) * DF4 (I))

```

```

10 CONTINUE

!!!!!!!!!!!!PENALTIES!!!!!!!!!!!!

!CALCULATING DERIVATIVE VECTOR [DF5] PENALTY FOR LOW VAR
CALL CALCDF5(K,MINVAR,GZ,VARW,DF5)

!CALCULATING DERIVATIVE VECTOR [DF6] PENALTY FOR LARGE COVW
CALL TH6(MAXR,VARW,COVW,MTH6)
CALL CALCMP6(K,MAXR,VARW,COVW,MP6)
CALL MULVA(NR,12*K+61,MTH6,MP6,DF6)
DO 20 I=1,12*K+61,1
    DF6(I)=DF6(I)*2.*P2
20 CONTINUE

!CALCULATING DERIVATIVE VECTOR [DF7] PENALTY FOR
!ZERO OR NEGATIVE AUTOCORRELATION OF Z
CALL CALCDF7(K,MINGZ,GZ,DF7)

!CALCULATING DERIVATIVE VECTOR [DF8] PENALTY FOR
!LARGE AUTOCORRELATION OF Z
CALL CALCDF8(K,MAXR,GZ,DF8)

!CALCULATING DERIVATIVE VECTOR [DF9] PENALTY FOR
!LARGE SKEW OF W
CALL CALCDF9(K,MAXXV,VARW,M3W,DF9)

!DERIVATIVE WITH PENALTIES
DO 30 I=1,12*K+61,1
    DF(I)=DF(I)+DF5(I)+DF6(I)+DF7(I)+DF8(I)+DF9(I)
30 CONTINUE

RETURN
END

!SUBROUTINE FOR CALCULATING DERIVATIVE VECTOR [DF9]
!PENALTY FOR LARGE SKEW OF W
SUBROUTINE CALCDF9(K,MAXXV,VARW,M3W,DF9)
INTEGER*4 K
REAL*8 MAXXV,VARW(12),M3W(12),DF9(12*K+61)

REAL*8 FLAG,P5 !ITS THE PENALTY FACTOR
PARAMETER(P5=1.E10) !MUST BE THE SAME AS IN SUBROUTINE PENALTY5
(FUNC1)

INTEGER*4 I,J

!FILLING [DF9] WITH ZEROS
DO 10 I=1,12*K+61,1
    DF9(I)=0.
10 CONTINUE

!FILLING [DF9] WITH ELEMENTS
DO 20 I=1,12,1
    J=12+I
    FLAG=M3W(I)**2.-(MAXXV**2.)*VARW(I)**3.
    IF(FLAG.GE.0.)THEN
        DF9(J)=-3*(MAXXV**2.)*(VARW(I)**2.)*P5
    ENDIF
20 CONTINUE

```

```

DO 30 I=1,12,1
  J=37+I
  FLAG=M3W(I)**2.-(MAXXV**2.)*VARW(I)**3.
  IF(FLAG.GE.0.)THEN
    DF9(J)=2.*M3W(I)*P5
  ENDIF
30 CONTINUE

RETURN
END

!SUBROUTINE FOR CALCULATING DERIVATIVE VECTOR [DF8]
!PENALTY FOR LARGE AUTOCORRELATION OF Z
SUBROUTINE CALCDF8(K,MAXR,GZ,DF8)
INTEGER*4 K
REAL*8 MAXR,GZ(12*K+12),DF8(12*K+61)

REAL*8 FLAG,P4      !ITS THE PENALTY FACTOR
PARAMETER(P4=1.E10)!MUST BE THE SAME AS IN SUBROUTINE PENALTY4 (FUNC1)

INTEGER*4 I,S,J

!FILLING [DF8] WITH ZEROS
DO 10 I=1,12*K+61,1
  DF8(I)=0.
10 CONTINUE

!FILLING [DF8] WITH ELEMENTS
DO 20 I=1,12*K+11,1
  FLAG=GZ(I+1)-MAXR*GZ(1)
  IF(FLAG.GE.0.)THEN
    DF8(50)=DF8(50)-2.*MAXR*FLAG*P4
  ENDIF
20 CONTINUE

DO 30 S=1,12*K+11,1
  J=50+S
  FLAG=GZ(S+1)-MAXR*GZ(1)
  IF(FLAG.GE.0.)THEN
    DF8(J)=2.*FLAG*P4
  ENDIF
30 CONTINUE

RETURN
END

!SUBROUTINE FOR CALCULATING DERIVATIVE VECTOR DF7
!(PENALTY FOR ZERO OR NEGATIVE AUTOCORRELATION OF Z)
SUBROUTINE CALCDF7(K,MINGZ,GZ,DF7)
INTEGER*4 K
REAL*8 MINGZ,GZ(12*K+12),DF7(12*K+61)

REAL*8 FLAG,P3      !ITS THE PENALTY FACTOR
PARAMETER(P3=1.E10)!MUST BE THE SAME AS IN SUBROUTINE PENALTY3
(FUNC1)
INTEGER*4 S,J

!FILLING [DF7] WITH ZEROS

```

```

DO 10 J=1,12*K+61,1
    DF7(J)=0.
10 CONTINUE

DO 20 S=1,12*K+11,1
    J=50+S
    FLAG=MINGZ-GZ(S+1)
    IF(FLAG.GE.0.) THEN
        DF7(J)=-2.*P3*FLAG
    ENDIF
20 CONTINUE

RETURN
END

!CALCULATING DERIVATIVE MATRIX [MP6] REQUIRED FOR THE PENALTY OF LARGE
!COV
SUBROUTINE CALCMP6(K,MAXR,VARW,COVW,MP6)
INTEGER*4 K
REAL*8 MAXR,VARW(12),COVW(12),MP6(12,12*K+61)

INTEGER*4 I,J

!FILLING [MP6] WITH ZEROS
DO 10 I=1,12,1
    DO 20 J=1,12*K+61,1
        MP6(I,J)=0.
    20 CONTINUE
10 CONTINUE

!FILLING MP6 WITH ELEMENTS
MP6(1,13)=- (MAXR**2.) *VARW(12)

DO 30 I=2,12,1
    J=12+I
    MP6(I,J)=- (MAXR**2.) *VARW(I-1)
30 CONTINUE

MP6(1,24)=- (MAXR**2.) *VARW(1)

DO 40 I=2,12,1
    J=11+I
    MP6(I,J)=- (MAXR**2.) *VARW(I)
40 CONTINUE

DO 50 I=1,12,1
    J=24+I
    MP6(I,J)=2*COVW(I)
50 CONTINUE

RETURN
END

!SUBROUTINE FOR CALCULATING PENALTY VECTOR [DF5] FOR LOW VAR
SUBROUTINE CALCDF5(K,MINVAR,GZ,VARW,DF5)
INTEGER*4 K
REAL*8 MINVAR,GZ(12*K+12),VARW(12),DF5(12*K+61)

REAL*8 P1,FLAG
PARAMETER(P1=1.E10)      !ITS THE PENALTY FACTOR

```

```

!(MUST BE THE SAME WITH THE PENALTY1 SUBROUTINE OF FUNC1)

INTEGER*4 I,J

!FILLING [DF5] WITH ZEROS
DO 10 I=1,12*K+61,1
    DF5(I)=0.
10 CONTINUE

DO 20 J=13,24,1
    I=J-12
    FLAG=MINVAR-VARW(I)
    IF (FLAG.GE.0.) THEN
        DF5(J)=-2*FLAG*P1
    ENDIF
20 CONTINUE

FLAG=MINVAR-GZ(1)
IF (FLAG.GE.0.) THEN
    DF5(50)=-2*FLAG*P1
ENDIF

RETURN
END

!SUBROUTINE FOR CALCULATING MATRIX [MP4]
SUBROUTINE CALCMP4(K,AS,GZ,MP4)
INTEGER*4 K
REAL*8 AS(12),GZ(12*K+12),MP4(K+1,12*K+61)

INTEGER*4 S,J,L,I,M
REAL*8 SUM1,SUM2

!FILLING [MP4] WITH ZEROS
DO 10 S=1,K+1,1
    DO 20 J=1,12*K+61,1
        MP4(S,J)=0.
    20 CONTINUE
10 CONTINUE

!FILLING [MP4] WITH ELEMENTS

!FIRST ROW
DO 30 J=1,12,1
    SUM1=0.
    SUM2=0.

