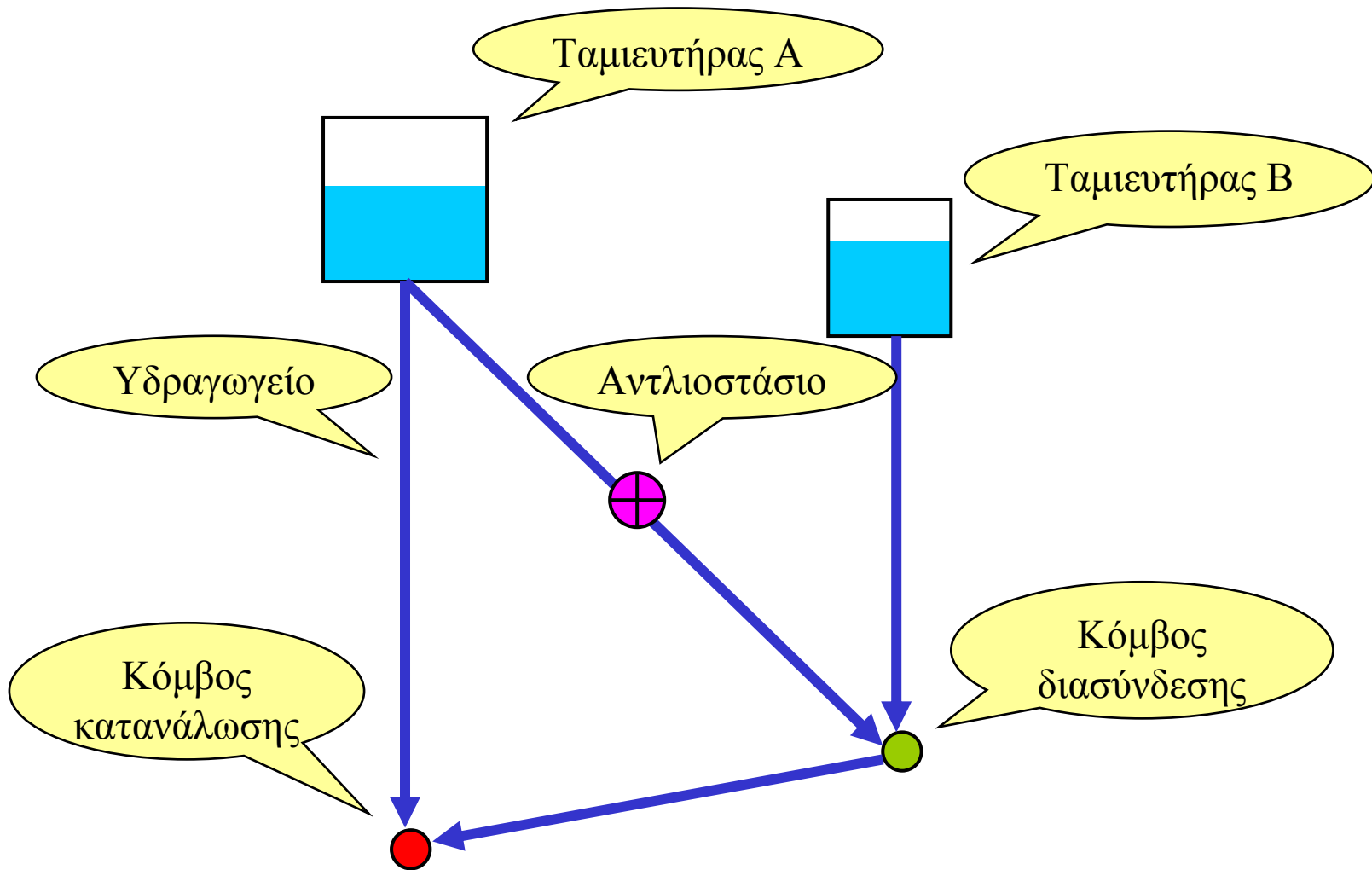


*Ερευνητικό έργο:
Εκσυγχρονισμός της εποπτείας και διαχείρισης του
συστήματος των υδατικών πόρων ύδρευσης της Αθήνας*

Το μαθηματικό μοντέλο του Υδρονομέα

Ανδρέας Ευστρατιάδης και Γιώργος Καραβοκυρός
Τομέας Υδατικών Πόρων
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Το υποθετικό υδροσύστημα



Δεδομένα του υδросυστήματος

- Οι συνιστώσες και η τοπολογία του συστήματος:
 - ✓ Έργα προσφοράς και αποθήκευσης νερού (ταμιευτήρες, γεωτρήσεις)
 - ✓ Θέσεις ζήτησης νερού ή αλλαγής της γεωμετρίας του δικτύου (κόμβοι)
 - ✓ Μέσα μεταφοράς νερού (ποτάμια, υδραγωγεία)
 - ✓ Διατάξεις κατανάλωσης ενέργειας (αντλιοστάσια)
- Τα χαρακτηριστικά των έργων:
 - ✓ Ελάχιστη και μέγιστη στάθμη λειτουργίας, σχέση στάθμης-αποθέματος-επιφάνειας, σχέση στάθμης-διαφυγών, χρονοσειρές εισροών ταμιευτήρων
 - ✓ Δυναμικότητα γεωτρήσεων
 - ✓ Παροχευτικότητα και διαρροές υδραγωγείων
 - ✓ Ειδική ενέργεια αντλιοστασίων
- Οι λειτουργικοί περιορισμοί (στόχοι) της διαχείρισης του συστήματος:
 - ✓ Ζήτηση νερού για ύδρευση, άρδευση και περιβαλλοντική διατήρηση
 - ✓ Αποφυγή υπερχείλισης ταμιευτήρων
 - ✓ Επιθυμητά όρια διακύμανσης της στάθμης των ταμιευτήρων
 - ✓ Επιθυμητά όρια διακύμανσης της παροχής των υδραγωγείων

Πρόβλημα Α:

Η κατανομή των αποθεμάτων στους ταμιευτήρες

Η δυναμική ενός συστήματος ταμιευτήρων περιγράφεται από τις εξισώσεις υδατικού ισοζυγίου, οι οποίες ισχύουν για κάθε ταμιευτήρα i και σε κάθε χρονικό βήμα t :

$$S_i(t+1) = S_i(t) + I_i(t) - L_i(t) - R_i(t)$$

Νέο απόθεμα
(άγνωστο)

Τρέχον απόθεμα,
εισροές και απώλειες

Απόληψη
(άγνωστη)

Ζητούμενο

Ο προσδιορισμός των άγνωστων απολήψεων $R_i(t)$ ή, ισοδύναμα, των άγνωστων αποθεμάτων $S_i(t+1)$.

