

**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**  
**ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**  
**ΤΟΜΕΑΣ ΥΔΑΤΙΚΩΝ ΠΟΡΩΝ, ΥΔΡΑΥΛΙΚΩΝ ΚΑΙ ΘΑΛΑΣΣΙΩΝ ΕΡΓΩΝ**

**ΜΟΝΤΕΛΑ ΣΗΜΕΙΑΚΩΝ ΑΝΕΛΙΞΕΩΝ ΓΙΑ ΤΗ ΒΡΟΧΟΠΤΩΣΗ**  
**Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΕΝΟΣ ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ BARTLETT – LEWIS**

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**ΧΡΙΣΤΟΣ Γ. ΔΕΡΖΕΚΟΣ**  
**ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΚΟΥΤΣΟΓΙΑΝΝΗΣ**

**ΑΘΗΝΑ, ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 2004**

## ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θέλω να ευχαριστήσω το Δημήτρη Κουτσογιάννη (αναφερόμενος σε αυτόν όπως σε ένα φίλο, χωρίς τον ακαδημαϊκό του τίτλο) για την καθοδήγηση και βοήθεια, αλλά κυρίως για τις «βέλτιστες» συνθήκες επικοινωνίας, που έκαναν αυτή τη διπλωματική εργασία πολύ πιο εύκολη.

Ευχαριστώ τη Σοφία για την αθόρυβη και διακριτική παρουσία της όλα αυτά τα χρόνια, με την ελπίδα να φανώ αντάξιος των προσδοκιών της.

Η διπλωματική μου εργασία αφιερώνεται στη μνήμη της αγρότισσας Γεωργίας Δερζέκου, στα «χελωνόδερμα χέρια» της οποίας, οφείλω ένα μεγάλο κομμάτι της πορείας μου.

Χρίστος Δερζέκος  
Αθήνα, 10-2004

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

<b>ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ</b>	<b>I</b>
<b>ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ</b>	<b>II - III</b>
<b>ΠΕΡΙΛΗΨΗ</b>	<b>1</b>
<b>Κεφάλαιο 1<sup>ο</sup>: ΕΙΣΑΓΩΓΗ</b>	<b>2-4</b>
1.1 Αντικείμενο της εργασίας	2
1.2 Πρωτότυπα σημεία	3
1.3 Διάρθρωση της εργασίας	3
<b>Κεφάλαιο 2<sup>ο</sup>: ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ</b>	<b>5-33</b>
2.1 Υδρολογικές ανελίξεις και χρονικές κλίμακες	5
2.2 Υγρή κατακρήμνιση	6
2.3 Το επεισόδιο βροχής: Ορισμοί και εσωτερική δομή	7
2.4 Σημειακές Ανελίξεις - Ανέλιξη Poisson	10
2.5 Χαρακτηριστικές ιδιότητες της Εκθετικής κατανομής	12
2.6 Εισαγωγή στα σημειακά μοντέλα προσομοίωσης - Η εργασία των Rodriguez-Iturbe et al. (1984)	14
2.7 Η επίδραση της χρονικής κλίμακας	18
2.8 Η παραδοχή της εκθετικής κατανομής	19
2.9 Εισαγωγή στα μοντέλα συστάδων ορθογωνικών παλμών	21
2.10 Το μοντέλο ορθογωνικών παλμών Neyman – Scott (NSRPM)	21
2.11 Το μοντέλο Bartlett – Lewis (BL)	23
2.12 Το Τυχαίο Μοντέλο Bartlett – Lewis	26
2.12.1 Εισαγωγή	26
2.12.2 Η φυσική σημασία των παραμέτρων του τυχαίου μοντέλου Bartlett – Lewis. Ποιοτικά χαρακτηριστικά.	28
2.13 Το τροποποιημένο τυχαίο μοντέλο Bartlett – Lewis	31
2.13.1 Εισαγωγή στο νέο τροποποιημένο τυχαίο μοντέλο BL	31
2.13.2 Οι εξισώσεις του Τροποποιημένου Τυχαίου Μοντέλου BL	32
<b>Κεφάλαιο 3<sup>ο</sup>: ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ – ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΤΟΥ ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ BARTLETT – LEWIS: ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΚΑΙ ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ</b>	<b>34-49</b>
3.1 Εισαγωγή.	34
3.2 Η γραμμική συσχέτιση μέσης τιμής $E[Y_i^{(h)}]$ και στάθμης συνάθροισης, $h$ .	35
3.3 Εφαρμογή δι-παραμετρικών εξισώσεων προσαρμογής στα βασικά στατιστικά μεγέθη της ιστορικής χρονοσειράς.	38
3.3.1 Κριτήριο επιλογής των ελάχιστων απαιτούμενων στατιστικών μεγεθών.	39
3.3.2 Ένα, εκ των προτέρων, κριτήριο αξιολόγησης της μεθόδου προσομοίωσης	41
3.4 Εκτίμηση της τιμής της παραμέτρου, $\lambda$ .	44
3.5 Βελτιστοποίηση: Κριτήρια αξιολόγησης αποτελεσμάτων και αντικειμενική συνάρτηση.	46

## II

<b>Κεφάλαιο 4<sup>ο</sup>: ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΝΕΟΥ ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΟΥ ΤΥΧΑΙΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ BARTLETT – LEWIS ΓΙΑ ΤΗ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΑ ΤΟΥ DENVER</b>	<b>50-60</b>
--	--------------

4.1	Εισαγωγή	50
4.2	Εφαρμογή του τροποποιημένου τυχαίου μοντέλου BL για την ιστορική χρονοσειρά του Denver και για θετικές τιμές της παραμέτρου $\kappa_2$ , ( $\kappa_2 > 0$ )	53
4.3	Εφαρμογή του τροποποιημένου τυχαίου μοντέλου BL για την ιστορική χρονοσειρά του Denver και για αποδεκτές, αρνητικές τιμές της παραμέτρου $\kappa_2$ .	55
4.3.1	Αποτελέσματα βελτιστοποίησης	55
4.3.2	Παραγωγή συνθετικών χρονοσειρών – Συγκριτικά αποτελέσματα	57
<b>Κεφάλαιο 5<sup>ο</sup>: ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΝΕΟΥ ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΟΥ ΤΥΧΑΙΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ BARTLETT – LEWIS ΓΙΑ ΤΗ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΑ ΤΗΣ ΑΘΗΝΑΣ</b>		<b>61-63</b>
<b>Κεφάλαιο 6<sup>ο</sup>: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ</b>		<b>64-67</b>
<b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι: ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΒΕΛΤΙΣΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ BL</b>		<b>68-73</b>
<b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙ: Ο ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΜΕΝΗΣ ΑΝΟΠΤΗΣΗΣ</b>		<b>74-88</b>
<b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</b>		<b>89-90</b>

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η δομική ασυνέχεια της διεργασίας της βροχής επιβάλλει τη χρήση ειδικών τύπων μοντέλων, όσον αφορά στην ανάλυση χρονοσειρών μικρής χρονικής κλίμακας. Τέτοιου είδους μοντέλα, είναι τα μοντέλα σημειακών ανελίζεων. Τα επεισόδια της βροχόπτωσης προσομοιώνονται μέσω μεμονωμένων ή ομαδοποιημένων, σημειακών ή ορθογωνικών παλμών. Η τοποθέτηση των παλμών αυτών στον άξονα του χρόνου επιτυγχάνεται μέσω μιας ή περισσότερων σημειακών ανελίζεων Poisson.

Απώτερος στόχος της εφαρμογής των σημειακών μοντέλων είναι η μέγιστη δυνατή προσαρμογή επιθυμητών στατιστικών μεγεθών της ιστορικής χρονοσειράς, για διαφορετικές στάθμες συνάθροισης, μέσω μίας ενιαίας ομάδας παραμέτρων. Η εξέταση νέων, εναλλακτικών σημειακών μοντέλων αποσκοπεί στη βελτίωση της ποιότητας προσαρμογής των υπό εξέταση στατιστικών μεγεθών ή στην επέκταση της προσαρμογής αυτής σε επιπρόσθετα στατιστικά χαρακτηριστικά. Στο πλαίσιο της λογικής αυτής, το κλασικό μοντέλο ορθογωνικών παλμών Bartlett-Lewis τροποποιήθηκε στο τυχαίο μοντέλο Bartlett-Lewis από τους Rodriguez-Iturbe *et al.* (1988). Ο κύριος στόχος της τροποποίησης αυτής ήταν η προσαρμογή ενός επιπρόσθετου στατιστικού μεγέθους: της πιθανότητας απουσίας βροχόπτωσης.

Οι Κουτσογιάννης και Ονοφ (αδημοσίευτα κείμενα) εξέτασαν το ενδεχόμενο περαιτέρω τροποποίησης του τυχαίου μοντέλου Bartlett-Lewis, προς την κατεύθυνση της βελτίωσης της ποιότητας προσαρμογής των υπό εξέταση στατιστικών μεγεθών. Τα μεγέθη αυτά είναι, κυρίως, η μέση τιμή, η διασπορά, ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης 1<sup>ης</sup> τάξης και η πιθανότητα απουσίας βροχόπτωσης, για τις υπό εξέταση στάθμες συνάθροισης.

Στόχος της παρούσας εργασίας είναι η εξέταση της σκοπιμότητας εφαρμογής του νέου, τροποποιημένου, τυχαίου μοντέλου Bartlett-Lewis. Για το σκοπό αυτό εξετάζονται δύο ιστορικές χρονοσειρές. Η πρώτη αφορά στα ωριαία βροχογραφικά δεδομένα του σταθμού του αεροδρομίου του Denver (Denver Airport Station, 15/05 – 16/06, 1949-1976) και η δεύτερη στα ωριαία βροχογραφικά δεδομένα του σταθμού του ΕΜΠ στην Αθήνα (15-12 έως 15-01, 1994 έως 2003).

Για την εξαγωγή των αποτελεσμάτων χρησιμοποιείται ένας πρωτότυπος αλγόριθμος βελτιστοποίησης, ενώ μέσω μίας διαδικασίας αποσύνθεσης (decomposition) του προβλήματος βελτιστοποίησης, προκύπτουν απλοποιήσεις του μαθηματικού μοντέλου και ποιοτικά κριτήρια αξιολόγησης της προσαρμογής των υπό εξέταση στατιστικών μεγεθών.

Τα αποτελέσματα τεκμηριώνουν τη σκοπιμότητα εξέτασης του νέου τροποποιημένου μοντέλου Bartlett-Lewis. Πιο συγκεκριμένα και όσον αφορά στην ιστορική χρονοσειρά του Denver, η βελτίωση, που επιτυγχάνεται συγκριτικά με το κλασικό τυχαίο μοντέλο, είναι της τάξης του 54%. Τα αποτελέσματα επιβεβαιώνονται μέσω της στατιστικής επεξεργασίας των παραγόμενων συνθετικών χρονοσειρών.

Για την περίπτωση της ιστορικής χρονοσειράς της Αθήνας, η εφαρμογή του νέου μοντέλου απέδωσε πολύ καλύτερα αποτελέσματα, σε σχέση με το κλασικό, τυχαίο μοντέλο Bartlett-Lewis. Ωστόσο, η σχετική απόπειρα προσομοίωσης (παραγωγής συνθετικών χρονοσειρών) οδήγησε, για λόγους, που αναφέρονται εκτενώς στο κεφάλαιο 5, στην τελική υιοθέτηση της λύσης του κλασικού, τυχαίου μοντέλου Bartlett-Lewis.

## SUMMARY

The analysis and simulation of rainfall time series on fine time scales require the use of special types of stochastic models. This necessity is justified from the intermittent character of rainfall on these time scales. Among the successful model types are the point process models. According to these models, the rainfall events are simulated through the generation of clustered point (instantaneous bursts) or rectangular pulses. The position of these pulses on the time axis is achieved by the use of one or more Poisson processes.