    DO 40 L=J+1,12,1
        SUM1=SUM1+AS(L)*GZ(L-J+1)
    40 CONTINUE

    DO 50 L=1,J-1,1
        SUM2=SUM2+AS(L)*GZ(J-L+1)
    50 CONTINUE

    MP4(1,J)=2.*(AS(J)*GZ(1)+SUM1+SUM2)

30 CONTINUE

DO 60 J=13,24,1
    MP4(1,J)=1.

```

```

60 CONTINUE

DO 70 J=26,36,1
    MP4(1,J)=2.
70 CONTINUE

DO 80 J=1,12,1
    MP4(1,50)=MP4(1,50)+AS(J)**2.
80 CONTINUE

DO 90 J=51,61,1
    I=J-50
    DO 100 L=1,12-I,1
        MP4(1,J)=MP4(1,J)+AS(L)*AS(L+I)
    100 CONTINUE
90 CONTINUE

!NEXT K ROWS
MP4(2,25)=1.

DO 110 S=2,K+1,1
    M=S-1
    DO 120 J=1,12,1
        DO 130 L=1,12,1
            MP4(S,J)=MP4(S,J)+AS(L)*(GZ(12*M+J-L+1)+GZ(12*M-
J+L+1))
        130 CONTINUE
    120 CONTINUE
110 CONTINUE

DO 140 S=2,K+1,1
    DO 150 L=1,23,1
        J=50+(S-2)*12+L

        IF(L.LE.11) THEN
            DO 160 I=1,L,1
                MP4(S,J)=MP4(S,J)+AS(I)*AS(12+I-L)
            160 CONTINUE
        ENDIF

        IF(L.EQ.12) THEN
            DO 170 I=1,12,1
                MP4(S,J)=MP4(S,J)+AS(I)**2.
            170 CONTINUE
        ENDIF

        IF(L.GE.13) THEN
            DO 180 I=L-12+1,12,1
                MP4(S,J)=MP4(S,J)+AS(I)*AS(I-L+12)
            180 CONTINUE
        ENDIF

    150 CONTINUE
140 CONTINUE

RETURN
END

```

```

!SUBROUTINE FOR CALCULATING MATRIX [MP3]
SUBROUTINE CALCMP3(K,AS,GZ,MP3)
INTEGER*4 K
REAL*8 AS(12),GZ(12*K+12),MP3(12,12*K+61)

```

```

INTEGER*4 S,J

!FILLING [MP3] WITH ZEROS
DO 10 S=1,12,1
    DO 20 J=1,12*K+61,1
        MP3(S,J)=0.
    20 CONTINUE
10 CONTINUE

!FILLING [MP3] WITH ELEMENTS
!FIRST ROW
MP3(1,1)=AS(12)*GZ(2)
MP3(1,12)=AS(1)*GZ(2)
MP3(1,25)=1.
MP3(1,51)=AS(1)*AS(12)

!NEXT 11 ROWS
DO 30 S=2,12,1
    DO 40 J=1,12*K+61,1

        IF(J.EQ.S) THEN
            MP3(S,J)=AS(S-1)*GZ(2)
        ENDIF

        IF(J.EQ.(S-1)) THEN
            MP3(S,J)=AS(S)*GZ(2)
        ENDIF

        IF(J.EQ.(S+24)) THEN
            MP3(S,J)=1.
        ENDIF

        IF(J.EQ.51) THEN
            MP3(S,J)=AS(S-1)*AS(S)
        ENDIF

    40 CONTINUE
30 CONTINUE

RETURN
END

!SUBROUTINE FOR CALCULATING MATRIX [MP2]
SUBROUTINE CALCMP2(K,AS,M3Z,MP2)
INTEGER*4 K
REAL*8 AS(12),M3Z,MP2(12,12*K+61)

INTEGER*4 S,J

!FILLING [MP2] WITH ZEROS
DO 10 S=1,12,1
    DO 20 J=1,12*K+61,1
        MP2(S,J)=0.
    20 CONTINUE
10 CONTINUE

!FILLING [MP2] WITH ELEMENTS
DO 30 S=1,12,1
    DO 40 J=1,12*K+61,1

```

```

        IF (S.EQ.J) THEN
            MP2 (S,J)=3.*(AS(S)**2.)*M3Z
        ENDIF

        IF (J.EQ.37) THEN
            MP2 (S,J)=AS(S)**3.
        ENDIF

        IF (J.EQ.(37+S)) THEN
            MP2 (S,J)=1.
        ENDIF
    40 CONTINUE
30 CONTINUE

RETURN
END

```

```

!SUBROUTINE FOR CALCULATING MATRIX [MP1]
SUBROUTINE CALCMP1(K,AS,GZ,MP1)
INTEGER*4 K
REAL*8 AS(12),GZ(12*K+12),MP1(12,12*K+61)

INTEGER*4 I,J,S

!FILLING [MP1] WITH ZEROS
DO 10 I=1,12,1
    DO 20 J=1,12*K+61,1
        MP1(I,J)=0.
    20 CONTINUE
10 CONTINUE

!FILLING MP1 WITH ELEMENTS
DO 30 S=1,12,1
    DO 40 J=1,12*K+61,1

        IF (J.EQ.S) THEN
            MP1 (S,J)=2.*AS(S)*GZ(1)
        ENDIF

        IF (J.EQ.(S+12)) THEN
            MP1 (S,J)=1.
        ENDIF

        IF (J.EQ.50) THEN
            MP1 (S,J)=AS(S)**2.
        ENDIF

    40 CONTINUE
30 CONTINUE

RETURN
END

```

Υπορουτίνα πολλαπλασιασμού πίνακα με διάνυσμα

```

SUBROUTINE MULVA(K,N,X,A,Y)
INTEGER*4 K,N
REAL*8 X(K),A(K,N),Y(N)

```



```

INTEGER I, J
REAL*8 SUM

DO 10 J=1, N, 1
    SUM=0.
    DO 20 I=1, K, 1
        SUM=SUM+X(I)*A(I, J)
    20 CONTINUE
    Y(J)=SUM
10 CONTINUE

RETURN
END

```

Z.2 Πρόγραμμα προσδιορισμού αυτοσυνδιασπορών με χρήση του γενικευμένου αντίστροφου μητρώου ελάχιστης νόρμας

Λειτουργία προγράμματος

Το πρόγραμμα χρησιμοποιεί τα αρχεία PARAMETRS.TXT, VARET.TXT, ES.TXT και YCOV1.TXT. Τα αρχεία PARAMETRS.TXT και VARET.TXT χρησιμοποιούνται και από το πρόγραμμα της ενότητας Z.1, ενώ τα αρχεία ES.TXT και YCOV1.TXT δημιουργούνται κατά την εκτέλεση του προγράμματος της ενότητας Z.1. Κατά την εκτέλεσή του το πρόγραμμα δημιουργεί το αρχείο YCOV2.TXT, το οποίο περιέχει τις αυτοσυνδιασπορές της στάσιμης τυχαίας μεταβλητής Y_i έως και χρονικό βήμα μετατόπισης $12(m+1)-1$ (δηλαδή $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{12(m+1)-1}$). Στην συνέχεια παρουσιάζεται ο κώδικας του προγράμματος.

Κυρίως πρόγραμμα

```

PROGRAM EXTEND
INTEGER*4 K, N
REAL*8 H

OPEN (10, FILE='PARAMETERS.TXT')

READ (10, *)
READ (10, *)
READ (10, *)
READ (10, *)
READ (10, *) H
READ (10, *)
READ (10, *)
READ (10, *) K
READ (10, *)
READ (10, *)
READ (10, *)
READ (10, *)

```



```

DO 30 I=1,11,1
    GPREV(I)=GTOT(12*K+1+I)
30 CONTINUE

CALL CALCNEXT(K,N,H,VARET,AS,GPREV,GNEXT)

!FILLING GTOT
DO 40 I=1,12*(N-K),1
    GTOT(12*K+12+I)=GNEXT(I)
40 CONTINUE

!WRITTING OUTPUTFILE
DO 50 I=1,12*N+12
    WRITE(300,1000)GTOT(I)
50 CONTINUE

CLOSE(60)
CLOSE(200)
CLOSE(250)
CLOSE(300)

1000 FORMAT(1X,F15.9,1X)

RETURN
END

```

Υπορουτίνα κυρίως υπολογισμών

```

SUBROUTINE CALCNEXT(K,N,H,VARET,AS,GPREV,GNEXT)
INTEGER*4 K,N
REAL*8 H,VARET,AS(12),GPREV(11),GNEXT(12*(N-K))