Παρατήρηση

Αν n είναι το πλήθος των ταμιευτήρων του συστήματος και T το πλήθος των χρονικών βημάτων προσομοίωσης, ο αριθμός των αγνώστων ανέρχεται σε $n \times T$.

Αντιμετώπιση του προβλήματος Α: Χρήση παραμετρικών κανόνων λειτουργίας

Ορισμός

Οι κανόνες λειτουργίας είναι νόμοι (εξισώσεις ή νομογραφήματα) βάσει των οποίων καθορίζονται οι επιθυμητές απολήψεις (ή αποθέματα) νερού από κάθε ταμιευτήρα, συναρτήσει των μεταβλητών που περιγράφουν την κατάσταση του συστήματος.

Παραμετρικοί κανόνες λειτουργίας

Πρόκειται σύνθετες μαθηματικές εκφράσεις της μορφής:

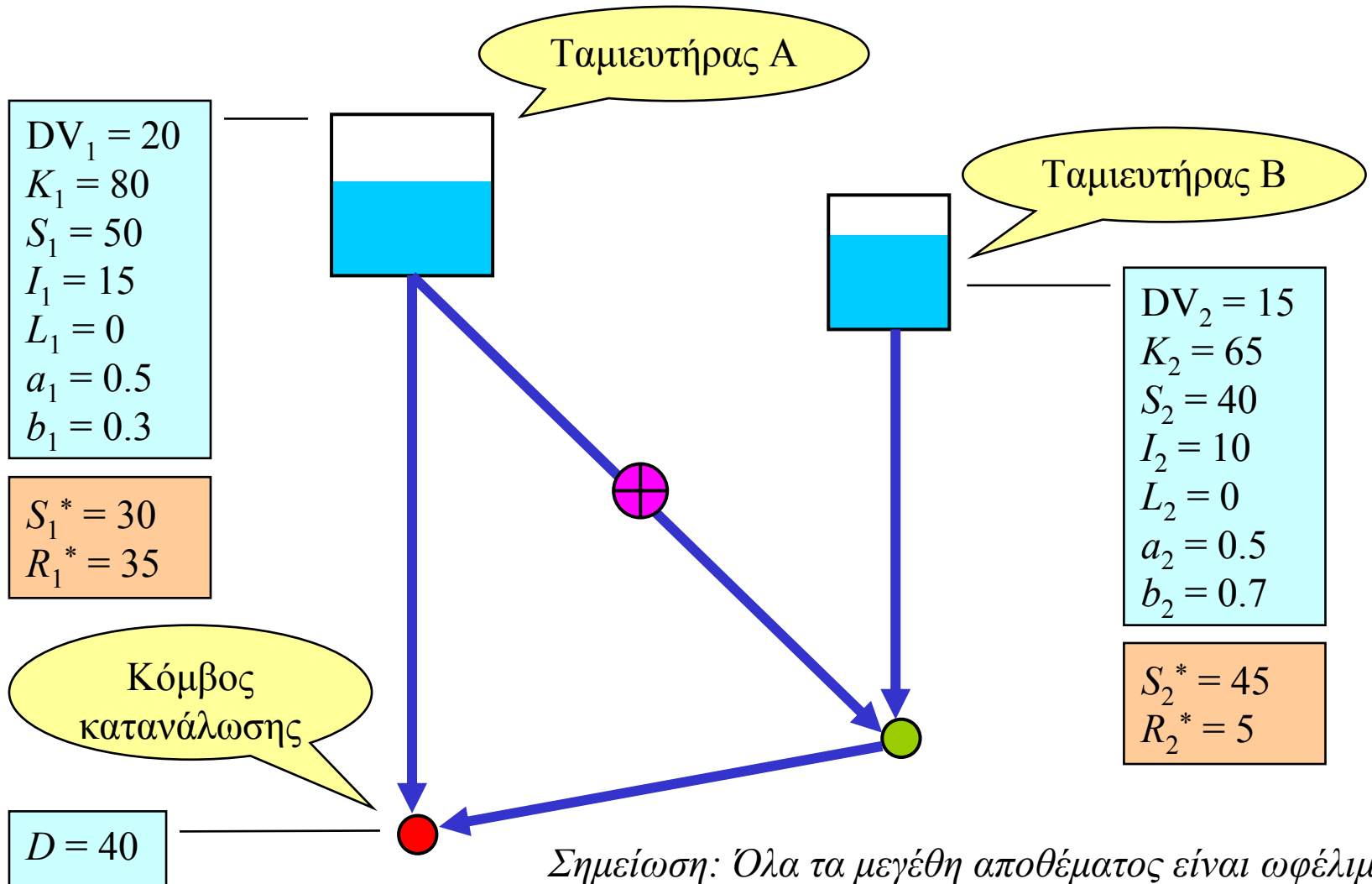
$$S_i^*(t) = \varphi(K_i, K, S_i^{\min}, S_i^{\max}, V(t), a_i, b_i)$$

όπου: $S_i^*(t)$ το επιθυμητό ωφέλιμο απόθεμα στο τέλος του μήνα t , K_i η ωφέλιμη χωρητικότητα του ταμιευτήρα, K η ολική χωρητικότητα του συστήματος, S_i^{\min} και S_i^{\max} οι στόχοι ελάχιστου και μέγιστου αποθέματος, αντίστοιχα, $V(t)$ το συνολικό ωφέλιμο απόθεμα του συστήματος, και a_i, b_i παράμετροι (σταθερές ή μεταβαλλόμενες εποχιακά).