The implementation of the models mentioned above aims to optimize the fitting of desirable small-scale rainfall statistics for different levels of aggregation. The objective is the determination of a unique optimal parameter set for all considered levels of aggregation. The original rectangular pulses Bartlett-Lewis Model (BLM) was one of the first used in rainfall modeling. Later, Rodriguez-Iturbe *et al.* (1988) modified it to reproduce the probability of zero rain (or probability dry, PDR) for different levels of aggregation and the new model became known as the Random Bartlett-Lewis Model (RBLM).

Koutsoyiannis and Onof (unpublished research) have examined a further modification of RBLM. This modification aimed to introduce a negative correlation between storm intensity and duration. The resulted model is called the Modified Random Bartlett-Lewis Model (MRBLM). The main objective is the improvement of the fitting attained by RBLM. The fitting is meant in the reproduction of mean, variance, lag one auto-covariance and proportion dry, for different levels of aggregation.

The purpose of the present study is to examine the behaviour of the MRBLM. Two historical time series are used as case studies. The first one refers to the Denver airport station data (1949-1976), while the second one is referred to the National Technical University of Athens (NTUA) station data (1994-2003). The complexity of the mathematical model, the introduction of non-analytical equations and the presence of many local optimal points create the necessity of applying a direct search (“global”) optimization method. A novel optimization algorithm is developed, while a decomposition approach results in the proposal of several simplifications, to the optimization procedure. Additionally, qualitative, semi empirical criteria are developed, to roughly estimate in advance the model efficiency.

In the Denver case, the new model attains a 54% improvement in preserving historical rainfall statistics, in comparison to those of RBLM. The simulation results (statistics of synthetic series) confirm this conclusion. However, in the Athens case, the new model, even though results in better approximation of the historical statistics (in comparison to RBLM), in simulations did not give any improvement due to unacceptable ratio of negative parameter values. As a result, RBLM is preferable from the modified model in the Athens case.

## 1 Εισαγωγή

### 1.1 Αντικείμενο της εργασίας

Η δομική ασυνέχεια των βροχογραφικών δεδομένων μικρής κλίμακας οφείλεται στην εναλλαγή μεμονωμένων ή ομαδοποιημένων, μηδενικών και μη μηδενικών τιμών του ύψους βροχόπτωσης. Εξαιτίας αυτού του γεγονότος, η μοντελοποίηση των αντίστοιχων ιστορικών χρονοσειρών χρήζει ιδιαίτερης ανάλυσης και επεξεργασίας. Τα γραμμικά, στοχαστικά, μοντέλα δεύτερης τάξεως δε μπορούν να αποδώσουν τα στατιστικά χαρακτηριστικά των χρονοσειρών αυτού του είδους.

Τα μοντέλα σημειακών ανελίξεων μπορούν να αποδώσουν με ικανοποιητικό τρόπο τη δομή της βροχόπτωσης στις λεπτές κλίμακες. Στα μοντέλα αυτά, η έννοια του επεισοδίου της βροχής έχει έναν περισσότερο μαθηματικό, παρά φυσικό χαρακτήρα. Η, κλασικά οριζόμενη, έννοια του χρόνου διαχωρισμού δεν υφίσταται ή στερείται φυσικής σημασίας. Μεμονωμένοι ή ομαδοποιημένοι, σημειακοί ή ορθογωνικοί παλμοί, που αντιπροσωπεύουν ύψος και ένταση βροχής αντίστοιχα, τοποθετούνται στον άξονα του χρόνου, μέσω μίας ανέλιξης Poisson. Τα μοντέλα Bartlett – Lewis αποτελούν μία τέτοια κατηγορία ομαδοποιημένων ορθογωνικών παλμών.

Απώτερος στόχος της εφαρμογής των σημειακών μοντέλων είναι η μέγιστη δυνατή προσαρμογή επιθυμητών στατιστικών μεγεθών της ιστορικής χρονοσειράς, για διαφορετικές στάθμες συνάθροισης, μέσω μίας ενιαίας ομάδας παραμέτρων. Η εξέταση νέων, εναλλακτικών σημειακών μοντέλων αποσκοπεί στη βελτίωση της ποιότητας προσαρμογής των υπό εξέταση στατιστικών μεγεθών ή στην επέκταση της προσαρμογής αυτής σε επιπρόσθετα στατιστικά χαρακτηριστικά. Στο πλαίσιο της λογικής αυτής, το κλασικό μοντέλο Bartlett – Lewis τροποποιήθηκε στο τυχαίο μοντέλο Bartlett – Lewis από τους Rodriguez – Iturbe *et al.* (1988). Ο κύριος στόχος της τροποποίησης αυτής ήταν η προσαρμογή ενός επιπρόσθετου στατιστικού μεγέθους: της πιθανότητας απουσίας βροχόπτωσης,  $P[Y^{(h)}=0]$ .

Οι Κουτσογιάννης και Onof (αδημοσίευτα κείμενα) εξέτασαν το ενδεχόμενο περαιτέρω τροποποίησης του τυχαίου μοντέλου Bartlett – Lewis, προς την κατεύθυνση της βελτίωσης της ποιότητας προσαρμογής των υπό εξέταση στατιστικών μεγεθών. Τα μεγέθη αυτά είναι, κυρίως, η μέση τιμή, η διασπορά, ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης 1<sup>ης</sup> τάξης και η πιθανότητα απουσίας βροχόπτωσης,  $P[Y^{(h)}=0]$ , για τις υπό εξέταση στάθμες συνάθροισης,  $h$ .

Στόχος της παρούσας εργασίας είναι η εξέταση της σκοπιμότητας εφαρμογής του νέου, τροποποιημένου, τυχαίου μοντέλου Bartlett – Lewis. Για το σκοπό αυτό εξετάζονται δύο ιστορικές χρονοσειρές. Η πρώτη αφορά στα ωριαία βροχογραφικά δεδομένα του σταθμού του αεροδρομίου του Denver (Denver Airport Station, 15/05 – 16/06, 1949-1976) και η δεύτερη στα ωριαία βροχογραφικά δεδομένα του σταθμού του Ε.Μ.Π. στην Αθήνα (15-12 έως 15-01, 1994 έως 2003). Η ωριαία ιστορική χρονοσειρά του Denver αποτελεί, κατά ένα τρόπο, σημείο αναφοράς για κάθε μελέτη, που βασίζεται στα σημειακά μοντέλα βροχόπτωσης. Το γεγονός αυτό οφείλεται, κυρίως, στις πρώτες εργασίες των Rodriguez – Iturbe *et al.*, οι οποίες βασίστηκαν στην ανάλυση της χρονοσειράς αυτής.

### 1.2 Πρωτότυπα σημεία

Η προσαρμογή των στατιστικών μεγεθών επιτυγχάνεται με την εφαρμογή ενός νέου, πρωτότυπου αλγόριθμου βελτιστοποίησης. Ο αλγόριθμος αυτός βασίζεται στις αρχές των αλγόριθμων προσομοιωμένης απόπτωσης (simulated annealing algorithms). Επίσης, από τη σχετική μαθηματική επεξεργασία των εξισώσεων του τυχαίου και του τροποποιημένου τυχαίου μοντέλου Bartlett – Lewis, προέκυψε:

1. μία τακτική εκτίμησης της βέλτιστης τιμής, μίας εκ των παραμέτρων του μοντέλου (παραμέτρος,  $\lambda$ )
2. μία μέθοδος επιλογής των ελάχιστων απαιτούμενων, για τη διαδικασία βελτιστοποίησης, στατιστικών μεγεθών.

3. μία ανάλυση προ-εκτίμησης της επιτυχίας εφαρμογής του τυχαίου και του τροποποιημένου τυχαίου μοντέλου BL
4. η δυνατότητα μείωσης των συνολικών μεταβλητών επίλυσης κατά μία, γεγονός, που ενισχύει την αξιοπιστία των αποτελεσμάτων της διαδικασίας βελτιστοποίησης.
5. η αποσαφήνιση και διατύπωση κριτηρίων αξιολόγησης της ποιότητας των λύσεων.
6. Τα αποτελέσματα τεκμηριώνουν τη σκοπιμότητα εφαρμογής του νέου μοντέλου. Για τη χρονοσειρά του Denver επετεύχθη βελτίωση της ποιότητας προσαρμογής των στατιστικών μεγεθών κατά 54%, σε σχέση με τη λύση των Velghe *et al.* (1994).
7. η διατύπωση ενός, κατάλληλου για το τροποποιημένο τυχαίο μοντέλο Bartlett – Lewis, αλγόριθμου βελτιστοποίησης.(54%)

### 1.3 Διάρθρωση της εργασίας

Στην εργασία περιλαμβάνονται έξι συνολικά κεφάλαια και δύο παραρτήματα. Στο κεφάλαιο 2 γίνεται αναφορά στο θεωρητικό υπόβαθρο των σημειακών ανελίξεων και των στοχαστικών μοντέλων ορθογωνικών παλμών. Στο ίδιο κεφάλαιο παρατίθεται η θεωρητική τεκμηρίωση και η μαθηματική διατύπωση του τροποποιημένου τυχαίου μοντέλου Bartlett – Lewis.

Το κεφάλαιο 3 αναφέρεται στη μαθηματική ανάλυση του μοντέλου, από τη σκοπιά της βελτιστοποίησης. Για την ανάλυση αυτή χρησιμοποιούνται κυρίως οι βασικές αρχές της μεθόδου της αποσύνθεσης (decomposition), με απώτερο στόχο την εξαγωγή ποιοτικών κριτηρίων αξιολόγησης. Παράλληλα, τεκμηριώνεται η μείωση των μεταβλητών επίλυσης κατά μία, καθώς και η προ-εκτίμηση της βέλτιστης τιμής μίας επιπλέον παραμέτρου του μοντέλου. Τέλος, διατυπώνεται το τελικό πρόβλημα βελτιστοποίησης, με τον ορισμό της αντικειμενικής συνάρτησης, των ανισοτικών περιορισμών και των κριτηρίων ποιοτικής και ποσοτικής αξιολόγησης των λύσεων.

Στο κεφάλαιο 4 αναφέρονται τα αποτελέσματα της διαδικασίας βελτιστοποίησης για την ιστορική χρονοσειρά του Denver. Η λύση, που προκύπτει, συγκρίνεται με τις υπάρχουσες, για τη συγκεκριμένη χρονοσειρά, δημοσιευμένες λύσεις και τεκμηριώνεται η υπεροχή του τροποποιημένου τυχαίου μοντέλου Bartlett – Lewis. Η ισχύς της βέλτιστης λύσης επιβεβαιώνεται μέσω της παραγωγής συνθετικών χρονοσειρών, για όλες τις υπό εξέταση στάθμες συνάθροισης.

Στο κεφάλαιο 5 αναφέρονται τα αποτελέσματα της διαδικασίας βελτιστοποίησης για την ιστορική σειρά της Αθήνας.

Στο κεφάλαιο 6 αναφέρονται τα γενικά συμπεράσματα.

Ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης, που χρησιμοποιήθηκε, τεκμηριώνεται θεωρητικά στο Παράρτημα II, ενώ στο Παράρτημα I, αναφέρονται αποτελέσματα, παρατηρήσεις και επισημάνσεις σχετικά με το κλασικό (μη τυχαίο) μοντέλο Bartlett – Lewis.

## 2 Θεωρητικό υπόβαθρο

### 2.1 Υδρολογικές ανελίξεις και χρονικές κλίμακες

Ο χωρο-χρονικός χαρακτήρας των υδρολογικών φαινομένων επιβάλλει την εξέταση και ανάλυση χωρο-χρονικών στοχαστικών ανελίξεων, συνεχών ή διακριτών παραμέτρων. Αν οι χωρικές συντεταγμένες  $(x, y)$  θεωρηθούν σταθερές, με αποτέλεσμα, οι σχετικές υλοποιήσεις της υδρολογικής μεταβλητής, να αντιστοιχούν σε ένα δεδομένο και σταθερό σημείο του χώρου, η στοχαστική ανέλιξη μετεξελίσσεται σε μία τυχαία συνάρτηση του χρόνου,  $X(t)$ .