REAL*8 A(N-K,12*(N-K)),B(N-K)
REAL*8 AT(12*(N-K),N-K),MAAT(N-K,N-K),L(N-K)

!CALCULATING MATRIX [A]
CALL CALCA(K,N,AS,A)

!CALCULATING VECTOR [B]
CALL CALCB(K,N,H,VARET,AS,GPREV,B)

!FINDING THE TRANSPOSE OF [A]
CALL TRAN(N-K,12*(N-K),A,AT)

!MULTIPLYING [A]*[AT]=[MAAT]
CALL MULTAB(N-K,12*(N-K),A,12*(N-K),N-K,AT,MAAT)

!SOLVING THE LINEAR SYSTEM
CALL THOMAS(MAAT,B,L,N-K)

!FINDING VECTOR [GNEXT]
!MULTIPLYING AN ARRAY WITH A VECTOR [A]*[X]=[Y]
CALL MULTAX(12*(N-K),N-K,AT,L,GNEXT)

RETURN
END

```

Υπορουτίνες προσδιορισμού του προς επίλυση συστήματος

```
SUBROUTINE CALCA(K,N,AS,A)
  INTEGER*4 K,N
  REAL*8 AS(12),A(N-K,12*(N-K))

  INTEGER*4 I,J,X,L,Y

  !FILLING WITH ZEROS
  DO 10 I=1,N-K,1
    DO 20 J=1,12*(N-K),1
      A(I,J)=0.
    20 CONTINUE
  10 CONTINUE

  !FIRST LINE OF THE MATRIX
  DO 30 I=1,12,1
    A(1,I)=A(1,I)+AS(I)**2.
  30 CONTINUE

  DO 40 I=2,12,1
    DO 50 J=1,12-(I-1),1
      A(1,I)=A(1,I)+AS(J)*AS(J+I-1)
    50 CONTINUE
  40 CONTINUE

  !NEXT LINES OF THE MATRIX
  DO 60 X=2,(N-K),1
    DO 70 L=1,23,1
      Y=12*X-23+L
      IF(L.LE.11) THEN
        DO 80 I=1,L,1
          A(X,Y)=A(X,Y)+AS(I)*AS(I+12-L)
        80 CONTINUE
      ENDIF

      IF(L.EQ.12) THEN
        DO 90 I=1,12,1
          A(X,Y)=A(X,Y)+AS(I)**2.
        90 CONTINUE
      ENDIF

      IF(L.GE.13) THEN
        DO 100 I=1,24-L,1
          A(X,Y)=A(X,Y)+AS(I)*AS(I+L-12)
        100 CONTINUE
      ENDIF
    70 CONTINUE
  60 CONTINUE

  RETURN
  END
```

```
SUBROUTINE CALCB(K,N,H,VARET,AS,GPREV,B)
  INTEGER*4 K,N
  REAL*8 H,VARET,AS(12),GPREV(11),B(N-K)
```

```
  INTEGER*4 I,J,L
  REAL*8 SUM1,SUM2
```

```
  J=0
```

```

DO 10 I=K+1,N,1
    J=J+1
    B(J)=VARET*(0.5*((DFLOAT(I+1))**(2.*H)+(DFLOAT(I-1))**(2.*H))-
DFLOAT(I)**(2.*H))
10 CONTINUE

SUM2=0.
DO 20 L=1,11,1
    SUM1=0.
    DO 30 I=1,12-L,1
        SUM1=SUM1+AS(I)*AS(I+L)
    30 CONTINUE
    SUM2=SUM2+GPREV(L)*SUM1
20 CONTINUE

B(1)=B(1)-SUM2

RETURN
END

```

Υπορουτίνα αναστροφής πίνακα

```

SUBROUTINE TRAN(NA,MA,A,AT)
INTEGER*4 NA,MA
REAL*8 A(NA,MA),AT(MA,NA)

DO 10 I=1,NA,1
    DO 20 J=1,MA,1
        AT(J,I)=A(I,J)
    20 CONTINUE
10 CONTINUE

RETURN
END

```

Υπορουτίνα πολλαπλασιασμού δύο πινάκων

```

SUBROUTINE MULTAB(NA,MA,A,NB,MB,B,C)
INTEGER*4 NA,NB,MA,MB
REAL*8 A(NA,MA),B(NB,MB),C(NA,MB)

INTEGER*4 I,J,K
REAL*8 SUM

IF(MA.NE.NB) THEN
WRITE(*,*)'CANNOT MULTIPLY MATRIXES'
STOP
ENDIF

DO 10 I=1,NA,1
    DO 20 J=1,MB,1
        SUM=0.
        DO 30 K=1,NB,1
            SUM=SUM+A(I,K)*B(K,J)
        30 CONTINUE
        C(I,J)=SUM
    20 CONTINUE
10 CONTINUE

RETURN

```

END

Υπορουτίνα επίλυσης τριδιαγώνιου συστήματος με την μέθοδο Thomas

```
SUBROUTINE THOMAS (A,B,X,N)
INTEGER*4 N,I,J
REAL*8 A(N,N),B(N),X(N),Y(N),L(N,N),U(N,N),SUM

! L,U MATRIX FORMATION
DO 10 I=1,N,1
DO 20 J=1,N,1
L(I,J)=0
20 CONTINUE
10 CONTINUE
DO 30 I=1,N,1
DO 40 J=1,N,1
U(I,J)=0
40 CONTINUE
U(I,I)=1
30 CONTINUE
DO 50 I=1,N,1
IF(I.EQ.1)GOTO 60
IF(I.EQ.N)GOTO 61
L(I,I-1)=A(I,I-1)
L(I,I)=A(I,I)-L(I,I-1)*U(I-1,I)
IF(ABS(L(I,I)).LE.0.00001)WRITE(*,*)'ZERO VALUE ELEMENT AT THE MAIN
DIAGONAL'
IF(ABS(L(I,I)).LE.0.00001)STOP
U(I,I+1)=A(I,I+1)/L(I,I)
GOTO 70
60 CONTINUE
L(I,I)=A(I,I)
U(I,I+1)=A(I,I+1)/L(I,I)
GOTO 70
61 CONTINUE
L(I,I-1)=A(I,I-1)
L(I,I)=A(I,I)-L(I,I-1)*U(I-1,I)
GOTO 70
70 CONTINUE
50 CONTINUE
!
! Y VECTOR CALCULATION USING THE LINEAR SYSTEM L*Y=B
DO 80 I=1,N,1
IF(I.EQ.1)GOTO 90
SUM=0
DO 100 J=1,I-1,1
SUM=SUM+L(I,J)*Y(J)
100 CONTINUE
Y(I)=(B(I)-SUM)/L(I,I)
GOTO 110
90 CONTINUE
Y(1)=B(1)/L(1,1)
110 CONTINUE
80 CONTINUE
!
! X VECTOR CALCULATION USING THE LINEAR SYSTEM U*X=Y
DO 120 I=N,1,-1
IF(I.EQ.N)GOTO 130
SUM=0
DO 140 J=I+1,N,1
SUM=SUM+U(I,J)*X(J)
```

```

140 CONTINUE
X(I)=(Y(I)-SUM)/U(I,I)
GOTO 150
130 CONTINUE
X(N)=Y(N)/U(N,N)
150 CONTINUE
120 CONTINUE
RETURN
END

```

Υπορουτίνα πολλαπλασιασμού πίνακα με διάνυσμα

```

SUBROUTINE MULVA(K,N,X,A,Y)
INTEGER*4 K,N
REAL*8 X(K),A(K,N),Y(N)

INTEGER I,J
REAL*8 SUM

DO 10 J=1,N,1
    SUM=0.
    DO 20 I=1,K,1
        SUM=SUM+X(I)*A(I,J)
    20 CONTINUE
    Y(J)=SUM
10 CONTINUE

RETURN
END

```

Z.3 Πρόγραμμα προσδιορισμού των παραμέτρων του μοντέλου SMA

Λειτουργία προγράμματος

Το πρόγραμμα χρησιμοποιεί το αρχείο PARAMETRS.TXT, το οποίο χρησιμοποιείται από τα προγράμματα των ενότητων Z.1 και Z.2, καθώς και το αρχείο YCOV2.TXT που δημιουργείται κατά την εκτέλεση του προγράμματος της ενότητας Z.2. Κατά την εκτέλεσή του το πρόγραμμα, δημιουργεί το αρχείο YFACTORS.TXT, το οποίο περιέχει τις παραμέτρους α_j ($j = 0, \dots, 12(m+1)-1$) του μοντέλου SMA. Στην συνέχεια παρουσιάζεται ο κώδικας του προγράμματος σε γλώσσα Fortran.

Κυρίως πρόγραμμα