Παρατηρήσεις

- Για δεδομένες εισροές, ο συνολικός όγκος του συστήματος V μπορεί να εκτιμηθεί υποθέτοντας ότι οι απολήψεις ικανοποιούν ακριβώς τη συνολική ζήτηση D .
- Αν n είναι το πλήθος των ταμιευτήρων του συστήματος, ο αριθμός των αγνώστων ανέρχεται σε $2n$, είναι δηλαδή ανεξάρτητος του μήκους προσομοίωσης.
- Η αρχική μορφή των κανόνων είναι: $S_i^*(t) = K_i - a_i K + b_i V(t)$

Πρόβλημα Α: Εφαρμογή στο υποθετικό υδροσύστημα



Πρόβλημα Β:

Η βέλτιστη κατανομή των απολήψεων στο δίκτυο

Τοποθέτηση του προβλήματος

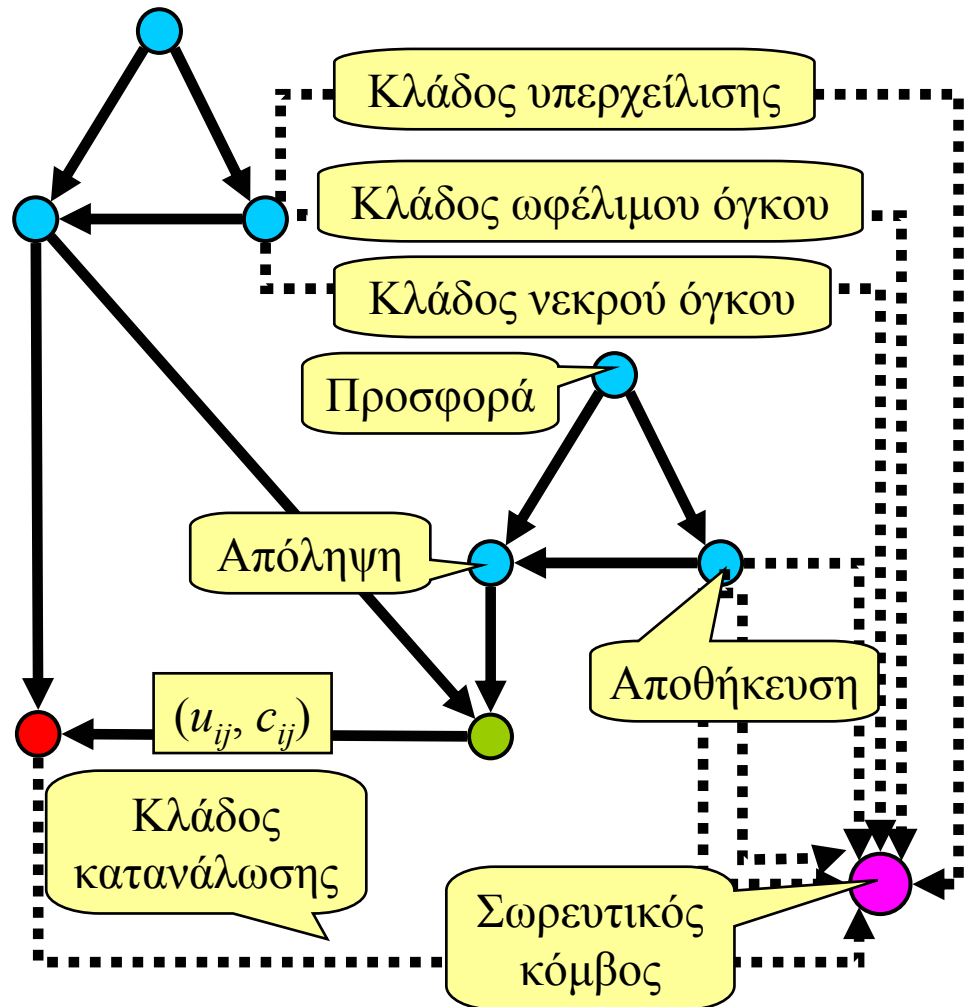
- Οι επιθυμητές απολήψεις μπορεί να διαφέρουν από τις πραγματικές λόγω των φυσικών και λειτουργικών περιορισμών του συστήματος (π.χ. λόγω εξάντλησης της παροχαρακτηριστικής των κατάντη υδραγωγείων).
- Εφόσον υπάρχουν εναλλακτικές διαδρομές για τη μεταφορά του νερού, η κατανομή των απολήψεων στο δίκτυο δεν είναι μονοσήμαντη.
- Υπάρχουν αντικρουόμενοι στόχοι.
- Η συνολική διαθεσιμότητα νερού V είναι μικρότερη από τη συνολική ζήτηση D .

Απαιτήσεις μοντέλου κατανομής των υδατικών πόρων (κατά προτεραιότητα)

1. Αυστηρή ικανοποίηση των φυσικών περιορισμών του συστήματος.
2. Ικανοποίηση των λειτουργικών περιορισμών, με βάση τη σειρά προτεραιότητας που θέτει ο χρήστης, και εφόσον δεν παραβιάζονται οι φυσικοί περιορισμοί.
3. Ελαχιστοποίηση της απόκλισης μεταξύ των πραγματικών και των επιθυμητών (όπως καθορίζονται από τον κανόνα λειτουργίας) απολήψεων.
4. Ελαχιστοποίηση του κόστους μεταφοράς νερού στο δίκτυο, εκφρασμένου σε όρους ενέργειας άντλησης.

Αντιμετώπιση του προβλήματος Β: Μετασχηματισμός του υδροσυστήματος σε διγράφο (1)

- Οι συνιστώσες του συστήματος μετασχηματίζονται σε κόμβους και τόξα διγράφου.
- Κάθε ταμιευτήρας προσομοιώνεται από τρεις κόμβους, όπου πραγματοποιείται η προσφορά, η αποθήκευση και η απώληση νερού.
- Για κάθε μεταβλητή υδατικού ισοζυγίου εισάγεται ένας εικονικός κλάδος.
- Το σύνολο του νερού που αποθηκεύεται, καταναλώνεται, διαρρέει ή υπερχειλίζει καταλήγει σε έναν **σωρευτικό κόμβο**.
- Σε κάθε τόξο (i, j) ορίζονται δύο χαρακτηριστικά μεγέθη, η **μεταφορική ικανότητα** u_{ij} και το **μοναδιαίο κόστος** c_{ij} .



Αντιμετώπιση του προβλήματος Β: Μετασχηματισμός του υδροσυστήματος σε διγράφο (2)