Οι υδρολογικές μεταβλητές μπορεί να είναι συνεχείς ή διακριτές, ανάλογα με το πεδίο τιμών τους. Οι συναρτήσεις κατανομής τους είναι αντιστοίχως συνεχείς ή κλιμακωτές, ενώ οι αντίστοιχες στοχαστικές ανελίξεις τους χαρακτηρίζονται ως συνεχείς ή διακριτές. Στη συντριπτική πλειονότητα των πρακτικών εφαρμογών, οι υδρολογικές μεταβλητές είναι συνεχείς με πεδίο τιμών το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών,  $R_+$ . Ωστόσο, η συνέχεια, ως προσδιοριστικός όρος στις στοχαστικές ανελίξεις υδρολογικών μεταβλητών, εμπεριέχει μια διττή έννοια.

Από άποψη «δομής» (“composition”, Shaw, 1994, σελ. 373), μια στοχαστική ανέλιξη συνεχών ή διακριτών υδρολογικών μεταβλητών μπορεί να είναι συνεχής ή διαλείπουσα (intermittent). Αν το πεδίο τιμών της τυχαίας μεταβλητής,  $X$ , είναι το  $R_+^*$ , δηλαδή,  $x \in R, x > 0$ , τότε κάθε μηδενική τιμή προκαλεί ένα «κενό» στη δομή της στοχαστικής ανελίξης. Στις υδρολογικές ανελίξεις το γεγονός αυτό οφείλεται σε δύο βασικούς λόγους: στην διαλείπουσα φύση του υπό εξέταση υδρολογικού φαινομένου και στον τρόπο ή στην χρονική κλίμακα υλοποίησης της τυχαίας υδρολογικής μεταβλητής.

Πρακτικά, για την υλοποίηση της τυχαίας μεταβλητής απαιτείται η χρονική της ολοκλήρωσή σε διακριτά χρονικά διαστήματα,  $\Delta t_n$ . Αν τα χρονικά αυτά διαστήματα είναι ίσου μεγέθους,  $\Delta t$ , τότε το μέγεθος αυτό καθορίζει τη σταθερή χρονική κλίμακα (ή βήμα, Μιμίκου, 1994, σελ. 8) της ανελίξης. Η χρονική παράμετρος αποκτά διακριτό χαρακτήρα και άρα η τυχαία χρονοσειρά χαρακτηρίζεται ως συνεχής στοχαστική μονοπαραμετρική ανέλιξη διακριτής παραμέτρου (“continuous state, discrete parameter, stochastic process”, VanMarcke, 1983, σελ. 23).

Μία χρονοσειρά υδρολογικών δεδομένων είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με την χρονική ακρίβεια καταγραφής των μεταβολών της υπό εξέταση υδρολογικής μεταβλητής και συνεπώς με το βήμα της καταγεγραμμένης παρατήρησης ή υλοποίησής της. Θεωρητικά, δεν υφίσταται ποτέ η έννοια της συνεχούς καταγραφής ενός φαινομένου. Η έννοια αυτή, προσεγγίζεται μέσω μειωμένων χρονικών κλιμάκων καταγραφής, που άπτονται της ρύθμισης ή της ακρίβειας του καταγραφικού οργάνου.

Το χρονικό βήμα καταγραφής ή υλοποίησης μιας υδρολογικής μεταβλητής καθορίζει και το βαθμό προσέγγισης της πραγματικής υπόστασης ενός υδρολογικού φαινομένου. Μικρές χρονικές κλίμακες μπορούν να αποδώσουν με ένα πιο ρεαλιστικό τρόπο τη χρονική εξέλιξη μιας τυχαίας χρονικής συνάρτησης (Box *et al.*, 1994, σελ. 399), προσεγγίζοντας με μεγαλύτερη ακρίβεια το συνεχές πεδίο τιμών της χρονικής παραμέτρου. Κατά αυτό τον τρόπο περιορίζεται το μέγεθος των βηματικών (ορθογωνικών παλμικών) μεταβολών και η καταγραφή ενός υδρολογικού φαινομένου αποκτά συνεχή χαρακτηριστικά.

Παρά το ότι η πραγματική υπόσταση ενός υδρολογικού φαινομένου προσεγγίζεται μέσω χρονοσειρών μικρών χρονικών κλιμάκων, στην πράξη, η τελική επιλογή της κλίμακας της υδρολογικής χρονοσειράς καθορίζεται από τα ιδιάζοντα χαρακτηριστικά του υπό μελέτη φυσικού ή τεχνητού συστήματος. Το μέγεθος, η ικανότητα συσσώρευσης (accumulation, χωρητικότητα) και η ταχύτητα απόκρισης ενός συστήματος καθορίζει και την απαιτούμενη (ελάχιστη αποδεκτή) ακρίβεια καταγραφής και ανάλυσης του δυναμικού χαρακτήρα των υδρολογικών φαινομένων. Στα πλαίσια αυτής της συσχέτισης, για την αξιολόγηση των υδάτινων αποθεμάτων, η χρήση μηνιαίων χρονοσειρών είναι γενικά ικανοποιητική, ενώ, για τη μελέτη πλημμυρικών αιχμών σε αστικές λεκάνες απορροής, απαιτείται ωριαία ή λεπτότερη κλίμακα.



Η στατιστική δομή μιας υδρολογικής χρονοσειράς είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με τη χρονική της κλίμακα. Ο συνεχής ή διαλείπων χαρακτήρας της, το σύνολο των προσδιοριστικών και στοχαστικών ιδιοτήτων της και τα κύρια στατιστικά χαρακτηριστικά της μεγέθη διαφοροποιούνται, αναλόγως του χρονικού βήματος των καταγεγραμμένων παρατηρήσεων ή υλοποιήσεων της τυχαίας υδρολογικής μεταβλητής. Η ενδεδειγμένη μεθοδολογία ανάλυσης τροποποιείται, αναλόγως της στατιστικής δομής της χρονοσειράς.

## 2.2 Υγρή κατακρήμνιση

Η υγρή κατακρήμνιση αποτελεί μία από τις πιο κρίσιμες μεταβλητές στη μελέτη των υδρολογικών φαινομένων. Η έννοια της έντασης της βροχόπτωσης αποτελεί έναν αναλογικό μετασχηματισμό του ρυθμού εισροής της υγρής μάζας,  $\dot{m}_{in}$ , σε ένα στοιχειώδη κλειστό όγκο ελέγχου,  $dV$ , μοναδιαίου εμβαδού,  $A$  ( $dV = A dh = dh$ ). Από τη σχετική εξίσωση συνέχειας,  $\frac{dm}{dt} = \dot{m}_{in} \Rightarrow \rho \frac{dV(t)}{dt} = \rho A \frac{dh(t)}{dt} = \rho \frac{dh(t)}{dt} = \dot{m}_{in}$  (όπου,  $\rho$ , είναι η πυκνότητα ύδατος), προκύπτει η αναλυτική έκφραση της έντασης,  $i(t)$ , η οποία αποτελεί την πρώτη παράγωγο της τυχαίας, χρονικά μεταβαλλόμενης, συνάρτησης,  $h(t)$ . Η συνάρτηση,  $h(t)$ , εκφράζει το αθροιστικό ύψος της βροχόπτωσης.

$$i(t) = \frac{\dot{m}_{in}}{\rho} = \frac{dh(t)}{dt} \Rightarrow \int_t^{t+\Delta t} i(t) dt = \int_{h(t)}^{h(t+\Delta t)} dh(t) = [h]_t^{t+\Delta t} = \Delta h \quad 2.1.2.1$$

Για τον υπολογισμό της έντασης, υιοθετείται η απλοποιητική παραδοχή, της γραμμικής μεταβολής του αθροιστικού ύψους βροχόπτωσης,  $h(t)$ , για το υπό εξέταση χρονικό διάστημα ολοκλήρωσης. Κατά αυτό τον τρόπο, ο ρυθμός μεταβολής του ύψους βροχόπτωσης,  $\frac{dh(t)}{dt}$  και συνεπώς, η τιμή της έντασης,  $i(t)$ , θεωρείται σταθερή.

$$\int_t^{t+\Delta t} i(t) dt \cong \bar{i} \Delta t = \Delta h \Rightarrow \bar{i} = \frac{\Delta h}{\Delta t} \quad 2.1.2.2$$

Στην πράξη, είναι εφικτή η καταγραφή των αθροιστικών τιμών του ύψους βροχόπτωσης: η ένταση αποτελεί ένα θεωρητικό, ουδέποτε μετρήσιμο, μέγεθος (I. Rodriguez – Iturbe & P. S. Eagleson, 1987, σελ. 181). Οι σχετικές μετρήσεις αντιστοιχούν σε μια αθροιστική, διαστηματική (interval, κατά τη βασική ορολογία του Stevens, 1946, σελ. 678) κλίμακα μέτρησης. Η μετατροπή της αθροιστικής κλίμακας μέτρησης σε αναλογική (ratio scale) επιτυγχάνεται μέσω του υπολογισμού της διαφοράς,  $\Delta h$ , των καταγεγραμμένων αθροιστικών υψών της βροχόπτωσης ανά τακτά χρονικά διαστήματα,  $\Delta t$ . Το μέγεθος των διαστημάτων αυτών αποτελεί και τη χρονική κλίμακα ή βήμα της προκύπτουσας χρονοσειράς των υψών της υγρής κατακρήμνισης. Βάσει του βήματος αυτού, προσδιορίζονται και οι σταθερές, ανά χρονικό διάστημα,  $\Delta t$ , τιμές της έντασης,  $\bar{i}$ .

Πρακτικά, μια χρονοσειρά βροχογραφικών ή βροχομετρικών δεδομένων θεωρείται μεγάλης χρονικής κλίμακας, όταν το χρονικό βήμα,  $\Delta t$ , είναι μεγαλύτερο της μιας ημέρας. Η μικρότερη συνήθης κλίμακα ανάγνωσης βροχογραφικών δεδομένων είναι της τάξεως των πέντε λεπτών της ώρας (η Shaw - 1994, σελ. 391 - διατείνεται πως η συνήθης μικρότερη κλίμακα ικανοποιητικής ανάγνωσης βροχογραφικών δεδομένων είναι της τάξεως των 10 min), ενώ για την περίπτωση των βροχομετρικών σταθμών, η συνήθης μικρότερη κλίμακα μετρήσεων είναι της τάξεως των οκτώ ωρών. Γι αυτό το λόγο, οι σχετικές χρονοσειρές μικρής κλίμακας θα αναφέρονται ως χρονοσειρές βροχογραφικών δεδομένων.

Μία διαθέσιμη χρονοσειρά βροχομετρικών ή βροχογραφικών δεδομένων συγκεκριμένου χρονικού βήματος,  $\Delta t$ , μπορεί να συναθροιστεί σε μια μικρότερη χρονοσειρά μεγαλύτερου χρονικού βήματος. Υπό αυτή την έννοια, πολλαπλές διακριτές μετρήσεις του ύψους,  $\Delta h$ , συναθροίζονται σε μία ενιαία μέτρηση και η νέα χρονική κλίμακα αποκαλείται κλίμακα ή

περίοδος συνάθροισης (scale - period of aggregation). Η διαδικασία αυτή αποσκοπεί στην εξαγωγή μιας νέας χρονοσειράς, περισσότερο ενδεδειγμένης, ως προς τη μελέτη του υπό εξέταση φυσικού ή τεχνητού συστήματος. Είναι, συνεπώς, πιθανή η διαφοροποίηση της χρονικής κλίμακας των βροχομετρικών ή βροχογραφικών δεδομένων, σε σχέση με την τελική επιθυμητή χρονική κλίμακα ανάλυσης.