```

PROGRAM SMAFAC
INTEGER*4 N

OPEN(10,FILE='PARAMETERS.TXT')

READ(10,*)
READ(10,*)
READ(10,*)
READ(10,*)

```



```

        SPEC1(I)=DMAX1(SPEC1(I),MINVAL)
20 CONTINUE

CALL INVPOWSPEC(12*N+12,SPEC1,INSPEC1)

INSPEC1(1)=AUTOCOV(1)
INSPEC1(2)=AUTOCOV(2)

CALL POWSPEC(12*N+12,INSPEC1,SPEC1)

DO 30 I=1,12*N+12,1
        SPEC1(I)=DSQRT(2.*DMAX1(SPEC1(I),MINVAL))
30 CONTINUE

CALL INVPOWSPEC(12*N+12,SPEC1,INSPEC1)

!WRITTING RESULTS
DO 40 I=1,12*N+12,1
        WRITE(400,1000)INSPEC1(I)
40 CONTINUE

CLOSE(300)
CLOSE(400)

1000 FORMAT(1X,F15.9,1X)

RETURN
END

```

Υπορουτίνα υπολογισμού φάσματος ισχύος (μετασχηματισμός Fourier)

```

SUBROUTINE POWSPEC(N,G,SPEC)
INTEGER*4 N
REAL*8 G(N),SPEC(N)

REAL*8 A(N,2),PI
INTEGER*4 I,J

PI=4.*ATAN(1.)

J=0
DO 10 I=0,N-1,1
        J=J+1
        A(J,1)=DFLOAT(I)/2./DFLOAT(N-1)
        A(J,2)=0.
10 CONTINUE

DO 20 I=1,N,1
A(I,2)=2.*G(1)
        DO 30 J=2,N,1
                A(I,2)=A(I,2)+4.*G(J)*DCOS(2.*PI*DFLOAT(J-1)*A(I,1))
        30 CONTINUE
20 CONTINUE

DO 40 I=1,N,1
        SPEC(I)=A(I,2)
40 CONTINUE

RETURN
END

```

Υπορουτίνα αντιστροφου μετασχηματισμού Fourier

```
SUBROUTINE INVPOWSPEC (N, S, G)
INTEGER*4 N
REAL*8 G (N) , S (N)

INTEGER*4 I, J, L
REAL*8 A (N, 2) , B (N) , PI, DW, W

PI=4.*ATAN(1.)
DW=1./2./DFLOAT(N-1)

DO 10 I=0,N-1,1
  A (I+1, 1)=DFLOAT (I)
  A (I+1, 2)=0.
10 CONTINUE

DO 20 I=1,N,1
  J=I-1
  DO 30 L=1,N,1
    W=DFLOAT (L-1) *DW
    B (L)=S (L) *DCOS (2.*PI*DFLOAT (J) *W) *DW
  30 CONTINUE
  B (N)=B (N) /2.
  B (1)=B (1) /2.

  DO 40 L=1,N,1
    A (I, 2)=A (I, 2) +B (L)
  40 CONTINUE

  IF (I.EQ.N) THEN
    A (I, 2)=A (I, 2) /2.
  ENDIF
20 CONTINUE

DO 50 I=1,N,1
  G (I)=A (I, 2)
50 CONTINUE

RETURN
END
```

Z.4 Πρόγραμμα βελτιστοποίησης των παραμέτρων του μοντέλου PFMA

Λειτουργία προγράμματος

Τοποθετούμε στο αρχείο PINIT2.TXT το αρχικό διάνυσμα $\eta = [f_0^1, \dots, f_0^{12}, f_1^1, \dots, f_1^{12}, \xi_r^1, \dots, \xi_r^{12}]^T$, τα στοιχεία του οποίου λαμβάνονται τυχαία. Κατά την εκτέλεσή του το πρόγραμμα χρησιμοποιεί το αρχείο PARAMETERS.TXT, το οποίο χρησιμοποιείται και από τα προγράμματα των ενοτήτων Z.1, Z.2, Z.3 καθώς και τα


```

READ(10,*)
READ(10,*)
READ(10,*)
READ(10,*)
READ(10,*)
READ(10,*)
READ(10,*)
READ(10,*) ITMAX
READ(10,*)
READ(10,*)
READ(10,*) FTOL
READ(10,*)
READ(10,*)
READ(10,*) TOL
READ(10,*)
READ(10,*)
READ(10,*) EPS
READ(10,*)
READ(10,*)
READ(10,*) L2(1)
READ(10,*)
READ(10,*)
READ(10,*) L2(2)
READ(10,*)
READ(10,*)
READ(10,*) L2(3)

NPAR=48
CALL MATR(NPAR, ITMAX, FTOL, EPS, TOL, L2)

CLOSE(10)

STOP
END

```

Υπορουτίνα που καλεί την υπορουτίνα βελτιστοποίησης

```

SUBROUTINE MATR(NPAR, ITMAX, FTOL, EPS, TOL, L2)
INTEGER*4 NPAR, ITMAX
REAL*8 FTOL, EPS, TOL, L2(3)

REAL*8 P(NPAR), VARW(12), COVW(12), M3W(12), FRET
INTEGER*4 I, J, ITER
REAL*8 F(12,2), VARV(12), M3V(12)

OPEN(20, FILE='PINIT2.TXT')
OPEN(30, FILE='VARW.TXT')
OPEN(40, FILE='M3W.TXT')
OPEN(50, FILE='COVW.TXT')
OPEN(80, FILE='PFIN2.TXT')
OPEN(90, FILE='INFO2.TXT')

OPEN(200, FILE='WFACTORS.TXT')
OPEN(210, FILE='VARR.TXT')
OPEN(230, FILE='M3R.TXT')

!READING FROM FILES
DO 10 I=1, NPAR, 1

```

```

        READ(20,*)P(I)
10 CONTINUE

DO 15 I=25,36,1
    P(I)=1.
15 CONTINUE

DO 20 I=1,12,1
    READ(30,*)VARW(I)
    READ(40,*)M3W(I)
    READ(50,*)COVW(I)
20 CONTINUE

!OPTIMIZATION

DO 35 I=1,ITMAX,1

WRITE(*,*)'ITER=',I

CALL FRPRMN2(NPAR,P,VARW,M3W,COVW,L2,FTOL,ITER,FRET,ITMAX,EPS,TOL)

WRITE(*,*)'minF(X)=' ,FRET

35 CONTINUE

WRITE(90,*)'minF(X)=' ,FRET
WRITE(90,*)'NUMBER OF INTERATIONS=' ,I

DO 40 I=1,NPAR,1
    WRITE(80,*)P(I)
40 CONTINUE

CALL TRANS2(NPAR,P,F,VARV,M3V)

DO 50 I=1,12,1
    WRITE(200,1000)(F(I,J),J=1,2,1)
    WRITE(210,*)VARV(I)
    WRITE(230,*)M3V(I)
50 CONTINUE

CLOSE(20)
CLOSE(30)
CLOSE(40)
CLOSE(50)
CLOSE(80)
CLOSE(90)
CLOSE(200)
CLOSE(210)
CLOSE(230)
1000 FORMAT(2(1X,F15.10,1X))
RETURN
END

```

Υπορουτίνα βελτιστοποίησης με την μέθοδο των συζυγών κλίσεων

```

SUBROUTINEFRPRMN2(NPAR,P,VARW,M3W,COVW,L2,FTOL,ITER,FRET,ITMAX,
EPS,TOL)
INTEGER*4 NPAR,ITMAX,ITER
REAL*8 P(NPAR),L2(3),VARW(12),COVW(12),M3W(12)
REAL*8 FRET,FTOL,EPS,TOL

```

```

REAL*8 FUNC2

INTEGER*4 ITS, J
REAL*8 DGG, FP, GAM, GG, G (NPAR), H (NPAR), XI (NPAR)