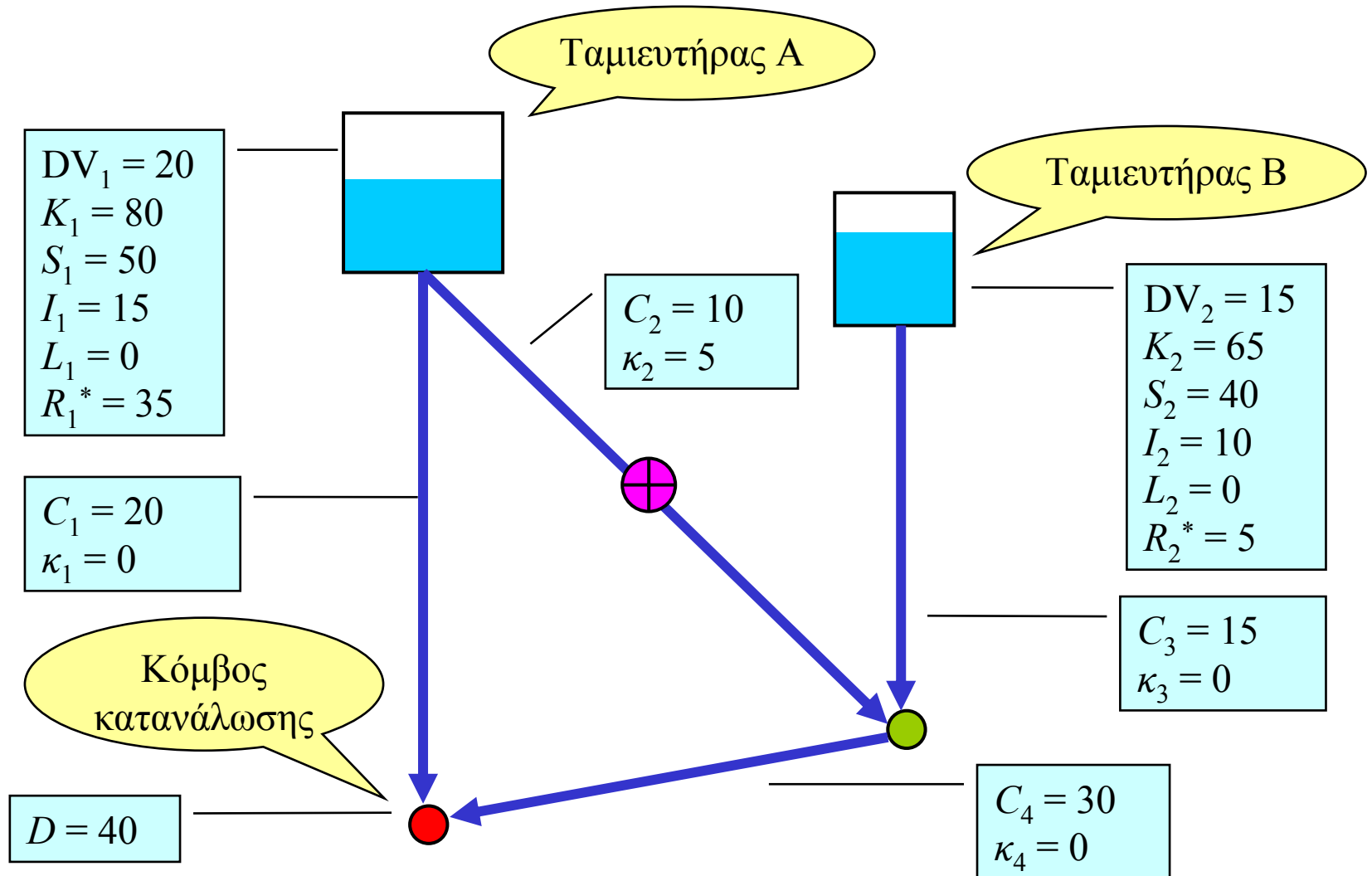
Ορισμός τιμών χωρητικότητας

- Στα τόξα που προσομοιώνουν πραγματικούς αγωγούς του δικτύου η τιμή u_{ij} ταυτίζεται με την παροχευτικότητα C , ενώ σε αυτά που προσομοιώνουν την αποθήκευση νερού σε ταμιευτήρα ταυτίζεται με την ωφέλιμη χωρητικότητά του K .
- Τόξα που προσομοιώνουν τη μεταφορά επιθυμητών μεγεθών (π.χ. απολήψεων, καταναλώσεων), η χωρητικότητα τίθεται ίση με την τιμή του αντίστοιχου στόχου.
- Τόξα στα οποία η έννοια της χωρητικότητας δεν έχει φυσικό νόημα (π.χ. τόξα μεταφοράς υπερχειλίσεων), η τιμή της χωρητικότητας θεωρείται άπειρη.

Ορισμός τιμών μοναδιαίου κόστους

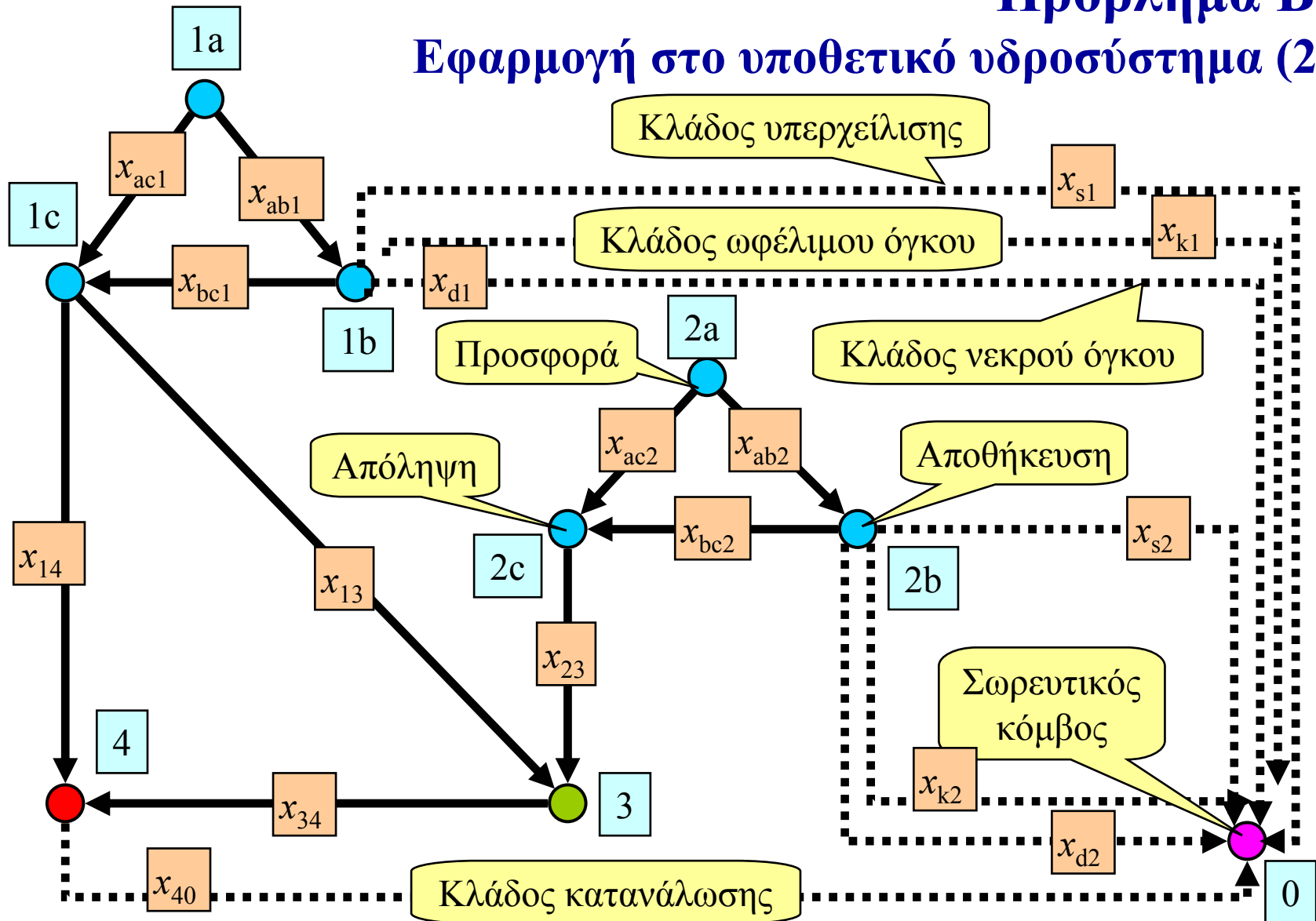
- Στους πραγματικούς αγωγούς η τιμή c_{ij} αναφέρεται στο λειτουργικό κόστος κ .
- Στους ιδεατούς κλάδους θεωρούνται **εικονικά κόστη**, ώστε να αποτρέπονται, υπό μορφή ποινής, οι μη επιθυμητές διαδρομές (π.χ. υπερχειλίσεις, παραβίαση στόχου μέγιστης παροχής υδραγωγείου ή μέγιστου αποθέματος ταμιευτήρα).
- Ομοίως θεωρούνται **αρνητικά κόστη**, ώστε να εξαναγκάζεται το σύστημα να μεταφέρει νερό για την ικανοποίηση των φυσικών και λειτουργικών περιορισμών.
- Ο ορισμός των τιμών κόστους γίνεται αυτόματα, βάσει ενός αλγόριθμου που λαμβάνει υπόψη και τη σειρά προτεραιότητας των στόχων που θέτει ο χρήστης.