Γενικότερα, η χρονική κλίμακα μιας χρονοσειράς υδρολογικών παρατηρήσεων ενδέχεται να είναι απολύτως δεσμευτική. Η διαφοροποίηση της χρονικής κλίμακας των υδρολογικών δεδομένων και της τελικής χρονικής κλίμακας ανάλυσης δεν είναι πάντοτε εφικτή και άπτεται της φύσης της υπό εξέταση υδρολογικής μεταβλητής. Ένα μέγεθος εντατικού χαρακτήρα (ένταση βροχόπτωσης, ταχύτητα ροής, ύψος στάθμης) δε μπορεί να συναθροιστεί.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, η επιλογή της χρονικής κλίμακας των μετρήσεων,  $\Delta t$ , είναι καθοριστική, τόσο για τη στατιστική δομή μιας υδρολογικής χρονοσειράς, όσο και για το βαθμό προσέγγισης της πραγματικής υπόστασης ενός υδρολογικού φαινομένου. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, οι μεγάλες χρονικές κλίμακες δεν αποδίδουν ικανοποιητικά το διαλείποντα χαρακτήρα της κατακρήμνισης και επιπλέον, εξομαλύνουν προς τα κάτω, τα μεγέθη της έντασης.

Ο ρυθμός διήθησης, στις φυσικές λεκάνες απορροής, η παροχετευτική – αποχετευτική ικανότητα, στις αστικές λεκάνες απορροής, το μέγεθος και η χρονική κατανομή της έντασης της βροχόπτωσης, αποτελούν τις βασικές παραμέτρους σχηματισμού της επιφανειακής απορροής. Γενικότερα, η επιφανειακή απορροή μπορεί, απλοποιητικά, να θεωρηθεί ως η διαφορά μεταξύ του ρυθμού (έντασης) της βροχόπτωσης και του ρυθμού της μη επιφανειακής απαγωγής της κατακρημνιζόμενης μάζας. Η χρονική διακύμανση των προαναφερόμενων ρυθμών καθορίζει την εμφάνιση και τη χρονική εξέλιξη του πλημμυρικού φαινομένου.

Δεδομένου του διαλείποντα χαρακτήρα της βροχόπτωσης, γίνεται εμφανής η σημασία της ύπαρξης και της ανάλυσης των σύντομων ενδιάμεσων χρονικών διαστημάτων ανομβρίας, καθώς και η σημασία της διακύμανσης των εντατικών μεγεθών της βροχόπτωσης. Ιδιαίτερα στις αστικές λεκάνες, η απόκριση απορροής είναι σύντομη, το ποσοστό διήθησης και η ικανότητα αποθηκευτικότητας αμελητέα και το φαινόμενο της επιφανειακής απορροής είναι περισσότερο εξαρτημένο από τα εντατικά μεγέθη της κατακρήμνισης. Από το γεγονός αυτό απορρέει και η αναγκαιότητα της πιο λεπτομερούς και αναλυτικής προσέγγισης των δυναμικών και εντατικών χαρακτηριστικών του φαινομένου της βροχόπτωσης.

Από τα προαναφερόμενα προκύπτει η αναγκαιότητα μιας μεγαλύτερης προσέγγισης της πραγματικής υπόστασης του διαλείποντος φαινομένου της βροχόπτωσης και των εντατικών μεγεθών του, μέσω της ανάλυσης βροχογραφικών δεδομένων μικρών χρονικών κλιμάκων (Onof *et al.*, 2000, σελ. 385). Οι σχετικές χρονοσειρές παρουσιάζουν ιδιαίτερα δομικά χαρακτηριστικά, τα οποία παραπέμπουν σε ιδιαίτερες στατιστικές μεθόδους ανάλυσης και επεξεργασίας.

### 2.3 Το επεισόδιο βροχής: Ορισμοί και εσωτερική δομή

Η κύρια διαφοροποίηση των χρονοσειρών βροχογραφικών δεδομένων μικρής κλίμακας έγκειται στο διαλείποντα χαρακτήρα τους. Η σποραδικής φύσεως εμφάνιση, μεμονωμένων ή ομαδοποιημένων μηδενικών και μη μηδενικών τιμών του ύψους βροχόπτωσης, προσδίδει στη χρονοσειρά χαρακτηριστικά δομικής ασυνέχειας. Η μοντελοποίηση αυτού του είδους της ασυνέχειας, δεν είναι δυνατό να επιτευχθεί με τη χρήση των στατιστικών μεθόδων, που χρησιμοποιούνται στις δομικά συνεχείς (ετήσιες και μηνιαίες) χρονοσειρές. Συνεπώς, τα σχετικά γραμμικά, στοχαστικά, μοντέλα δεύτερης τάξεως δεν είναι ικανά να αποδώσουν τα επιθυμητά δομικά και στατιστικά χαρακτηριστικά των χρονοσειρών μικρής κλίμακας (Waymire & Gupta, 1981, σελ. 1262 • Κουτσογιάννης, 1988, σελ.99).

Η διαλείπουσα φύση του φαινομένου της βροχόπτωσης υποδεικνύει την αναγκαιότητα του ορισμού και της χρονικής οριοθέτησης των αμιγών ή συμμιγών βροχερών περιόδων. Για το σκοπό αυτό, εισάγεται η έννοια του επεισοδίου ή γεγονότος βροχής. Ένα επεισόδιο βροχής αντιστοιχεί σε μια επιμέρους χρονική ακολουθία μη μηδενικών ή, υπό προϋποθέσεις, και

μηδενικών υψών βροχόπτωσης. Κατά αυτό τον τρόπο, μια χρονοσειρά εξετάζεται υπό το πρίσμα μιας αλληλουχίας βροχερών και «στεγνών» περιόδων. Όσον αφορά στη σκοπιμότητα μιας τέτοιου είδους ανάλυσης, ο Κουτσογιάννης (1988, σελ. 102) αναφέρει πως «η εισαγωγή της έννοιας του επεισοδίου στη μελέτη της βροχόπτωσης, μπορεί να οδηγήσει σε απλοποίηση της μαθηματικής περιγραφής του φαινομένου». Ωστόσο, όπως επίσης επισημαίνεται από τον ίδιο, η έννοια του επεισοδίου της βροχής δεν επιδέχεται μία και μοναδική ερμηνεία.

Ως προς τον ορισμό του επεισοδίου της βροχής, καταγράφονται δύο γενικές τάσεις. Η βασική διαφοροποίησή τους έγκειται στην αποδοχή ή απόρριψη της δυνατότητας αλληλοεπικάλυψης δύο διαδοχικών επεισοδίων. Αν μια τέτοια αλληλοεπικάλυψη δεν είναι αποδεκτή, τότε η οριοθέτηση των επεισοδίων βροχής, σε ένα ιστορικό δείγμα, είναι εφικτή και άπτεται της αποδοχής ή μη αποδοχής της ένταξης μηδενικών τιμών βροχόπτωσης μέσα στη δομή ενός επεισοδίου. Για την περίπτωση, που μια τέτοια, υπό προϋποθέσεις, ένταξη απορρίπτεται, η χρονική διάρκεια ενός επεισοδίου οριοθετείται μεταξύ δύο διαδοχικών στεγνών περιόδων, οποιασδήποτε διάρκειας. Ως εκ τούτου, το χρονικό σημείο τερματισμού κάθε στεγνής περιόδου ταυτίζεται με το σημείο έναρξης ενός επεισοδίου βροχής.

Στην αντίθετη περίπτωση, όπου είναι αποδεκτή η ένταξη μεμονωμένων ή ομαδοποιημένων μηδενικών τιμών του ύψους βροχόπτωσης στη δομή ενός επεισοδίου, προκύπτει η αναγκαιότητα εισαγωγής της έννοιας του «χρόνου διαχωρισμού», ως του, ελάχιστου σταθερού ή μεταβλητού, χρονικού διαστήματος μηδενικής βροχόπτωσης, που μεσολαβεί μεταξύ δύο διαδοχικών επεισοδίων βροχής. Επί τη βάση μιας στατιστικά τεκμηριωμένης τιμής του χρόνου διαχωρισμού, γίνεται αποδεκτή η στοχαστική ανεξαρτησία κάθε επεισοδίου βροχής. Ο Κουτσογιάννης (1988) επισημαίνει την υπεροχή αυτής της θεώρησης, τόσο από μαθηματική άποψη, όσο και από την άποψη της φυσικής ερμηνείας, αυτού καθ' αυτού, του φαινομένου της βροχόπτωσης.

Κατά μία δεύτερη, σχετικά με την απόπειρα ορισμού του επεισοδίου της βροχής, άποψη, η αλληλοεπικάλυψη των επεισοδίων είναι αποδεκτή, και ως εκ τούτου, δεν υφίσταται θέμα προσδιορισμού ενός ελάχιστου σταθερού ή μεταβλητού χρόνου διαχωρισμού των επεισοδίων. Αυτή η θεώρηση χρησιμοποιείται ευρύτατα στα μοντέλα σημειακής ανέλιξης (εκτενής ανάλυση των οποίων ακολουθεί στις επόμενες ενότητες), όπου το ύψος της βροχής και ο χρόνος εμφάνισής της αποκτούν ένα περισσότερο μαθηματικό, παρά φυσικό (ρεαλιστικό) χαρακτήρα. Σε αυτή την περίπτωση η επισήμανση των επεισοδίων βροχής σε ένα ιστορικό δείγμα βροχόπτωσης δεν είναι σαφής.

Σύμφωνα με τα προαναφερόμενα, για τη μοντελοποίηση δεδομένων μικρής χρονικής κλίμακας απαιτείται, αφενός, ο προσδιορισμός της συνάρτησης κατανομής και αφετέρου, μια εκτίμηση του βαθμού της στοχαστικής εξάρτησης δύο βασικών στοχαστικών μεταβλητών. Η πρώτη μεταβλητή σχετίζεται με τη διάρκεια των επεισοδίων, ενώ η δεύτερη σχετίζεται με τη μεταξύ τους χρονική απόσταση. Ο Κουτσογιάννης (1988) επισημαίνει πως στην πλειονότητα των περιπτώσεων, υιοθετείται η παραδοχή της στοχαστικής ανεξαρτησίας, ενώ οι αντίστοιχες συναρτήσεις κατανομής, όπως είναι αναμενόμενο, εξαρτώνται άμεσα από τον υιοθετούμενο, κατά περίπτωση, ορισμό του επεισοδίου της βροχής.

Σε ένα δεύτερο επίπεδο ανάλυσης, απαιτείται η διερεύνηση της εσωτερικής δομής των επεισοδίων βροχής. Πιο συγκεκριμένα και όσον αφορά στα μεγέθη των υψών της βροχόπτωσης, που παρατηρούνται κατά τη διάρκεια ενός επεισοδίου, εξετάζεται η συνάρτηση κατανομής τους καθώς και η πιθανή στοχαστική εξάρτηση των διαδοχικών τιμών τους. Σχετικά με τη στοχαστική ανεξαρτησία των υψών της βροχόπτωσης και όσον αφορά στην ανάλυση βροχομετρικών δεδομένων ημερήσιας κλίμακας, από σταθμούς της βορειοδυτικής Ευρώπης, η Shaw (1994, σελ. 389) αναφέρει ενδεικτικές τιμές των συντελεστών συσχέτισης στο διάστημα από 0.10 έως 0.15, για τους χειμερινούς μήνες. Σύμφωνα με την ίδια, τα ύψη βροχόπτωσης των θερινών μηνών είναι στοχαστικά ανεξάρτητα.

Η Shaw προφανώς υπονοεί ότι ο βαθμός συσχέτισης και κατ' επέκταση η καταλληλότητα ενός μαθηματικού μοντέλου προσομοίωσης εξαρτάται από την υπό εξέταση, ομογενή υδρολογικά, περίοδο. Στην περίπτωση που παρατηρείται εξάρτηση μεταξύ των διαδοχικών υψών, τότε μια

γραμμική ανέλιξη Markov μπορεί να κριθεί κατάλληλη για την προσομοίωση της παρατηρούμενης στοχαστικής εξάρτησης. Ο Κουτσογιάννης (1988, σελ. 101), αναφέρει ενδεικτικά τις εργασίες των Rodda (1976), καθώς και των Schaake *et al.* (1972), στις οποίες υιοθετήθηκε η εφαρμογή ενός Μαρκοβιανού μοντέλου 1<sup>ης</sup> τάξης.