FP=FUNC2 (P, VARW, M3W, COVW, L2)
CALL DFUNC2 (P, VARW, M3W, COVW, L2, XI)

DO 10 J=1, NPAR, 1
    G (J)=-XI (J)
    H (J)=G (J)
    XI (J)=H (J)
10 CONTINUE

!DO 20 ITS=1, ITMAX, 1
DO 20 ITS=1, 50, 1

    ITER=ITS

    CALL DLINMIN2 (NPAR, P, L2, VARW, COVW, M3W, XI, FRET, TOL)

!    WRITE (*, *) 'INTERATION:', ITER
!    WRITE (*, *) 'F (X) =', FRET

        !NORMAL RETURN
        IF (2. *DABS (FRET-FP) .LE. FTOL* (DABS (FRET) +DABS (FP) +EPS) ) THEN
            RETURN
        ENDIF

FP=FRET
CALL DFUNC2 (P, VARW, M3W, COVW, L2, XI)
GG=0.
DGG=0.
    DO 30 J=1, NPAR, 1
        GG=GG+G (J) **2.
        !    DGG=DGG+XI (J) **2. !FOR FLETCHER-REEVES
        DGG=DGG+ (XI (J) +G (J) ) *XI (J) !FOR POLAK-RIBIERE
    30 CONTINUE
    IF (GG.EQ.0.) THEN
        RETURN !IF GRADIENT IS EXACTLY ZERO (NOT VERY COMMON)
    ENDIF
    GAM=DGG/GG
    DO 40 J=1, NPAR, 1
        G (J)=-XI (J)
        H (J)=G (J) +GAM*H (J)
        XI (J)=H (J)
    40 CONTINUE
20 CONTINUE

!PAUSE 'MAXIMUM ITERATIONS OF SUBROUTINE "FRPRMN" EXCEEDED'
RETURN
END

```

Υπορουτίνες ελαχιστοποιήσεως συναρτήσεων μίας μεταβλητής

```

SUBROUTINE DLINMIN2 (NPAR, P, L2, VARW, COVW, M3W, XI, FRET, TOL)
INTEGER*4 NPAR
REAL*8 P (NPAR), L2 (3), VARW (12), COVW (12), M3W (12), XI (NPAR)
REAL*8 FRET, TOL

REAL*8 DBRENT2

```

```

INTEGER*4 J
REAL*8 AX, BX, FA, FB, FX, XMIN, XX

AX=0.
XX=1.
CALL MNBRAK2 (NPAR, P, L2, VARW, COVW, M3W, XI, AX, XX, BX, FA, FX, FB)

FRET=DBRENT2 (NPAR, P, L2, VARW, COVW, M3W, XI, AX, XX, BX, TOL, XMIN)

DO 10 J=1, NPAR, 1
    P (J) =P (J) +XMIN*XI (J)
10 CONTINUE

!WRITE (*, *) XMIN
RETURN
END

SUBROUTINE MNBRAK2 (NPAR, P, L2, VARW, COVW, M3W, XI, AX, BX, CX, FA, FB, FC)
INTEGER*4 NPAR
REAL*8 P (NPAR), L2 (3), VARW (12), COVW (12), M3W (12), XI (NPAR)
REAL*8 AX, BX, CX, FA, FB, FC
REAL*8 GOLD, GLIMIT, TINY

PARAMETER (GOLD=1.618034, GLIMIT=100., TINY=1.E-10)

REAL*8 F1DIM2
REAL*8 DUM, FU, Q, R, U, ULIM

FA=F1DIM2 (NPAR, P, L2, VARW, COVW, M3W, AX, XI)
FB=F1DIM2 (NPAR, P, L2, VARW, COVW, M3W, BX, XI)

    IF (FB.GT.FA) THEN
        DUM=AX

        AX=BX
        BX=DUM
        DUM=FB
        FB=FA
        FA=DUM
    ENDIF
CX=BX+GOLD* (BX-AX)

FC=F1DIM2 (NPAR, P, L2, VARW, COVW, M3W, CX, XI)

!write (*, *) fa, fb, fc

10 CONTINUE
    IF (FB.GE.FC) THEN
        R= (BX-AX) * (FB-FC)
        Q= (BX-CX) * (FB-FA)
        U=BX- ( (BX-CX) *Q- (BX-AX) *R) / (2.*DSIGN (DMAX1 (DABS (Q-
R), TINY), Q-R))
        ULIM=BX+GLIMIT* (CX-BX)
        IF ( (BX-U) * (U-CX) .GT.0.) THEN
            FU=F1DIM2 (NPAR, P, L2, VARW, COVW, M3W, U, XI)
            IF (FU.LT.FC) THEN
                AX=BX
                FA=FB
                BX=U
            ENDIF
        ENDIF
    ENDIF

```

```

        FB=FU
        RETURN
        ELSE IF (FU.GT.FB) THEN
        CX=U
        FC=FU
        RETURN
        ENDIF
        U=CX+GOLD*(CX-BX)
        FU=F1DIM2(NPAR,P,L2,VARW,COVW,M3W,U,XI)
        ELSE IF((CX-U)*(U-ULIM).GT.0.) THEN
        FU=F1DIM2(NPAR,P,L2,VARW,COVW,M3W,U,XI)
        IF(FU.LT.FC) THEN
        BX=CX
        CX=U
        U=CX+GOLD*(CX-BX)
        FB=FC
        FC=FU
        FU=F1DIM2(NPAR,P,L2,VARW,COVW,M3W,U,XI)
        ENDIF
        ELSE IF((U-ULIM)*(ULIM-CX).GE.0.) THEN
        U=ULIM
        FU=F1DIM2(NPAR,P,L2,VARW,COVW,M3W,U,XI)
        ELSE
        U=CX+GOLD*(CX-BX)
        FU=F1DIM2(NPAR,P,L2,VARW,COVW,M3W,U,XI)
        ENDIF
        AX=BX
        BX=CX
        CX=U
        FA=FB
        FB=FC
        FC=FU
        GOTO 10
    ENDIF
RETURN
END

```

```

FUNCTION DBRENT2(NPAR,P,L2,VARW,COVW,M3W,XI,AX,BX,CX,TOL,XMIN)
INTEGER*4 NPAR
REAL*8 P(NPAR),L2(3),VARW(12),COVW(12),M3W(12),XI(NPAR)
REAL*8 AX,BX,CX,TOL,XMIN

INTEGER*4 ITMAX
REAL*8 ZEPS
PARAMETER(ITMAX=1000,ZEPS=1.E-20)

REAL*8 F1DIM2,DF1DIM2,DBRENT2
INTEGER*4 ITER
REAL*8 A,B,D,D1,D2,DU,DV,DW,DX,E,FU,FV,FW,FX,OLDE,TOL1,TOL2,U,U1,
U2,V,W,X,XM
LOGICAL OK1,OK2

    A=DMIN1(AX,CX)
    B=DMAX1(AX,CX)
    V=BX
    W=V
    X=V
    E=0.
    FX=F1DIM2(NPAR,P,L2,VARW,COVW,M3W,X,XI)
    FV=FX

```



```

FW=FX
DX=DF1DIM2 (NPAR, P, L2, VARW, COVW, M3W, X, XI)
DV=DX
DW=DX

DO 10 ITER=1, ITMAX, 1
    XM=0.5*(A+B)
    TOL1=TOL*DABS(X)+ZEPS
    TOL2=2.*TOL1

    IF (DABS(X-XM) .LE. (TOL2-0.5*(B-A))) GOTO 3
    IF (DABS(E) .GT. TOL1) THEN
        D1=2.*(B-A)
        D2=D1
        IF (DW .NE. DX) D1=(W-X)*DX/(DX-DW)
        IF (DV .NE. DX) D2=(V-X)*DX/(DX-DV)
        U1=X+D1
        U2=X+D2
        OK1=((A-U1)*(U1-B) .GT. 0.) .AND. (DX*D1 .LE. 0.)
        OK2=((A-U2)*(U2-B) .GT. 0.) .AND. (DX*D2 .LE. 0.)
        OLDE=E
        E=D
        IF (.NOT. (OK1 .OR. OK2)) THEN
            GOTO 1
        ELSE IF (OK1 .AND. OK2) THEN
            IF (DABS(D1) .LT. DABS(D2)) THEN
                D=D1
            ELSE
                D=D2
            ENDIF
        ELSE IF (OK1) THEN
            D=D1
        ELSE
            D=D2
        ENDIF
        IF (DABS(D) .GT. DABS(0.5*OLDE)) GOTO 1
        U=X+D
        IF ((U-A .LT. TOL2) .OR. (B-U .LT. TOL2)) D=DSIGN(TOL1, XM-X)
        GOTO 2
    ENDIF
    1 CONTINUE
    IF (DX .GE. 0.) THEN
        E=A-X
    ELSE
        E=B-X
    ENDIF
    D=0.5*E
    2 CONTINUE
    IF (DABS(D) .GE. TOL1) THEN
        U=X+D