Πρόβλημα Β: Εφαρμογή στο υποθετικό υδροσύστημα (1)

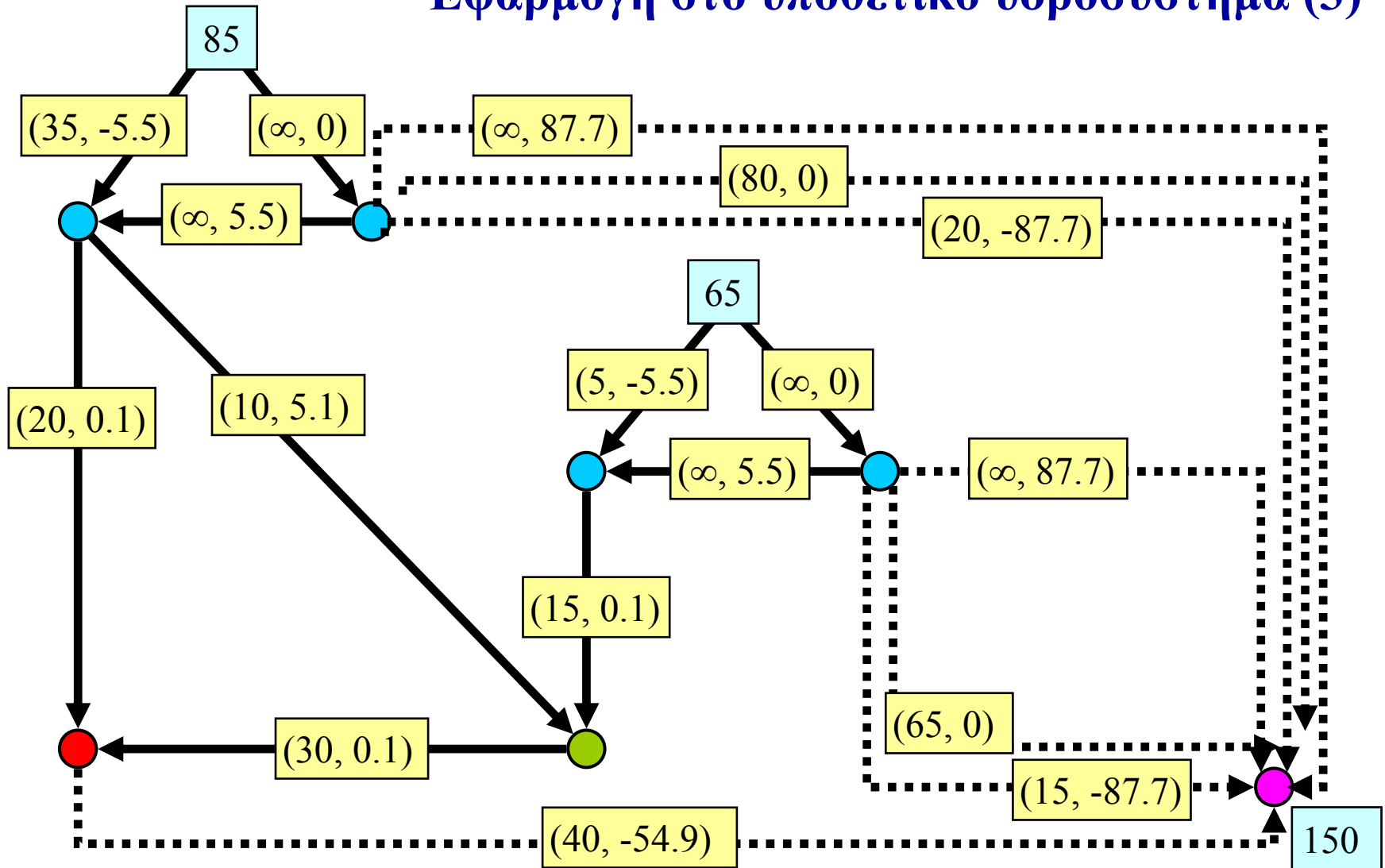


Πρόβλημα Β:

Εφαρμογή στο υποθετικό υδροσύστημα (2)



Πρόβλημα Β: Εφαρμογή στο υποθετικό υδροσύστημα (3)



Πρόβλημα Β: Μαθηματική διατύπωση και επίλυση

Ιδιότητες του διγράφου

- Λόγω της εισαγωγής του σωρευτικού κόμβου, η συνολική προσφορά νερού ισούται με τη συνολική ζήτηση.
- Σε κάθε κόμβο, οι εισερχόμενες ποσότητες ισούνται με τις εξερχόμενες μείον τις καταναλισκόμενες (εξίσωση συνέχειας).
- Σε κάθε τόξο (i, j) , η μεταφερόμενη ποσότητα x_{ij} δεν μπορεί να ξεπεράσει τη μεταφορική ικανότητα u_{ij} .