Για την περίπτωση, που τα διαδοχικά ύψη της βροχόπτωσης θεωρηθούν στοχαστικά ανεξάρτητα, δεν ενδείκνυται η απευθείας εφαρμογή ενός Μαρκοβιανού μοντέλου. Ως εκ τούτου, αναζητούνται μαθηματικά μοντέλα προσομοίωσης, συνεπή ως προς την ανυπαρξία συσχέτισης των παρατηρούμενων διαδοχικών υψών. Ο Κουτσογιάννης (1988, σελ. 101), επισημαίνει την εργασία των Waymire και Gurta (1981) στην οποία «τα διαδοχικά ημερήσια ύψη βροχής έχουν θεωρηθεί ανεξάρτητες μεταβλητές, με εκθετική κατανομή». Η ανεξαρτησία των διαδοχικών υψών θεωρείται δεδομένη στη συντριπτική πλειονότητα των μοντέλων σημειακής ανέλιξης (μια σχετική, πιο λεπτομερειακή, ανάλυση θα ακολουθήσει σε επόμενες ενότητες).

Ως κατακλείδα, επισημαίνεται το ότι τα παραπάνω σχόλια αναφέρονται στις μεθόδους μοντελοποίησης του φαινομένου της βροχόπτωσης σε συνεχή χρονική κλίμακα. Σε ακόλουθες ενότητες και όσον αφορά στα μοντέλα σημειακής ανέλιξης, θα γίνει ιδιαίτερη μνεία στις διαφορές συνεχών και διακριτών σημειακών μοντέλων προσομοίωσης. Παρά το ότι ο μεγαλύτερος όγκος των προσπαθειών ανάλυσης και μοντελοποίησης δεδομένων βροχόπτωσης μικρής χρονικής κλίμακας αναφέρεται σε ημερήσιες χρονοσειρές, η Shaw (1994, σελ. 390) επισημαίνει τη δυνατότητα εφαρμογής των ίδιων μεθοδολογιών και στις περιπτώσεις μικρότερων, της ημερήσιας, κλιμάκων.

#### 2.4 Σημειακές Ανελίξεις - Ανέλιξη Poisson

Ως «σημειακή ανέλιξη» (point process) χαρακτηρίζεται ένα σύνολο τυχαίων σημείων,  $t_i$ , στον άξονα του χρόνου, όπου το μέγεθος,  $t_i$ , αντιστοιχεί στο χρόνο έλευσης του σημείου αυτού σε σχέση με τη χρονική αφετηρία,  $t = 0$  (Papoulis, 1991, σελ. 297). Δύο διαδοχικά σημεία,  $t_{i-1}$  και  $t_i$ , ορίζουν το μεταξύ τους χρονικό διάστημα,  $\Delta t_{i-1, i}$ , το οποίο και αποκαλείται «χρόνος διαδοχής» των γεγονότων  $t_{i-1}$  και  $t_i$  (interarrival time, Κουτσογιάννης, 1988, σελ. 112).

Σε κάθε σημειακή ανέλιξη, μπορεί να οριστεί μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών,  $\Delta t_n$ , τέτοια ώστε:  $\Delta t_1 = t_1$ ,  $\Delta t_2 = t_2 - t_1$ , ...,  $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$ . Η ακολουθία αυτή των τυχαίων μεταβλητών καλείται «ανανεωτική ανέλιξη» (renewal process). Επίσης, σε κάθε σημειακή ανέλιξη αντιστοιχίζεται μία στοχαστική ανέλιξη διακριτών τιμών (απαριθμητική ανέλιξη – counting process),  $N_t$  ή  $N(t)$ , μεγέθους ίσου με τον αριθμό των σημείων,  $t_i$ , στο διάστημα  $(0, t]$ . Από τα προαναφερόμενα προκύπτει μια αντιστοιχία μεταξύ της σημειακής ανέλιξης,  $t_i$ , της στοχαστικής ανέλιξης διακριτών τιμών,  $N_t$  ή  $N(t)$  και της ανανεωτικής ανέλιξης των τυχαίων μεταβλητών,  $\Delta t_n$  (Papoulis, 1991, σελ. 297 • Κουτσογιάννης, 1988, σελ. 110).

Στον προαναφερόμενο ορισμό δεν συγκαταλέγεται η κατηγορία των διακριτών σημειακών ανελιξεων, όπου οι χρόνοι διαδοχής αποτελούν πολλαπλάσια ενός δεδομένου χρονικού διαστήματος. Σε αυτή την περίπτωση, η χρονική παράμετρος της σημειακής ανέλιξης είναι διακριτή και οι χρόνοι διαδοχής δεν αποτελούν τυχαίες συνεχείς μεταβλητές (Foufoula-Georgiou, Lettenmaier, 1986). Κατά συνέπεια, ο ορισμός του Papoulis παραπέμπει στην ειδική κατηγορία των συνεχών σημειακών ανελιξεων (Continuous time point processes).

Επιπλέον, οι σημειακές ανελίξεις εντάσσονται στη γενικότερη κατηγορία των τυχαίων πεδίων (random fields) και αποτελούν μονοπαραμετρικά ή πολυπαραμετρικά τυχαία πεδία συνεχών παραμέτρων (Erik VanMarcke, 1983, σελ. 23). Μία τυχαία ή στοχαστική ανέλιξη αντιστοιχεί στην υλοποίηση μιας τυχαίας μεταβλητής, της οποίας οι τιμές εξαρτώνται από μία ή περισσότερες παραμέτρους (Bras & Rodriguez-Iturbe, 1993, σελ. 2). Γενικότερα, η έννοια της στοχαστικής ανέλιξης δεν ταυτίζεται απαραίτητα με ένα μονοπαραμετρικό σύνολο τυχαίων χρονικών συναρτήσεων  $X(t)$ . Υπό αυτή την έννοια, σημειακή ανέλιξη αποτελεί και ένα σύνολο τυχαίων σημείων σε μία ή περισσότερες χωρικές διαστάσεις ή γενικότερα σε ένα ή περισσότερα συνεχή ή διακριτά πεδία τιμών,  $R_n$ . Ωστόσο, είναι γεγονός, πως στις περισσότερες πρακτικές εφαρμογές, οι σημειακές ανελίξεις είναι μονοπαραμετρικές και το δεικτοσύνολο των τιμών της τυχαίας

συνάρτησης - μεταβλητής αντιστοιχεί σε ένα συνεχές, θετικά ορισμένο, χρονικό πεδίο τιμών,  $R_1^+$ .

Οι Waymire και Gupta (1981, σελ. 1274) επισημαίνουν την εσφαλμένη ονομασία τυχαίων πεδίων ως σημειακών ανελίξεων, προσδίδοντας στις στοχαστικές ανελίξεις και ένα χαρακτήρα διατεταγμένης χρονικής αλληλουχίας (ordering) των τυχαίων μεταβλητών. Υπό αυτό το πρίσμα, οι σημειακές χρονικές ανελίξεις δεν αποτελούν στοχαστικές ανελίξεις αλλά τυχαία πεδία, όπου η χρονική παράμετρος ταυτίζεται με ένα ονομαστικό (nominal) συνεχές δεικτοσύνολο. Η διαφοροποίηση αυτή θα γίνει σαφέστερη στις επόμενες παραγράφους, όπου αναλύεται η σημειακή ανέλιξη Poisson και οι βασικές στατιστικές ιδιότητες της εκθετικής συνάρτησης κατανομής.

Η θεωρία τυχαίων πεδίων (VanMarcke, 1983), εν αντιθέσει με την προαναφερόμενη θεώρηση των Waymire και Gupta, αποδέχεται τις σημειακές ανελίξεις ως υποκατηγορία των τυχαίων πεδίων, ταυτίζοντας την έννοια του τυχαίου πεδίου με αυτή της στοχαστικής ή τυχαίας ανέλιξης, και μη αποδεχόμενη τον κατά ανάγκη μονοδιάστατο και χρονικό χαρακτήρα, που συχνά τους αποδίδεται.

Η μονοπαραμετρική (ή μονοδιάστατη) χρονική ανέλιξη Poisson, η οποία και στο εξής θα αποκαλείται ανέλιξη Poisson για λόγους συντομίας, αποτελεί μία ακολουθία τυχαίων σημείων,  $t_i$ , στο χρόνο. Υπό αυτή την έννοια, υπάγεται στην γενικότερη κατηγορία των συνεχών σημειακών ανελίξεων. Η βασική ιδιαιτερότητα της σημειακής ανέλιξης Poisson, είναι πως οι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές,  $\Delta t_n$ , ακολουθούν την εκθετική συνάρτηση κατανομής και συνεπώς ισχύει η εξίσωση,

$$F(t) = P[\Delta t \leq t] = 1 - e^{-\lambda t}, \quad \forall t \geq 0 \quad 2.4.1$$

Η απαίτηση αυτή αποτελεί ικανή και αναγκαία συνθήκη για το χαρακτηρισμό μιας σημειακής ανέλιξης ως ανέλιξης Poisson. Δεδομένου του ότι ο χρόνος άφιξης του τυχαίου σημείου,  $t_k$ , ισούται με,  $t_k = \sum_{i=1}^k \Delta t_i$ , αποδεικνύεται πως η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των χρόνων άφιξης,  $t_i$ , ισούται με

$$f_k(t) = (\lambda t)^{k-1} \lambda e^{-\lambda t} / (k-1)!, \quad \Gamma(k) = (k-1)!, \quad t > 0 \quad 2.4.2$$

Συνεπώς, οι χρόνοι άφιξης των τυχαίων σημείων,  $t_i$ , ακολουθούν τη συνάρτηση κατανομής γάμα δύο παραμέτρων. Επιπλέον και δεδομένου του ότι παρατηρούνται τουλάχιστον,  $k$ , αφίξεις ( $N_t \geq k$ ) στο διάστημα  $(0, t]$ , αν και μόνο αν ο χρόνος της,  $k$ , άφιξης είναι μικρότερος ή ίσος του συνολικού υπό εξέταση χρόνου,  $t$ , ( $N_t \geq k \Leftrightarrow t_k \leq t$ ), με ολοκλήρωση κατά μέλη προκύπτει πως,

$$P(N_t \geq k) = 1 - \sum_{j=0}^{k-1} e^{-\lambda t} (\lambda t)^j / j! \quad 2.4.3$$

Από την παραπάνω εξίσωση εξάγεται το συμπέρασμα, πως ο αριθμός των αφίξεων,  $N_t$ , ακολουθεί την κατανομή Poisson, με συνάρτηση πυκνότητας,

$$P(N_t = k) = e^{-\lambda t} (\lambda t)^k / k!, \quad k = 0, 1, \dots, n \quad 2.4.4$$

Συνεπώς, στη σημειακή ανέλιξη Poisson τρεις βασικές κατανομές, περιγράφουν τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας,  $f_x(x)$ , των χρόνων αφίξεως των τυχαίων σημείων,  $t_i$ , του αριθμού των τυχαίων σημείων,  $N_t$ , και των χρόνων,  $\Delta t_n$ , που μεσολαβούν μεταξύ δύο διαδοχικών αφίξεων:

1. Η κατανομή γάμα (δύο παραμέτρων, Erlang), όσον αφορά στους χρόνους άφιξης,  $t_i$ .
2. Η εκθετική κατανομή, όσον αφορά στην τυχαία μεταβλητή,  $\Delta t_n$ .
3. Η κατανομή Poisson, όσον αφορά στο συνολικό αριθμό τυχαίων σημείων,  $N_t$ , στο διάστημα  $(0, t]$ .