        FU=F1DIM2 (NPAR, P, L2, VARW, COVW, M3W, U, XI)
    ELSE
        U=X+DSIGN(TOL1, D)
        FU=F1DIM2 (NPAR, P, L2, VARW, COVW, M3W, U, XI)
        IF (FU .GT. FX) GOTO 3
    ENDIF

    DU=DF1DIM2 (NPAR, P, L2, VARW, COVW, M3W, U, XI)
    IF (FU .LE. FX) THEN
        IF (U .GE. X) THEN
            A=X
        ELSE

```

```

        B=X
        ENDIF
        V=W
        FV=FW
        DV=DW
        W=X
        FW=FX
        DW=DX
        X=U
        FX=FU
        DX=DU
        ELSE
        IF (U.LT.X) THEN
            A=U
        ELSE
            B=U
        ENDIF
        IF ((FU.LE.FW).OR.(W.EQ.X)) THEN
            V=W
            FV=FW
            DV=DW
            W=U
            FW=FU
            DW=DU
        ELSE IF ((FU.LE.FV).OR.(V.EQ.X).OR.(V.EQ.W)) THEN
            V=U
            FV=FU
            DV=DU
        ENDIF
    ENDIF
    10 CONTINUE
    !WRITE(*,*) 'SUBROUTINE DBRENT EXCEEDED MAXIMUM ITERATIONS '
    3 CONTINUE
    XMIN=X
    DBRENT2=FX

    RETURN
    END

```

Υπορουτίνες αντικειμενικής συναρτήσεως

```

FUNCTION F1DIM2 (NPAR, P, L2, VARW, COVW, M3W, X, XI)
INTEGER*4 NPAR
REAL*8 P (NPAR), L2 (3), VARW (12), COVW (12), M3W (12), X, XI (NPAR)
REAL*8 FUNC2, F1DIM2

INTEGER*4 J
REAL*8 XT (NPAR)

DO 10 J=1, NPAR, 1
    XT (J) = P (J) + X * XI (J)
10 CONTINUE

F1DIM2 = FUNC2 (XT, VARW, M3W, COVW, L2)

RETURN
END

```

```

FUNCTION FUNC2 (PA, VARW, M3W, COVW, L2)
INTEGER*4 N
PARAMETER (N=48)
REAL*8 VARW (12), M3W (12), COVW (12), PA (N), L2 (3)
REAL*8 FUNC2

REAL*8 F (12, 2), VARV (12), M3V (12)
REAL*8 MTH1 (12), MTH2 (12), MTH3 (12), NORM (3)
INTEGER*4 I

!PENALTIES
REAL*8 PENAL4, PENAL5
REAL*8 MINVAR, MAXXV
PARAMETER (MINVAR=0.01, MAXXV=5.)

!FILLING WITH ZEROS
DO 10 I=1, 3, 1
    NORM(I)=0.
10 CONTINUE
FUNC2=0.

!TRANSLATING [PA] TO MATRIXES: [F], [VARV], [M3V]
CALL TRANS2 (N, PA, F, VARV, M3V)

!CALCULATING VECTOR MTH1
CALL CAL2TH1 (F, VARV, VARW, MTH1)

!CALCULATING VECTOR MTH2
CALL CAL2TH2 (F, M3V, M3W, MTH2)

!CALCULATING VECTOR MTH3
CALL CAL2TH3 (F, VARV, COVW, MTH3)

!CALCULATING [NORM]
DO 20 I=1, 12, 1
    NORM(1)=NORM(1)+MTH1 (I) **2.
    NORM(2)=NORM(2)+MTH2 (I) **2.
    NORM(3)=NORM(3)+MTH3 (I) **2.
20 CONTINUE

!CALCULATING FUNC2 WITOUT PENALTIES
DO 30 I=1, 3, 1
    FUNC2=FUNC2+L2 (I) *NORM(I)
30 CONTINUE

!!!!!!!!!!!!PENALTIES!!!!!!!!!!!!
CALL CALCP4 (MINVAR, VARV, PENAL4)
CALL CALCP5 (MAXXV, M3V, VARV, PENAL5)

!CALCULATING FUNC2 WITH PENALTIES
FUNC2=FUNC2+PENAL4+PENAL5

RETURN
END

!SUBROUTINE FOR PENAL5 (LARGE SKEW)
SUBROUTINE CALCP5 (MAXXV, M3V, VARV, PENAL5)
REAL*8 MAXXV, M3V (12), VARV (12), PENAL5

INTEGER*4 I

```

```

REAL*8 FLAG,P5 !ITS THE PENALTY FACTOR
PARAMETER(P5=1.E10)

PENAL5=0.

DO 10 I=1,12,1
    FLAG=(M3V(I)**2.)-(MAXXV**2.)*(VARV(I)**3.)
    IF(FLAG.GE.0.)THEN
        PENAL5=PENAL5+P5*FLAG
    ENDIF
10 CONTINUE

RETURN
END

```

```

!SUBROUTINE FOR PENAL4 (LOW VAR)
SUBROUTINE CALCP4(MINVAR,VARV,PENAL4)
REAL*8 MINVAR,VARV(12),PENAL4

```

```

INTEGER*4 I
REAL*8 FLAG,P4 !ITS THE PENALTY FACTOR
PARAMETER(P4=1.E10)

```

```

PENAL4=0.

DO 10 I=1,12,1
    FLAG=MINVAR-VARV(I)
    IF(FLAG.GE.0.)THEN
        PENAL4=PENAL4+P4*(FLAG**2.)
    ENDIF
10 CONTINUE

RETURN
END

```

```

!SUBROUTINE FOR CALCULATING [MTH3]
SUBROUTINE CAL2TH3(F,VARV,COVW,MTH3)
REAL*8 F(12,2),VARV(12),COVW(12),MTH3(12)

```

```

INTEGER*4 I

MTH3(1)=F(12,2)*F(1,1)*VARV(1)

DO 10 I=2,12,1
    MTH3(I)=F(I-1,2)*F(I,1)*VARV(I)
10 CONTINUE

DO 20 I=1,12,1
    MTH3(I)=MTH3(I)-COVW(I)
20 CONTINUE

RETURN
END

```

```

!SUBROUTINE FOR CALCULATING [MTH2]
SUBROUTINE CAL2TH2(F,M3V,M3W,MTH2)
REAL*8 F(12,2),M3V(12),M3W(12),MTH2(12)

```

```

INTEGER*4 I

DO 10 I=1,12,1
    MTH2(I)=(F(I,1)**3.)*M3V(I)
10 CONTINUE

DO 20 I=1,11,1
    MTH2(I)=MTH2(I)+(F(I,2)**3.)*M3V(I+1)
20 CONTINUE
MTH2(12)=MTH2(12)+(F(12,2)**3.)*M3V(1)

DO 30 I=1,12,1
    MTH2(I)=MTH2(I)-M3W(I)
30 CONTINUE

RETURN
END

!SUBROUTINE FOR CALCULATING [MTH1]
SUBROUTINE CAL2TH1(F,VARV,VARW,MTH1)
REAL*8 F(12,2),VARV(12),VARW(12),MTH1(12)

INTEGER*4 I

DO 10 I=1,12,1
    MTH1(I)=(F(I,1)**2.)*VARV(I)
10 CONTINUE

DO 20 I=1,11,1
    MTH1(I)=MTH1(I)+(F(I,2)**2.)*VARV(I+1)
20 CONTINUE
MTH1(12)=MTH1(12)+(F(12,2)**2.)*VARV(1)

DO 30 I=1,12,1
    MTH1(I)=MTH1(I)-VARW(I)
30 CONTINUE

RETURN
END

!SUBROUTINE FOR TRANSLATING [PA] TO MATRIXES: [F],[VARV],[M3V]
SUBROUTINE TRANS2(N,PA,F,VARV,M3V)
INTEGER*4 N
REAL*8 PA(N),F(12,2),VARV(12),M3V(12)