Διατύπωση του προβλήματος βελτιστοποίησης

- Ζητούμενο είναι η ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους μεταφοράς.
- Η διατύπωση του προβλήματος σε μητρική μορφή είναι:

Περιορισμοί
μεταφορικής
ικανότητας κλάδων

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ & \text{έτσι ώστε} && \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y} \\ & && \mathbf{0} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u} \end{aligned}$$

Εξισώσεις συνέχειας κόμβων
(\mathbf{A} : μητρώο πρόσπτωσης, με
στοιχεία 1, -1, 0)

Παρατήρηση

Το παραπάνω πρόβλημα δικτυακού γραμμικού προγραμματισμού, γνωστό και ως **πρόβλημα μεταφόρτωσης**, επιλύεται με τετριμμένες μεθόδους, όπως η simplex.

Πρόβλημα Β:

Εφαρμογή στο υποθετικό υδροσύστημα (4)

Εξισώσεις συνέχειας κόμβων:

Κόμβος 1a: $x_{ac1} + x_{ab1} = 85$

Κόμβος 1b: $x_{ab1} - x_{bc1} + x_{d1} + x_{k1} + x_{s1} = 0$

Κόμβος 1c: $x_{ac1} + x_{bc1} - x_{13} - x_{14} = 0$

Κόμβος 2a: $x_{ac2} + x_{ab2} = 65$

Κόμβος 2b: $x_{ab2} - x_{bc2} + x_{d2} + x_{k2} + x_{s2} = 0$

Κόμβος 2c: $x_{ac2} + x_{bc2} - x_{23} = 0$

Κόμβος 3: $x_{13} + x_{23} - x_{34} = 0$

Κόμβος 4: $x_{14} + x_{34} - x_{40} = 0$

Κόμβος 0: $x_{d1} + x_{k1} + x_{s1} + x_{d2} + x_{k2} + x_{s2} + x_{40} = 150$

**Περιορισμοί μεταφορικής
ικανότητας κλάδων:**

$$x_{ac1} \leq 35, x_{ab1} \leq 10^6, x_{bc1} \leq 10^6,$$

$$x_{d1} \leq 20, x_{k1} \leq 80, x_{s1} \leq 10^6,$$

$$x_{ac2} \leq 5, x_{ab2} \leq 10^6, x_{bc2} \leq 10^6,$$

$$x_{d2} \leq 15, x_{k2} \leq 65, x_{s2} \leq 10^6,$$

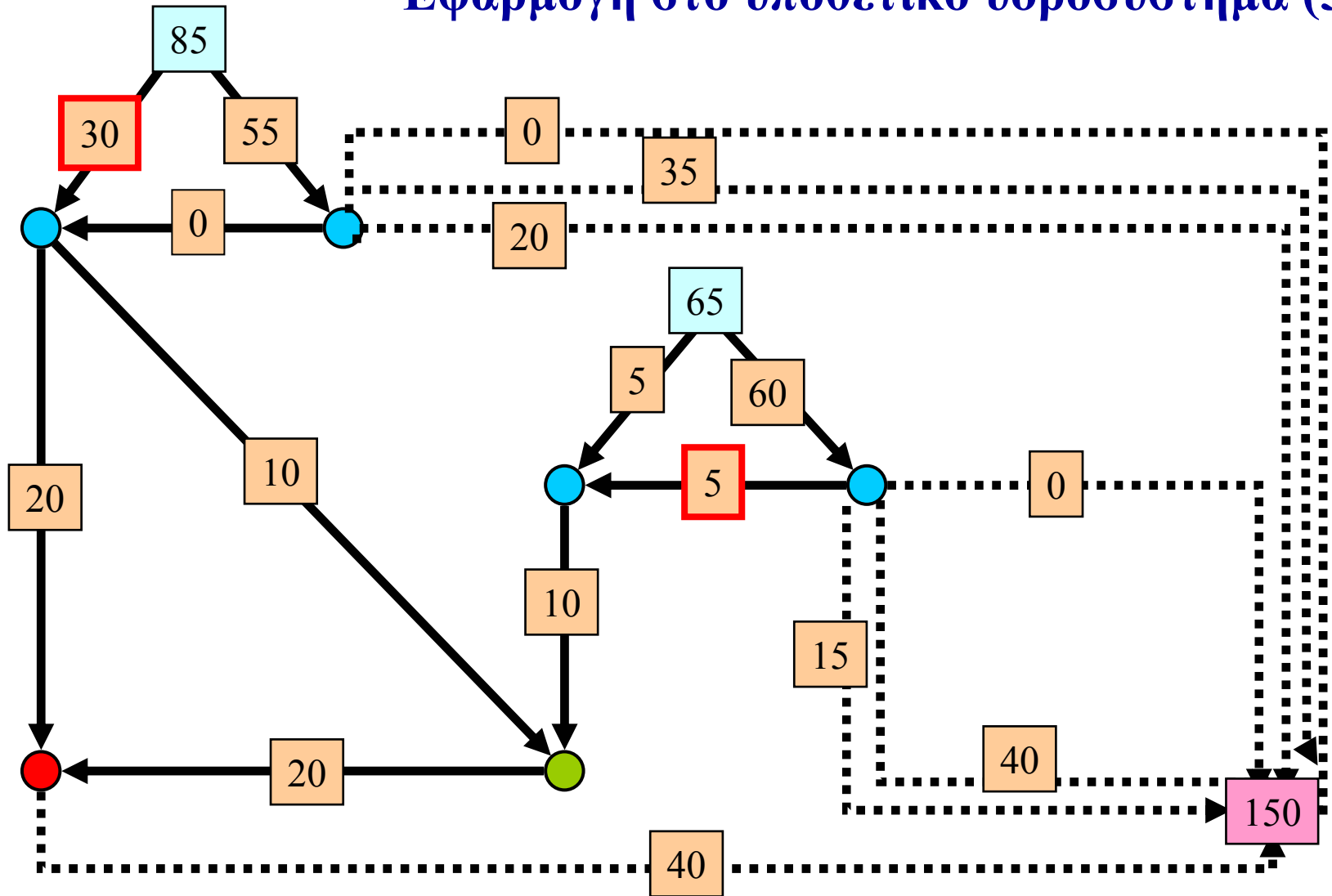
$$x_{13} \leq 10, x_{23} \leq 15, x_{34} \leq 30,$$