Το μαθηματικό μοντέλο προσομοίωσης της ανέλιξης Poisson είναι μονοπαραμετρικό, όπως άλλωστε υποδηλώνει και η ισχύς της εκθετικής κατανομής. Για την προσομοίωση της ανέλιξης Poisson χρησιμοποιείται η εκθετική κατανομή και κατ' επέκταση ο προσδιορισμός των χρονικών διαστημάτων,  $\Delta t_{i, i+1}$ , που μεσολαβούν μεταξύ των αφίξεων δύο διαδοχικών τυχαίων σημείων,  $t_i$  και  $t_{i+1}$ , στον άξονα του χρόνου. Το γεγονός αυτό αιτιολογείται από το μονοπαραμετρικό χαρακτήρα της εκθετικής κατανομής, καθώς και από την απλή και αναλυτική έκφραση, που εμφανίζει η αντίστροφη συνάρτησή της (Η παραγωγή τυχαίων εκθετικών μεταβλητών αποτελεί χαρακτηριστική εφαρμογή της «Μεθόδου Αντίστροφου Μετασχηματισμού», Inverse Transformation Method – Mooney, 1997, σελ. 14).

Πιο συγκεκριμένα, η εκθετική συνάρτηση κατανομής, καθώς και η αντίστροφη συνάρτησή της, έχουν ως εξής:

$$F_x(x) = p = P[X \leq x] = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0, \quad \lambda > 0 \quad \& \quad 2.4.5$$

$$F^{-1}(p) = \inf\{x \in \mathbb{R} : p \leq F_x(x)\} = -\ln(1-p)/\lambda$$

Θέτοντας,  $p = U$ , όπου  $U \in (0,1)$ ,  $F_u(U) = U$  (ομοιόμορφη κατανομή) και  $F^{-1}(p) = \Delta t_{i, i+1}$ , προκύπτει η τελική εξίσωση, που χρησιμοποιείται για την παραγωγή των τυχαίων μεταβλητών,  $\Delta t_{i, i+1}$ .

$$\Delta t_{i, i+1} = -\ln(1 - U_i)/\lambda \quad 2.4.6$$

Η χρήση της ομοιόμορφα κατανομημένης μεταβλητής,  $U$ , στο διάστημα  $(0,1)$ , εξασφαλίζει τη συνέπεια της μεταβλητής,  $\Delta t_{i, i+1}$ , ως προς την αρχική της εκθετική συνάρτηση κατανομής,  $F_x(x)$ . Ο χρόνος άφιξης του τυχαίου σημείου,  $t_i$ , προκύπτει ως άθροισμα των υπολογισθέντων χρονικών διαστημάτων,  $\Delta t_{i, i+1}$ .

$$t_i = \sum_{j=1}^i (\Delta t_{j-1, j}) \quad 2.4.7$$

## 2.5 Χαρακτηριστικές ιδιότητες της Εκθετικής κατανομής

1. Η καμπύλη της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας,  $f_x(x)$ , της εκθετικής κατανομής έχει ως αφητηρία το σημείο  $[x^0, f_x^0(x)] = [0, \lambda]$ , ενώ, εξ ορισμού, το εμβαδό που περικλείεται από την  $f_x(x)$  και τον άξονα  $(x)$  ισούται με τη μονάδα  $\left\{ \int_0^{\infty} f_x(x) dx = [F_x(x)]_0^{\infty} = 1 \right\}$ .

Συνεπώς, αυξανομένης της παραμέτρου πυκνότητας,  $\lambda$ , αναμένεται μείωση των βασικών στατιστικών μεγεθών της κατανομής. Πιο αναλυτικά, η μέση και διάμεσος τιμή, καθώς και η διασπορά των τυχαίων μεταβλητών, που ακολουθούν την εκθετική κατανομή, ισούνται με:

$$E[X] = 1/\lambda$$

$$x_{50\%} = -\ln(0,5)/\lambda \cong 0,693/\lambda \quad 2.5.1$$

$$\text{var}(X) = 1/\lambda^2$$

Από τα παραπάνω, προκύπτει πως, η τιμή της παραμέτρου πυκνότητας,  $\lambda$ , επηρεάζει τα βασικά στατιστικά χαρακτηριστικά μεγέθη της κατανομής κατά τον ακόλουθο τρόπο:

$$\lambda \rightarrow \infty \Rightarrow \{E[X], x_{50\%}, \text{var}(X)\} \rightarrow 0 \quad 2.5.2$$

$$\lambda_1 > \lambda_2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} E[X_1] < E[X_2] \\ x_{50\%}^1 < x_{50\%}^2 \\ \text{var}(X_1) < \text{var}(X_2) \end{array} \right\} \quad 2.5.3$$

Αν η τυχαία μεταβλητή,  $X$ , αντιστοιχεί σε χρονικά διαστήματα,  $\Delta t_{i, i+1}$ , που μεσολαβούν μεταξύ των αφίξεων δύο διαδοχικών τυχαίων σημείων,  $t_i$  και  $t_{i+1}$ , στον άξονα του χρόνου, είναι σαφές το ότι η πυκνότητα των σημείων αυξάνεται για μεγαλύτερες τιμές της παραμέτρου πυκνότητας,  $\lambda$

(rate parameter). Σε αυτή την περίπτωση παρατηρείται μια αύξηση του ρυθμού εμφάνισης των γεγονότων της σημειακής ανέλιξης. Παράλληλα, η μείωση της διασποράς συντελεί στην εμφάνιση μιας μεγαλύτερης ομοιογένειας, όσον αφορά στις αποστάσεις μεταξύ των τυχαίων σημείων.

Συμπερασματικά, κατά μέσο όρο παρατηρούνται,  $\Delta t_{\text{mean}} = 1 / \lambda$ , χρονικές μονάδες μεταξύ των διαδοχικών αφίξεων και συνεπώς, ο μέσος αριθμός αφίξεων στη μονάδα του χρόνου ισούται με την παράμετρο πυκνότητας,  $\lambda$ . Σε αυτή την περίπτωση, η παράμετρος πυκνότητας,  $\lambda$ , της εκθετικής συνάρτησης κατανομής συναρτάται άμεσα με την έννοια της έντασης (intensity) της σημειακής ανέλιξης. Για ένα χρονικό διάστημα,  $t$ , ο μέσος αναμενόμενος αριθμός αφίξεων ισούται με,  $\lambda t$ . Στο γεγονός αυτό οφείλεται και ο χαρακτηρισμός του μεγέθους,  $\lambda$ , ως παραμέτρου πυκνότητας και του μεγέθους,  $1 / \lambda$ , ως παραμέτρου κλίμακας.

2. Για την εκθετική συνάρτηση κατανομής,  $F_x(x) = P[X \leq x] = 1 - e^{-\lambda x}$ ,  $x \geq 0, \lambda > 0$ , ορίζεται η συνάρτηση,  $G_x(x) = 1 - F_x(x) = P[X > x] = e^{-\lambda x}$ , για την οποία ισχύει,

$$G(x + t) = G(x)G(t), \quad \forall x, t \geq 0 \quad 2.5.4$$

Η εξίσωση αυτή είναι γνωστή ως «νόμος των εκθετών» (law of exponents) και παραπέμπει στον ορισμό της στοχαστικής ανεξαρτησίας δύο γεγονότων, A και B, όπως αυτή μαθηματικά περιγράφεται από την εξίσωση,  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ . Η ισχύς του «νόμου των εκθετών» συνεπάγεται και την παρακάτω βασική ιδιότητα της εκθετικής συνάρτησης:

$$P(X > x + t | X > x) = P(X > t), \quad \forall x, t \geq 0 \quad 2.5.5$$

Βάσει της ιδιότητας αυτής, η δεσμευμένη πιθανότητα,  $P(X > x + t | X > x)$ , είναι ανεξάρτητη του,  $x$ . Η ιδιότητα αυτή αποκαλείται ως «ιδιότητα της απουσίας μνήμης» (memoryless property) και ισχύει κατά αποκλειστικότητα για την εκθετική κατανομή. Όταν η τυχαία μεταβλητή,  $X$ , αντιστοιχεί στο χρόνο έλευσης ενός γεγονότος, η προαναφερόμενη ιδιότητα σημαίνει πως καμμία πληροφορία δε μπορεί να εξαχθεί, για το χρόνο άφιξης του γεγονότος αυτού, από τη χρονική καθυστέρηση της εμφάνισής του.

## 2.6 Εισαγωγή στα σημειακά μοντέλα προσομοίωσης – Η εργασία των Rodriguez-Iturbe et al. (1984)

Ο επιθυμητός βαθμός ακρίβειας ενός μαθηματικού μοντέλου προσομοίωσης είναι άρρηκτα συνδεδεμένος με τον βαθμό της πολυπλοκότητάς του, την ακρίβεια ή αξιοπιστία των διαθέσιμων, εισαγόμενων δεδομένων και τη βαρύτητα των, κατ' ανάγκη ή κατ' επιλογή υιοθετούμενων, απλοποιητικών παραδοχών του. Συχνά, μαθηματικά μοντέλα, ανατιολόγητα αυξημένης ακρίβειας και πολυπλοκότητας, δημιουργούν μια επίφαση εμβάθυνσης και αξιοπιστίας, εις βάρος άλλων, ανταγωνιστικών μοντέλων απλούστερης δομής. Υπό αυτό το πρίσμα, η εξέταση των μοντέλων σημειακής ανέλιξης αποκτά ένα διττό χαρακτήρα, μαθηματικό και φυσικό.

Στις ενότητες, που ακολουθούν, επιχειρείται μια εισαγωγή στα σημειακά μοντέλα προσομοίωσης, βασιζόμενη στην εργασία των Rodriguez-Iturbe et al. (1984). Η ανάλυσή τους βασίζεται σε τρία βασικά σημειακά μοντέλα προσομοίωσης:

το Μοντέλο Λευκού Θορύβου Poisson (Poisson White Noise Model),  
το Μαρκοβιανό Μοντέλο Ορθογωνικών Παλμών (Rectangular Pulses Markovian Model) και  
το Μοντέλο Λευκού Θορύβου Neyman-Scott (Neyman-Scott White Noise Model).

Οι Rodriguez-Iturbe et al. δεν αποτελούν τους εισηγητές των μοντέλων αυτών (σχετικές είναι προγενέστερες εργασίες μελετητών, όπως οι Waymire & Gupta (1981), Cordova & Bras (1979)). Ωστόσο, είναι οι πρώτοι, που, βασιζόμενοι στη γενικευμένη χρήση της εκθετικής συνάρτησης κατανομής, μελέτησαν την επίδραση της χρονικής κλίμακας των ιστορικών δεδομένων στις τιμές των παραμέτρων των τριών αυτών θεωρητικών μοντέλων.

Αρχικά διεξάγεται μια εξέταση των τριών προαναφερόμενων μοντέλων από καθαρά μαθηματική άποψη, στα πλαίσια της οποίας σχολιάζονται ο αριθμός παραμέτρων κάθε μοντέλου, οι βασικές απλοποιητικές παραδοχές του, η ευελιξία και ο βαθμός της πολυπλοκότητάς του. Ακολούθως,

επιχειρείται μια αξιολόγηση των μοντέλων αυτών, καθώς και των μοντέλων σημειακής ανέλιξης γενικότερα, από καθαρά υδρολογική άποψη. Ο βαθμός της στοχαστικής ανεξαρτησίας και οι συναρτήσεις κατανομής των τυχαίων μεταβλητών, η εσωτερική δομή του επεισοδίου της βροχής, η φυσική σημασία των απλοποιητικών παραδοχών, η χρονική κλίμακα και, γενικότερα, ο βαθμός απόκλισης κάθε μοντέλου από τα βασικά φυσικά χαρακτηριστικά του φαινομένου της βροχόπτωσης, αποτελούν τις κύριες, υπό εξέταση, συνιστώσες αξιολόγησης.