INTEGER*4 I

DO 10 I=1,12,1
    F(I,1)=PA(I)
    F(I,2)=PA(12+I)
    VARV(I)=PA(24+I)
    M3V(I)=PA(36+I)
10 CONTINUE

RETURN
END

```

Υπορουτίνες υπολογισμού παραγώγου αντικειμενικής συναρτήσεως

```
FUNCTION DF1DIM2 (NPAR, P, L2, VARW, COVW, M3W, X, XI)
INTEGER*4 NPAR
REAL*8 P (NPAR), L2 (3), VARW (12), COVW (12), M3W (12), X, XI (NPAR)
REAL*8 DF1DIM2

INTEGER*4 J
REAL*8 XT (NPAR), DF (NPAR)

DO 10 J=1, NPAR, 1
    XT (J)=P (J)+X*XI (J)
10 CONTINUE

CALL DFUNC2 (XT, VARW, M3W, COVW, L2, DF)

DF1DIM2=0.
DO 20 J=1, NPAR, 1
    DF1DIM2=DF1DIM2+DF (J)*XI (J)
20 CONTINUE

RETURN
END

SUBROUTINE DFUNC2 (PA, VARW, M3W, COVW, L2, DF)
INTEGER*4 N
PARAMETER (N=48)
REAL*8 VARW (12), M3W (12), COVW (12), PA (N), L2 (3), DF (N)

REAL*8 F (12, 2), VARV (12), M3V (12)
REAL*8 MTH1 (12), MTH2 (12), MTH3 (12)
REAL*8 MP1 (12, N), MP2 (12, N), MP3 (12, N)
REAL*8 DF1 (N), DF2 (N), DF3 (N)
INTEGER*4 NR
PARAMETER (NR=12)
INTEGER*4 I

!PENALTIES
REAL*8 DF4 (N), DF5 (N)
REAL*8 MINVAR, MAXXV
PARAMETER (MINVAR=0.01, MAXXV=5.)!MUST BE THE SAME AS IN FUNC2

!FILLING [DF] WITH ZEROS
DO 10 I=1, N, 1
    DF (I)=0.
10 CONTINUE

!TRANSLATING [PA] TO MATRIXES: [F], [VARV], [M3V]
!USED BY FUNC2 AS WELL
CALL TRANS2 (N, PA, F, VARV, M3V)

!CALCULATING VECTORS MTH1, MTH2, MTH3
!(SUBROUTINES USED BY FUNC2 AS WELL)
CALL CAL2TH1 (F, VARV, VARW, MTH1)
CALL CAL2TH2 (F, M3V, M3W, MTH2)
CALL CAL2TH3 (F, VARV, COVW, MTH3)

!CALCULATING MATRIX MP1 (DERIVATIVE OF MTH1)
CALL CAL2MP1 (N, F, VARV, MP1)

!CALCULATING MATRIX MP2 (DERIVATIVE OF MTH2)
CALL CAL2MP2 (N, F, M3V, MP2)
```

```

!CALCULATING MATRIX MP3 (DERIVATIVE OF MTH3)
CALL CAL2MP3 (N, F, VARV, MP3)

!CALCULATING DERIVATIVE VECTORS [DF1], [DF2], [DF3]
CALL MULVA (NR, N, MTH1, MP1, DF1)
CALL MULVA (NR, N, MTH2, MP2, DF2)
CALL MULVA (NR, N, MTH3, MP3, DF3)

!CALCULATING DERIVATIVE VECTOR WITHOUT PENALTIES
DO 20 I=1, N, 1
    DF(I)=2.*(L2(1)*DF1(I)+L2(2)*DF2(I)+L2(3)*DF3(I))
20 CONTINUE

!!!!!!!!!!!!PENALTIES!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!CALCULATING DERIVATIVE OF PENALTY FOR LOW VAR [DF4]
CALL CAL2DF4 (N, MINVAR, VARV, DF4)

!CALCULATING DERIVATIVE OF PENALTY FOR LARGE SKEW [DF5]
CALL CAL2DF5 (N, MAXXV, M3V, VARV, DF5)

!CALCULATING [DF] WITH PENALTIES
DO 30 I=1, N, 1
    DF(I)=DF(I)+DF4(I)+DF5(I)
30 CONTINUE

DO 40 I=25, 36, 1
    DF(I)=0.
40 CONTINUE

RETURN
END

!SUBROUTINE FOR CALCULATING [DF5]
!(DERIVATIVE OF PENALTY FOR LARGE SKEW)
SUBROUTINE CAL2DF5 (N, MAXXV, M3V, VARV, DF5)
INTEGER*4 N
REAL*8 MAXXV, M3V(12), VARV(12), DF5(N)

INTEGER*4 I, J
REAL*8 FLAG, P5 !ITS THE PENALTY FACTOR
!MUST BE THE SAME AS IN SUBROUTINE CALCP5 (FUNC2)
PARAMETER(P5=1.E10)

!FILLING [DF5] WITH ZEROS
DO 10 I=1, N, 1
    DF5(I)=0.
10 CONTINUE

!FILLING [DF5] WITH ELEMENTS
DO 20 I=1, 12, 1
    J=24+I
    FLAG=(M3V(I)**2.)-(MAXXV**2.)*(VARV(I)**3.)
    IF(FLAG.GE.0.) THEN
        DF5(J)=-3.*(MAXXV**2.)*(VARV(I)**2.)*P5
    ENDIF
20 CONTINUE

DO 30 I=1, 12, 1
    J=36+I
    FLAG=(M3V(I)**2.)-(MAXXV**2.)*(VARV(I)**3.)

```

```

        IF (FLAG.GE.0.) THEN
            DF5 (J) = 2. * M3V (I) * P5
        ENDIF
30 CONTINUE

RETURN
END

!SUBROUTINE FOR CALCULATING [DF4]
!(DERIVATIVE OF PENALTY FOR LOW VAR)
SUBROUTINE CAL2DF4 (N, MINVAR, VARV, DF4)
INTEGER*4 N
REAL*8 MINVAR, VARV (12), DF4 (N)

INTEGER*4 I, J
REAL*8 FLAG, P4 !ITS THE PENALTY FACTOR
!MUST BE THE SAME AS IN CALCP4 (FUNC2)
PARAMETER (P4 = 1.E10)

!FILLING [DF4] WITH ZEROS
DO 10 I = 1, N, 1
    DF4 (I) = 0.
10 CONTINUE

DO 20 I = 1, 12, 1
    J = 24 + I
    FLAG = MINVAR - VARV (I)
    IF (FLAG.GE.0.) THEN
        DF4 (J) = -2. * FLAG * P4
    ENDIF
20 CONTINUE

RETURN
END

!SUBROUTINE FOR CALCULATING [MP3]
SUBROUTINE CAL2MP3 (N, F, VARV, MP3)
INTEGER*4 N
REAL*8 F (12, 2), VARV (12), MP3 (12, N)

INTEGER*4 I, J

!FILLING [MP3] WITH ZEROS
DO 10 I = 1, 12, 1
    DO 20 J = 1, N, 1
        MP3 (I, J) = 0.
    20 CONTINUE
10 CONTINUE

!FILLING [MP3] WITH ELEMENTS
MP3 (1, 1) = F (12, 2) * VARV (1)
DO 30 I = 2, 12, 1
    MP3 (I, I) = F (I - 1, 2) * VARV (I)
30 CONTINUE

MP3 (1, 24) = F (1, 1) * VARV (1)
DO 40 I = 2, 12, 1
    J = I + 11
    MP3 (I, J) = F (I, 1) * VARV (I)
40 CONTINUE

```



```

MP3(1,25)=F(12,2)*F(1,1)
DO 50 I=2,12,1
    J=24+I
    MP3(I,J)=F(I-1,2)*F(I,1)
50 CONTINUE

RETURN
END

!SUBROUTINE FOR CALCULATING [MP2]
SUBROUTINE CAL2MP2(N,F,M3V,MP2)
INTEGER*4 N
REAL*8 F(12,2),M3V(12),MP2(12,N)

INTEGER*4 I,J

!FILLING [MP2] WITH ZEROS
DO 10 I=1,12,1
    DO 20 J=1,N,1
        MP2(I,J)=0.
    20 CONTINUE
10 CONTINUE

!FILLING MP2 WITH ELEMENTS
DO 30 I=1,12,1
    MP2(I,I)=3.*(F(I,1)**2.)*M3V(I)
30 CONTINUE

DO 40 I=1,11,1
    J=I+12
    MP2(I,J)=3.*(F(I,2)**2.)*M3V(I+1)
40 CONTINUE
MP2(12,24)=3.*(F(12,2)**2.)*M3V(1)

DO 50 I=1,12,1
    J=I+36
    MP2(I,J)=F(I,1)**3.
50 CONTINUE

DO 60 I=1,11,1
    J=I+37
    MP2(I,J)=F(I,2)**3.
60 CONTINUE
MP2(12,37)=F(12,2)**3.