$$x_{14} \leq 20, x_{40} \leq 40$$

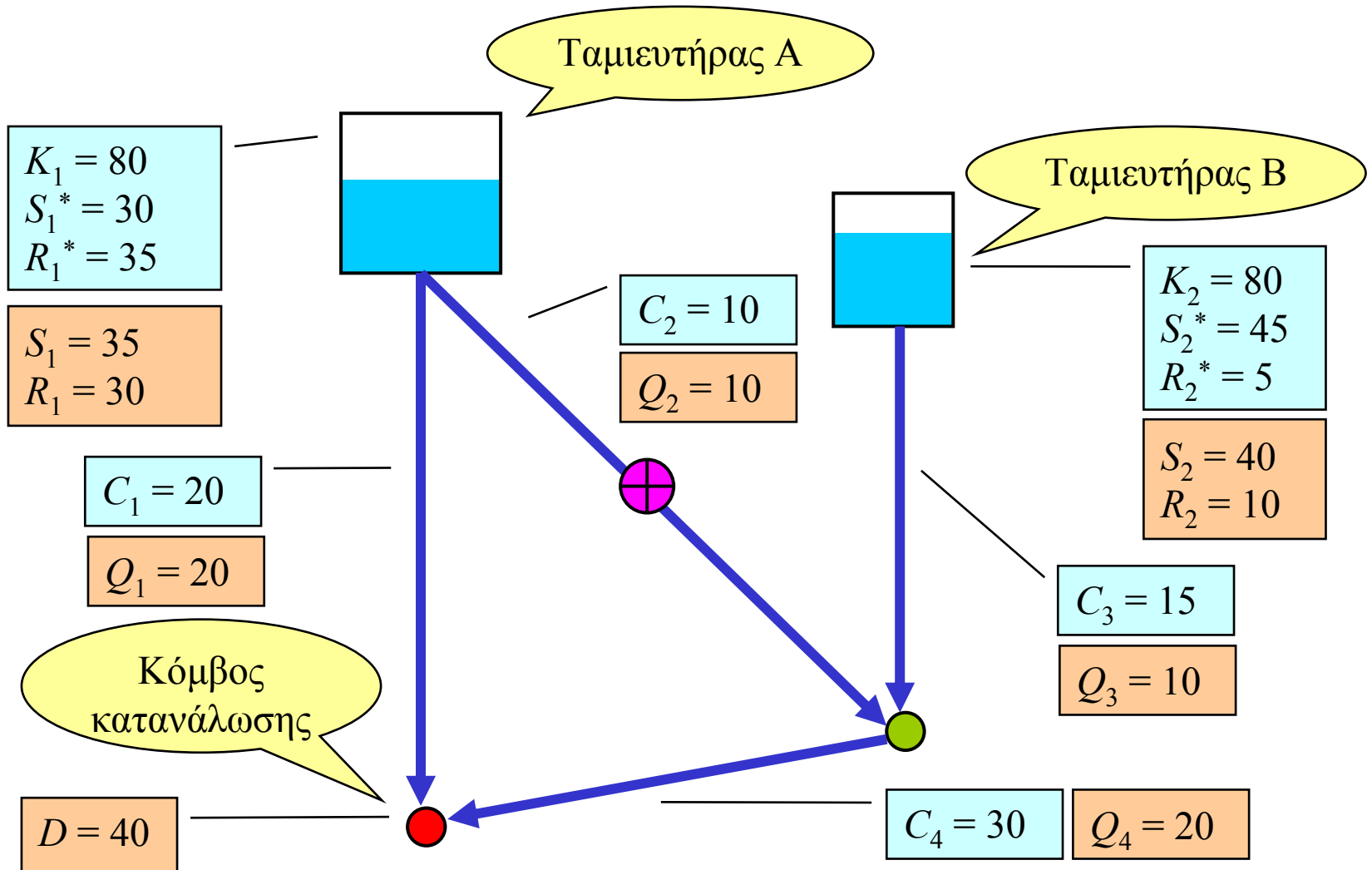
Αντικειμενική συνάρτηση:

$$\begin{aligned} \min F = & -5.4 x_{ac1} + 5.4 x_{bc1} - 86.2 x_{d1} + 86.2 x_{s1} \\ & -5.4 x_{ac2} + 5.4 x_{bc2} - 86.2 x_{d2} + 86.2 x_{s2} \\ & + 5.1 x_{13} + 0.1 x_{23} + 0.1 x_{34} + 0.1 x_{14} - 53.9 x_{40} \end{aligned}$$

Πρόβλημα Β: Εφαρμογή στο υποθετικό υδροσύστημα (5)



Πρόβλημα Β: Εφαρμογή στο υποθετικό υδροσύστημα (6)



Προσομοίωση του συστήματος

Ορισμοί

- Η προσομοίωση είναι μια υπολογιστική τεχνική αναπαράστασης των διεργασιών ενός φυσικού ή τεχνητού συστήματος, όπως αυτές εξελίσσονται στο χρόνο.
- Στόχος της προσομοίωσης είναι η μελέτη της συμπεριφοράς του συστήματος με «δειγματοληπτική» τεχνική, εφόσον η εφαρμογή αναλυτικών μεθόδων είναι ανέφικτη ή υπολογιστικά δυσχερής.

Αλγόριθμος προσομοίωσης του υδροσυστήματος

- Στοιχεία εισόδου είναι η δομή του υδροσυστήματος, οι συνιστώσες του και τα χαρακτηριστικά τους, οι τιμές των στόχων που θέτει ο χρήστης, οι υδρολογικές χρονοσειρές και οι τιμές των συντελεστών του παραμετρικού κανόνα λειτουργίας.
- Σε κάθε χρονικό βήμα εκτιμάται ο συνολικός ωφέλιμος όγκος του συστήματος και υπολογίζονται οι επιθυμητές απολήψεις από τους ταμιευτήρες (**πρόβλημα Α**).
- Οι συνιστώσες του συστήματος μετασχηματίζονται σε συνιστώσες διγράφου και ορίζονται αυτόματα οι τιμές μεταφορικής ικανότητας και μοναδιαίου κόστους.
- Επιλύεται το πρόβλημα της βέλτιστης κατανομής των μεγεθών υδατικού ισοζυγίου στο δίκτυο του διγράφου, με τεχνικές δικτυακού γραμμικού προγραμματισμού (**εσωτερική βελτιστοποίηση - πρόβλημα Β**).
- Οι εν λόγω τιμές αντιστοιχίζονται στις μεταβλητές του μαθηματικού μοντέλου του υδροσυστήματος, ώστε να εκφράζουν πραγματικά και όχι ιδεατά μεγέθη.