Στα μοντέλα σημειακής ανέλιξης, οι πραγματικές μετρήσιμες κατακρημνίσεις προσομοιάζονται μέσω θεωρητικών παλμών. Η τοποθέτηση των παλμών αυτών στον ορίζοντα του χρόνου, παραπέμπει στη χρήση κατάλληλης στοχαστικής ανέλιξης τυχαίων σημείων. Συνεπώς, όσον αφορά στην τυχαία μεταβλητή, που αντιστοιχεί στο χρόνο έναρξης των παλμών αυτών, η κύρια μεθοδολογία βασίζεται στις αρχές των σημειακών ανελιξεων. Η πιο πρόσφορη σημειακή ανέλιξη, τόσο από άποψη απλότητας, όσο και από την άποψη των ιδιοτήτων της, είναι η σημειακή ανέλιξη Poisson. Ως εκ τούτου, η ανέλιξη Poisson είναι αυτή που χρησιμοποιείται, σχεδόν κατά αποκλειστικότητα, για τον προσδιορισμό των τυχαίων χρονικών σημείων έναρξης,  $t_i$ , των θεωρητικών παλμών,  $U_i$ . Σε αυτή την περίπτωση, η εκθετική κατανομή καλείται να παράξει μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών,  $\Delta t_n$ , οι οποίες αντιστοιχούν σε χρονικά διαστήματα μεταξύ διαδοχικών παλμών ή διαδοχικών ομάδων παλμών. Ο προσδιορισμός των χρόνων έναρξης,  $t_i$ , εισάγει μία παράμετρο στο συνολικό μαθηματικό μοντέλο, δεδομένου του ότι, όπως έχει ήδη αναφερθεί, η μονοδιάστατη σημειακή ανέλιξη Poisson αποτελεί μια μονο-παραμετρική διεργασία.

Αν η έναρξη των υπό εξέταση θεωρητικών παλμών ορίζεται μέσω μιας σημειακής ανέλιξης Poisson, πρόσθετες παραδοχές απαιτούνται για την μαθηματική τεκμηρίωση των υπολοίπων δύο βασικών τυχαίων μεταβλητών: της έντασης και της διάρκειας των παλμών αυτών. Οι κατακρημνιζόμενες πραγματικές ποσότητες, προσομοιάζονται θεωρητικά με δύο κυρίως τρόπους:

1. Μέσω ορθογωνικών παλμών, δηλαδή θεωρητικών στοχαστικών κατακρημνίσεων με δεδομένη, σταθερή, ένταση και διάρκεια.
2. Είτε μέσω σημειακών παλμών, μηδενικής θεωρητικά διάρκειας, για τις οποίες η έννοια της έντασης δεν υφίσταται (σε αυτή την περίπτωση θεωρητικά ορίζεται μόνο το μέγεθος της κατακρημνιζόμενης ποσότητας και η ένταση απειρίζεται).

Η μη χρονική διάσταση των ορθογωνικών παλμών αποκαλείται ένταση (intensity) ή ύψος (depth). Οι ορθογωνικοί παλμοί αποτελούν εντατικά θεωρητικά μεγέθη, καθώς αντιστοιχούν στην ένταση και όχι στο ύψος του φαινομένου της βροχόπτωσης. Αντιθέτως, στην περίπτωση των σημειακών παλμών, το μέγεθός τους έχει ποσοτικά χαρακτηριστικά και αντιστοιχεί σε ένα «σημειακό» - ακαριαίο ύψος βροχόπτωσης. Κατά συνέπεια, η ένταση της βροχόπτωσης,  $\xi(t)$ , προκύπτει βάσει της εξίσωσης (Rodriguez-Iturbe *et al.*, 1984, σελ. 1612),

$$\xi(t)dt = U(t)dN(t) \quad 2.6.1$$

όπου, το  $U(t)$  συμβολίζει το μέγεθος του σημειακού παλμού και το  $dN(t)$  αποτελεί μια δυαδική (0-1) μεταβλητή, με τιμή, 1, αν ο παλμός υφίσταται το διάστημα  $(t, t + dt)$ .

Στην περίπτωση των ορθογωνικών παλμών απαιτείται ο προσδιορισμός της συνάρτησης κατανομής δύο τυχαίων μεταβλητών, της έντασης και της διάρκειας των παλμών αυτών. Αντιθέτως, στην περίπτωση των σημειακών παλμών, για τις οποίες η έννοια της έντασης δεν υφίσταται, μία συνάρτηση κατανομής επαρκεί για τον προσδιορισμό της μοναδικής απαιτούμενης τυχαίας μεταβλητής: του μεγέθους των. Ως εκ τούτου, οι σημειακοί παλμοί εισάγουν λιγότερες ανεξάρτητες μεταβλητές στο μαθηματικό μοντέλο προσομοίωσης.

Σε κάθε περίπτωση, η επιλεγόμενη συνάρτηση κατανομής, κάθε μιας εκ των υπό εξέταση τυχαίων μεταβλητών, εισάγει τις αναγκαίες, για τη μαθηματική περιγραφή της, παραμέτρους. Αν οι τυχαίες αυτές μεταβλητές θεωρηθεί πως ακολουθούν την εκθετική κατανομή, τότε κάθε μεταβλητή εισάγει μία και μοναδική παράμετρο: την αντίστοιχη παράμετρο κλίμακας. Συνεπώς, στην περίπτωση του σημειακού παλμικού μοντέλου απαιτείται ο προσδιορισμός μιας παραμέτρου, δηλαδή της παραμέτρου κλίμακας της εκθετικής συνάρτησης κατανομής των τυχαίων παλμικών μεγεθών. Κατ' αντιστοιχία, στην περίπτωση του ορθογωνικού παλμικού



μοντέλου, οι δύο τυχαίες μεταβλητές, ένταση και διάρκεια των παλμών, εισάγουν δύο παραμέτρους στο τελικό μαθηματικό μοντέλο.

Οι δύο προαναφερόμενες βασικές κατηγορίες παλμών και η υιοθέτηση της σημειακής ανέλιξης Poisson ορίζουν δύο βασικά σημειακά μοντέλα προσομοίωσης:

1. Το μαθηματικό Μοντέλο Λευκού Θορύβου Poisson (Poisson White Noise Model) και
2. το Μαρκοβιανό Μοντέλο Ορθογωνικών Παλμών (Rectangular Pulses Markovian Model).

ενώ, η παραδοχή της εκθετικής συνάρτησης κατανομής για τις τυχαίες μεταβλητές, μέγεθος (ύψος) και διάρκεια, απλοποιεί τη δομή του τελικού μαθηματικού μοντέλου. Αυτός είναι και ο κύριος λόγος για τον οποίο, η χρήση της εκθετικής συνάρτησης κατανομής στην εργασία των Rodríguez-Iturbe *et al.* (1984) αποκτά γενικευμένο χαρακτήρα. Στον πίνακα 2.6.α, συνοψίζονται τα βασικά χαρακτηριστικά των δύο προαναφερόμενων σημειακών μοντέλων.

	Μοντέλο Λευκού Θορύβου Poisson	Μοντέλο Ορθογωνικών Παλμών
Έναρξη παλμών:	Ανέλιξη Poisson (παράμετρος, $\lambda$ )	Ανέλιξη Poisson (παράμετρος, $\lambda$ )
Είδος παλμών:	Σημειακοί παλμοί	Ορθογωνικοί παλμοί
Μέγεθος παλμών:	Εκθετική κατανομή (παράμετρος, $\mu$ )	Εκθετική κατανομή (παράμετρος, $\mu$ )
Διάρκεια παλμών:	-	Εκθετική κατανομή (παράμετρος, $n$ )
Άγνωστες παράμετροι:	2 ( $\lambda, \mu$ )	3 ( $\lambda, \mu, n$ )

Πίνακας 2.6.α : Βασικά χαρακτηριστικά Μοντέλου Λευκού Θορύβου Poisson και Μαρκοβιανού Μοντέλου Ορθογωνικών Παλμών.

Οι Rodríguez-Iturbe *et al.* (1984) επεκτείνουν τη γενικευμένη χρήση της εκθετικής συνάρτησης κατανομής και σε ένα τρίτο μαθηματικό μοντέλο προσομοίωσης, τεσσάρων παραμέτρων: το Μοντέλο Λευκού Θορύβου Neyman-Scott (Neyman-Scott White Noise Model).

Το μοντέλο αυτό βασίζεται στην ομαδοποίηση (clusterring) σημειακών παλμών και εισάγει τη γενικότερη κατηγορία των σημειακών μοντέλων, σύμφωνα με τα οποία, τα γεγονότα της βροχόπτωσης – παλμοί ομαδοποιούνται (clustered rainfall models). Στη συγκεκριμένη περίπτωση, η ομαδοποίηση αυτή εισάγει την αναγκαιότητα προσδιορισμού της συνάρτησης κατανομής δύο επιπλέον τυχαίων μεταβλητών: του αριθμού των παλμών ανά ομάδα καθώς και των χρονικών διαστημάτων, που μεσολαβούν μεταξύ διαδοχικών παλμών της ίδιας ομάδας. Αν η μεταβλητή, που αντιστοιχεί στα χρονικά διαστήματα, που μεσολαβούν μεταξύ διαδοχικών σημειακών παλμών της ίδιας ομάδας, θεωρηθεί, πως ακολουθεί την εκθετική κατανομή, τότε στο μαθηματικό μοντέλο εισάγεται μία παράμετρος: η παράμετρος κλίμακας της κατανομής αυτής.

Όσον αφορά στη δεύτερη μεταβλητή, δηλαδή τον αριθμό των σημειακών παλμών ανά ομάδα, το μοντέλο λευκού θορύβου Neyman-Scott θεωρεί τον αριθμό αυτό στατιστικά ανεξάρτητο από την συνάρτηση κατανομής των μεταξύ τους χρονικών διαστημάτων. Ως αποτέλεσμα τούτου, ενδέχεται κάποιοι από τους σημειακούς παλμούς μιας ομάδας, να υπεισέλθουν στο χρονικό ορίζοντα των παλμών της επόμενης. Η συνάρτηση κατανομής της μεταβλητής αυτής εισάγει επιπλέον παραμέτρους στο συνολικό μαθηματικό μοντέλο. Αν η συνάρτηση κατανομής της θεωρηθεί πως είναι η κατανομή Poisson, τότε αποδεικνύεται πως εισάγεται μία και μοναδική επιπλέον παράμετρος. Η παράμετρος αυτή είναι η αναμενόμενη τιμή του αριθμού σημειακών παλμών ανά ομάδα.

Τα βασικά χαρακτηριστικά του μοντέλου λευκού θορύβου Neyman-Scott συνοψίζονται στον πίνακα 2.6.β:

	Μοντέλου Λευκού Θορύβου Neyman-Scott
Χρόνος έναρξης ομάδας παλμών:	Ανέλιξη Poisson (παράμετρος, $\lambda$ )
Είδος παλμών:	Σημειακοί παλμοί
Μέγεθος παλμών:	Εκθετική κατανομή (παράμετρος, $\mu$ )
Διάρκεια παλμών:	-
Αριθμός παλμών ανά ομάδα:	Τυχαία μεταβλητή Poisson (παράμετρος, $N$ )
Χρόνος έναρξης παλμών ανά ομάδα:	Εκθετική κατανομή (παράμετρος, $\beta$ )
Αριθμός αγνώστων παραμέτρων:	4 ( $\lambda, \mu, N, \beta$ )

Πίνακας 2.6.β : Βασικά χαρακτηριστικά του Μοντέλου Λευκού Θορύβου Neyman-Scott

Η παραδοχή της στοχαστικής ανεξαρτησίας υιοθετείται για τις τυχαίες μεταβλητές και των τριών μοντέλων. Η εφαρμογή της εκθετικής συνάρτησης κατανομής για τις, σχετιζόμενες με τους θεωρητικούς παλμούς, ανεξάρτητες μεταβλητές (χρόνο έναρξης, διάρκεια, ένταση) έχει ως αποτέλεσμα τη μείωση των ανεξάρτητων παραμέτρων του μαθηματικού μοντέλου στον ελάχιστο δυνατό βαθμό.