RETURN
END

!SUBROUTINE FOR CALCULATING [MP1]
SUBROUTINE CAL2MP1(N,F,VARV,MP1)
INTEGER*4 N
REAL*8 F(12,2),VARV(12),MP1(12,N)

INTEGER*4 I,J

!FILLING [MP1] WITH ZEROS
DO 10 I=1,12,1
    DO 20 J=1,N,1
        MP1(I,J)=0.
    20 CONTINUE

```

```

10 CONTINUE

!FILLING [MP1] WITH ELEMENTS
DO 30 I=1,12,1
    MP1(I,I)=2.*F(I,1)*VARV(I)
30 CONTINUE

DO 40 I=1,11,1
    J=I+12
    MP1(I,J)=2.*F(I,2)*VARV(I+1)
40 CONTINUE
MP1(12,24)=2.*F(12,2)*VARV(1)

DO 50 I=1,12,1
    J=I+24
    MP1(I,J)=F(I,1)**2.
50 CONTINUE

DO 60 I=1,11,1
    J=I+25
    MP1(I,J)=F(I,2)**2.
60 CONTINUE
MP1(12,25)=F(12,2)**2.

RETURN
END

```

Υπορουτίνα πολλαπλασιασμού πίνακα με διάνυσμα

```

SUBROUTINE MULVA(K,N,X,A,Y)
INTEGER*4 K,N
REAL*8 X(K),A(K,N),Y(N)

INTEGER I,J
REAL*8 SUM

DO 10 J=1,N,1
    SUM=0.
    DO 20 I=1,K,1
        SUM=SUM+X(I)*A(I,J)
    20 CONTINUE
    Y(J)=SUM
10 CONTINUE

RETURN
END

```

Z.5 Πρόγραμμα παραγωγής συνθετικών χρονοσειρών

Λειτουργία του προγράμματος

Το πρόγραμμα χρησιμοποιεί το αρχείο PARAMETERS.TXT, το οποίο χρησιμοποιείται και από τα προγράμματα των ενότητων Z.1, Z.2, Z.3 και Z.4, καθώς και τα αρχεία ES.TXT, M3Y.TXT, YFACTORS.TXT, WFACTORS.TXT, VARR.TXT και


```

        FAC(12*K+12-I)=FAC(12*K+12+I)
10 CONTINUE

!READING BMA FACTORS OF W/ AS, VARV, M3V
DO 20 I=1,12,1
    READ(40,*) (F(I,J),J=1,2,1)
    READ(10,*)AS(I)
    READ(50,*)VARV(I)
    READ(60,*)M3V(I)
20 CONTINUE

!READING M3Z
READ(20,*)M3Z

!PRODUCTING WHITE NOISE FOR Z
SUM1=0.
DO 30 I=1,24*K+23,1
    SUM1=SUM1+FAC(I)**3.
30 CONTINUE

CALL GAMA(DABS(M3Z/SUM1),WHZ,12*N+24*K+22)

    !CARE FOR NEGATIVE XV
    IF((M3Z/SUM1).LT.0.) THEN
        DO 40 I=1,12*N+24*K+22,1
            WHZ(I)=-WHZ(I)
        40 CONTINUE
    ENDIF

!PRODUCTING WHITE NOISE FOR W
J=1
DO 50 I=1,12*N+1,1

    CALL GAMA(DABS(M3V(J)/(VARV(J)**(3./2.))),R,PAR)
    R(1)=R(1)*(VARV(J)**0.5)
    IF(M3V(J).LT.0.) THEN
        R(1)=-R(1)
    ENDIF
    WHW(I)=R(1)

    IF(J.EQ.12) THEN
        J=0
    ENDIF
    J=J+1
50 CONTINUE

!PRODUCTING Z
M=-1
DO 60 I=1,N,1
    DO 70 J=1,12,1
        M=M+1
        SUM1=0.
        DO 80 L=1,24*K+23,1
            SUM1=SUM1+FAC(L)*WHZ(M+L)
        80 CONTINUE
        TIMEZ(I,J)=AS(J)*SUM1
    70 CONTINUE
60 CONTINUE

!PRODUCTING W
M=0
DO 90 I=1,N,1

```

```

        DO 100 J=1,12,1
            M=M+1
            TIMEW(I,J)=F(J,1)*WHW(M)+F(J,2)*WHW(M+1)
        100 CONTINUE
90 CONTINUE

!PRODUCTING SERIES

DO 110 I=1,N,1
    DO 120 J=1,12,1
        SERIES(I,J)=TIMEZ(I,J)+TIMEW(I,J)
    120 CONTINUE
110 CONTINUE

!WRITTING TIME SERIES
DO 130 I=1,N,1
    WRITE(100,1000)(SERIES(I,J),J=1,12,1)
130 CONTINUE

CLOSE(10)
CLOSE(20)
CLOSE(30)
CLOSE(40)
CLOSE(50)
CLOSE(60)
CLOSE(100)

1000 FORMAT(12(1X,F15.8,1X))

RETURN
END

```

Υπορουτίνα παραγωγής λευκού θορύβου με ασυμμετρία

```

SUBROUTINE GAMA(M3,R,N)
REAL*8 M3
INTEGER*4 N

REAL*8 L,K,C,R(N)
INTEGER*4 I

L=2./M3
K=L**2.
C=-L

DO 10 I=1,N,1
    R(I)=0.
10 CONTINUE

CALL DRNGAM(N,K,R)

DO 20 I=1,N,1
R(I)=R(I)/L+C
20 CONTINUE

RETURN
END

```

Αρχείο Δεδομένων PARAMETERS .TXT

```
FIRST OPTIMISATION (k = 12)
*****
HURST COEFFICIENT
*****
0.784
NUMBER OF YEAR COVARIANCES TO PRESERVE USING OPTIMISATION (n)
*****
1
MAXIMUM NUMBER OF ITERATIONS
*****
40000
CONVERGENCE TOLERANCE OF THE OBJECTIVE FUNCTION
*****
1.E-10
TOLERANCE FOR LINE MINIMIZATION
*****
1.E-21
SPECIAL CASE OF CONVERGING TO EXACTLY ZERO FUNCTION VALUE
*****
1.E-10
OBJECTIVE FUNCTION WEIGHT FOR MONTHLY VARIANCES
*****
1000
OBJECTIVE FUNCTION WEIGHT FOR MONTHLY BASED SKEWNESS
*****
1000
OBJECTIVE FUNCTION WEIGHT FOR LAG1 COVARIANCES
*****
1000
OBJECTIVE FUNCTION WEIGHT FOR HURST COVARIANCES
*****
1000
////////////////////////////////////
EXTENSION OF Y AUTOCOVARIANCES
*****
TOTAL YEARS TO PRESERVE HURST AUTOCOVARIANCES (m)
*****
300
////////////////////////////////////
SECOND OPTIMIZATION
*****
MAXIMUM NUMBER OF ITERATIONS
*****
10000
CONVERGENCE TOLERANCE OF THE OBJECTIVE FUNCTION
*****
1.E-10
TOLERANCE FOR LINE MINIMIZATION
*****
1.E-21
SPECIAL CASE OF CONVERGING TO EXACTLY ZERO FUNCTION VALUE
*****
1.E-10
OBJECTIVE FUNCTION WEIGHT FOR [W] VARIANCES
*****
100000000
OBJECTIVE FUNCTION WEIGHT FOR [W] SKEWNESS
*****
100000000
OBJECTIVE FUNCTION WEIGHT FOR [W] LAG1 COVARIANCES
*****
```

```
100000000
////////////////////////////////////
GENERATING SYNTHETIC SERIES
*****
NUMBER OF SYNTHETIC YEARS TO GENERATE
*****
5000
////////////////////////////////////
```