Πρόβλημα Γ:

Βελτιστοποίηση της επίδοσης του συστήματος

Μέτρο επίδοσης του συστήματος

- Μαθηματική έκφραση, μέσω της οποίας αξιολογείται ποσοτικά η αποτελεσματικότητα μιας συγκεκριμένης πολιτικής διαχείρισης του συστήματος.
- Το μέτρο επίδοσης ενός υδροσυστήματος, το οποίο διατυπώνεται με όρους **αξιοπιστίας, οικονομικότητας και αποδοτικότητας**, συνιστά την **αντικειμενική συνάρτηση** του μοντέλου βελτιστοποίησης.
- Η διαχείριση του υδροσυστήματος πραγματοποιείται βάσει των κανόνων λειτουργίας των ταμιευτήρων, οι παράμετροι των οποίων αποτελούν τις **μεταβλητές ελέγχου** της αντικειμενικής συνάρτησης.
- Η αποτίμηση του μέτρου επίδοσης πραγματοποιείται μέσω **προσομοίωσης**, για δεδομένες τιμές των παραμέτρων του συστήματος.

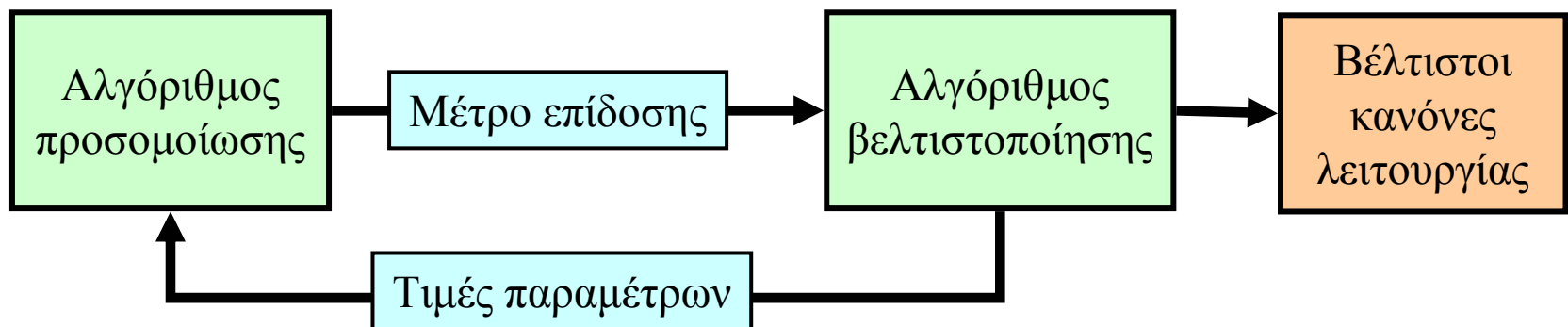
Τύποι αντικειμενικής συνάρτησης

- Ελαχιστοποίηση της μέσης αστοχίας του συστήματος, για δεδομένες τιμές στόχων.
- Ελαχιστοποίηση του μέσης ετήσια κατανάλωσης ενέργειας, για δεδομένες τιμές στόχων και δεδομένο επίπεδο αξιοπιστίας.
- Μεγιστοποίηση της εγγυημένης απόληψης από το σύστημα, για δεδομένο αποδεκτό επίπεδο αξιοπιστίας.

Αντιμετώπιση του προβλήματος Γ: Χειρισμός με μεθόδους μη γραμμικής βελτιστοποίησης

Μέθοδοι μη γραμμικής βελτιστοποίησης

- Εξελιγμένες υπολογιστικές τεχνικές, οι οποίες αναζητούν με κάποιο συστηματικό τρόπο τις τιμές των μεταβλητών ελέγχου που μεγιστοποιούν το μέτρο επίδοσης του προβλήματος.
- Βασίζονται στις αρχές της τεχνητής νοημοσύνης και λιγότερο στα κλασικά μαθηματικά, χρησιμοποιώντας ευρετικούς κανόνες αναζήτησης.
- Δεν εγγυώνται την εύρεση της πραγματικής βέλτιστης λύσης του προβλήματος, αλλά έχουν ως στόχο τον εντοπισμό μιας ικανοποιητικής λύσης, μέσα σε λογικά πλαίσια υπολογιστικού χρόνου.



Σύνοψη της μεθοδολογίας

- **Παραμετροποίηση του συστήματος:** Οι παραμετρικοί κανόνες αποτελούν μαθηματικές σχέσεις οι οποίες συνδέουν τις απολήψεις από τους ταμιευτήρες με το συνολικό ωφέλιμο όγκο, ο οποίος περιγράφει την κατάσταση του συστήματος. Οι σχέσεις αυτές περιέχουν μικρό αριθμό παραμέτρων (δύο ανά ταμιευτήρα), οι οποίες αποτελούν τις προς βελτιστοποίηση μεταβλητές.
- **Προσομοίωση της λειτουργίας του συστήματος:** Το μοντέλο προσομοίωσης αναπαριστά με πιστό τρόπο τη λειτουργία του υδροσυστήματος, λαμβάνοντας υπόψη όλους τους φυσικούς περιορισμούς και προσπαθώντας να ικανοποιήσει κατά το βέλτιστο τρόπο τους επιχειρησιακούς περιορισμούς που θέτει ο διαχειριστής του συστήματος. Αυτό επιτυγχάνεται με το μετασχηματισμό του μαθηματικού μοντέλου του υδροσυστήματος σε διγράφο και την επίλυση ενός προβλήματος δικτυακού γραμμικού προγραμματισμού σε κάθε χρονικό βήμα.
- **Βελτιστοποίηση του μέτρου επίδοσης του συστήματος:** Το μέτρο επίδοσης συνδέεται, ανάλογα με το εξεταζόμενο πρόβλημα, με την αξιοπιστία, την εγγυημένη απόδοση ή την οικονομικότητα της διαχείρισης του συστήματος. Η βελτιστοποίηση συνίσταται στην εύρεση των κατάλληλων τιμών των παραμέτρων των κανόνων λειτουργίας των ταμιευτήρων, μέσω των οποίων μεγιστοποιείται το μέτρο επίδοσης του συστήματος.