Ανεξαρτήτως των επιλεγμένων συναρτήσεων κατανομής και στα πλαίσια της κατάστρωσης του τελικού μαθηματικού μοντέλου, απαιτείται η σύνδεση των παραμέτρων αυτών με τα στατιστικά μεγέθη των ιστορικών δεδομένων. Απώτερο στόχο αποτελεί η κατάστρωση ενός ορισμένου συστήματος ισάριθμων, με τις παραμέτρους, γραμμικών ή μη γραμμικών εξισώσεων. Ωστόσο, η κατάστρωση ενός ορισμένου συστήματος, για το σύνολο των ανεξάρτητων παραμέτρων, δεν είναι απόλυτα δεσμευτική. Για παράδειγμα, στην περίπτωση του Μοντέλου Λευκού Θορύβου Neyman-Scott, στο οποίο οι ανεξάρτητες παράμετροι είναι τέσσερις, το μαθηματικό μοντέλο (κατ' επιλογή των Rodriguez-Iturbe *et al.*) παρουσιάζει αοριστία, με βαθμό ελευθερίας ένα. Η τέταρτη ανεξάρτητη παράμετρος, χρησιμοποιείται ως ανεξάρτητη μεταβλητή ελαχιστοποίησης των αποκλίσεων μεταξύ των πραγματικών και των θεωρητικών συντελεστών αυτοσυσχέτισης. Η ιδιαιτερότητα αυτή θα σχολιαστεί εκτενέστερα παρακάτω.

Γενικώς, η συσχέτιση των παραμέτρων του θεωρητικού μοντέλου με τα πραγματικά δεδομένα μπορεί να επιτευχθεί μέσω των στατιστικών ιδιοτήτων των υπό εξέταση χρονοσειρών. Κατά σειρά σπουδαιότητας, ο μέσος όρος, η διασπορά, ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης 1<sup>ης</sup> τάξεως, καθώς και οι υπόλοιποι συντελεστές αυτοσυσχέτισης, αποτελούν τις σημαντικές ιδιότητες των ιστορικών δεδομένων. Το πόσα από τα παραπάνω στατιστικά μεγέθη θα χρησιμοποιηθούν κατά περίπτωση, εξαρτάται από τον αριθμό των ανεξάρτητων παραμέτρων του θεωρητικού μοντέλου, που θα επιλεγεί. Το ποια από τα παραπάνω θα χρησιμοποιηθούν, καθορίζεται, όπως είναι αναμενόμενο, από τη σειρά προτεραιότητας, βάσει της οποίας και έχουν αναγραφεί.

Στην περίπτωση του δι-παραμετρικού Μοντέλου Λευκού Θορύβου Poisson απαιτείται η χρήση δύο εξισώσεων, και συνεπώς αρκεί η συσχέτιση των δύο αγνώστων παραμέτρων με τη μέση τιμή και τη διασπορά των βροχομετρικών δεδομένων. Άλλωστε, από τη φύση του μοντέλου αυτού, ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης είναι, ή επί το ακριβέστερον, θα πρέπει να είναι μηδενικός. Αντιστοίχως, στην περίπτωση του τρι-παραμετρικού Μαρκοβιανού Μοντέλου Ορθογωνικών Παλμών, οι τρεις άγνωστοι παράμετροι συναρτώνται με τρία διαθέσιμα στατιστικά μεγέθη των πραγματικών βροχογραφικών δεδομένων: τη μέση τιμή, τη διασπορά και το συντελεστή αυτοσυσχέτισης 1<sup>ης</sup> τάξεως. Συνεπώς, το σχετικό μαθηματικό μοντέλο αποτελείται από τρεις ανεξάρτητες εξισώσεις, από την επίλυση των οποίων προκύπτουν οι τιμές των τριών αγνώστων παραμέτρων.

Στην περίπτωση του Μοντέλου Λευκού Θορύβου Neyman-Scott, η μέση τιμή, η διασπορά και ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης 1<sup>ης</sup> τάξεως των πραγματικών δεδομένων εμπλέκονται στην κατάστρωση τριών ανεξάρτητων εξισώσεων του μαθηματικού μοντέλου. Η τέταρτη άγνωστη παράμετρος αποκτά χαρακτήρα ανεξάρτητης μεταβλητής, η τιμή της οποίας προκύπτει ως αποτέλεσμα βελτιστοποίησης της προσαρμογής του θεωρητικού στο πραγματικό αυτοσυσχετόγραμμα. Συνεπώς, η τέταρτη παράμετρος του μαθηματικού μοντέλου εξασφαλίζει

την όσο το δυνατό μεγαλύτερη εγγύτητα των θεωρητικών και των πραγματικών συντελεστών αυτοσυσχέτισης.

Η τακτική αυτή δεν είναι απαραίτητα και η μοναδική, που μπορεί να εφαρμοστεί. Παραδείγματος χάριν, θα ήταν δυνατή η άμεση χρήση μιας τέταρτης εξίσωσης, σχετιζόμενης αποκλειστικά και μόνο με το συντελεστή αυτοσυσχέτισης  $2^{15}$  τάξεως. Σε αυτή την περίπτωση, το θεωρητικό μοντέλο θα ήταν υποχρεωτικά συνεπές ως προς το συντελεστή αυτό, χωρίς ωστόσο να λαμβάνεται οποιαδήποτε πρόνοια για τους υπόλοιπους συντελεστές αυτοσυσχέτισης (παραδείγματος χάριν, η τακτική αυτή θα μπορούσε να εφαρμοστεί σε χρονοσειρές ημερήσιας κλίμακας). Η φυσική και πρακτική σημασία των, μεγαλύτερων της  $2^{15}$  τάξεως, συντελεστών αυτοσυσχέτισης, σε συνδυασμό και με τη χρονική κλίμακα των ιστορικών δεδομένων, είναι κάτι το οποίο παραμένει ασχολίαστο στην εργασία των Rodriguez-Iturbe *et al.* (1984). Κατ' επέκταση, δεν αποσαφηνίζεται η σκοπιμότητα ή η έκταση της εμπλοκής του αναλυτή σε μια διαδικασία βελτιστοποίησης ή ακόμα και η διαφορετική βαρύτητα της σημασίας των συντελεστών αυτοσυσχέτισης (οι προαναφερόμενοι ακολούθησαν την τακτική της δοκιμής και σφάλματος, δίνοντας τιμές στην ανεξάρτητη μεταβλητή και εν συνεχεία λύνοντας το ορισμένο  $3 \times 3$  σύστημα γραμμικών εξισώσεων. Για την ωριαία χρονική κλίμακα ιστορικών δεδομένων, ελήφθησαν υπόψιν οι συντελεστές αυτοσυσχέτισης μέχρι την  $32^{\text{η}}$  τάξη).

Δεδομένου του ότι και τα τρία βασικά θεωρητικά μοντέλα, που έχουν αναφερθεί, έχουν τουλάχιστον δύο ανεξάρτητες παραμέτρους, ο μέσος όρος και η διασπορά των ιστορικών δεδομένων διατηρούνται σε κάθε περίπτωση. Στην περίπτωση του τρι-παραμετρικού Μαρκοβιανού Μοντέλου Ορθογωνικών Παλμών καθώς και του Μοντέλου Λευκού Θορύβου Neyman-Scott, τεσσάρων παραμέτρων, διατηρείται και ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης  $1^{15}$  τάξεως. Επιπλέον, στην περίπτωση του Μοντέλου Λευκού Θορύβου Neyman-Scott, λαμβάνεται μέριμνα και ως προς την ελαχιστοποίηση των διαφορών μεταξύ των συντελεστών αυτοσυσχέτισης  $2^{15}$  τάξεως και άνω, της ιστορικής χρονοσειράς και του θεωρητικού μοντέλου.

Η επιτυχία ενός θεωρητικού μοντέλου προσομοίωσης βροχογραφικών δεδομένων έγκειται στη διατήρηση των βασικών στατιστικών χαρακτηριστικών της ιστορικής χρονοσειράς. Είναι σαφές το ότι, θεωρητικά μοντέλα με αυξημένο αριθμό ανεξάρτητων παραμέτρων, μπορούν να εγγυηθούν μεγαλύτερη πιστότητα, ως προς τα στατιστικά χαρακτηριστικά των ιστορικών δεδομένων. Ο αυξημένος βαθμός της πιστότητας αυτής είναι άλλοτε επιβεβλημένος και άλλοτε μη αναγκαίος. Αν για παράδειγμα, οι συντελεστές αυτοσυσχέτισης  $2^{15}$  τάξεως και άνω της ιστορικής χρονοσειράς είναι πρακτικά αμελητέοι, τότε ένα μαθηματικό μοντέλο τριών παραμέτρων θα εξυπηρετούσε με έναν εξίσου αξιόπιστο (σε σχέση με ένα μοντέλο τεσσάρων παραμέτρων) τρόπο τις βασικές επιδιώξεις της προσομοίωσης, διατηρώντας το μέσο όρο, τη διασπορά και το συντελεστή αυτοσυσχέτισης  $1^{15}$  τάξεως. Ένα τέτοιο θεωρητικό μοντέλο είναι το Μαρκοβιανό Μοντέλο Ορθογωνικών Παλμών. Οι Rodriguez-Iturbe *et al.* (1984) επισημαίνουν την καταλληλότητα του μοντέλου αυτού για βροχογραφικά δεδομένα ημερήσιας κλίμακας (βροχογραφικός σταθμός Denver – Colorado), για τα οποία οι συντελεστές αυτοσυσχέτισης  $2^{15}$  τάξεως και άνω είναι αμελητέοι. Σε παρόμοιες διαπιστώσεις καταλήγουν και οι Foufoula-Georgiou και Guttorp (1986).

Συνεπώς, τα στατιστικά χαρακτηριστικά της ιστορικής χρονοσειράς και ιδιαίτερα οι τιμές των συντελεστών αυτοσυσχέτισης υποδεικνύουν και την πολυπλοκότητα του, απαραίτητου προς εφαρμογή, θεωρητικού μαθηματικού μοντέλου. Ένα πολυ-παραμετρικό μαθηματικό μοντέλο προσομοίωσης, όπως το Μοντέλο Λευκού Θορύβου Neyman-Scott, εγγυάται τη διατήρηση περισσότερων στατιστικών χαρακτηριστικών, αυξάνοντας ωστόσο την πολυπλοκότητα του μαθηματικού συστήματος και κατ' επέκταση τον σχετικό υπολογιστικό φόρτο. Η χρήση ενός τέτοιου μοντέλου καθίσταται αναγκαία, όταν η σημασία των συντελεστών αυτοσυσχέτισης  $2^{15}$  τάξεως και άνω δεν είναι δυνατό να αμεληθεί.

## 2.7 Η επίδραση της χρονικής κλίμακας

Από τα προαναφερθέντα είναι σαφές, το ότι η κατάλληλη επιλογή ενός εκ των διαθέσιμων μαθηματικών μοντέλων εξασφαλίζει την επιτυχία της διαδικασίας προσομοίωσης, ως προς τη διατήρηση των επιθυμητών βασικών στατιστικών μεγεθών της ιστορικής χρονοσειράς

(Rodriguez-Iturbe *et al.*, 1984). Οι προσδιορισθείσες παράμετροι του μοντέλου, εκφράζουν μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ της ιστορικής χρονοσειράς και του εφαρμοζόμενου μαθηματικού συστήματος. Ωστόσο, οι τιμές των παραμέτρων αυτών δεν αποτελούν «ιδιότητες» του βροχομετρικού σταθμού, εκ του οποίου έχουν προέλθει τα ιστορικά δεδομένα.

Πιο συγκεκριμένα, η ιστορική χρονοσειρά αποτελείται από μετρήσεις κατακρημνίσεων επί τη βάσει μιας χρονικής κλίμακας,  $T$ . Οι παράμετροι του μοντέλου αντιστοιχούν συνεπώς,

1. Σε συγκεκριμένο βροχογραφικό σταθμό, δηλαδή σε συγκεκριμένο σημείο του χώρου.
2. Σε συγκεκριμένη ομοιογενή υδρολογικά περίοδο.
3. Σε συγκεκριμένη χρονική κλίμακα μετρήσεων,  $T$ , ή σε συγκεκριμένη χρονική κλίμακα αναγωγής των μετρήσεων.
4. Σε συγκεκριμένο μαθηματικό μοντέλο στοχαστικής προσομοίωσης.

Οι παράγοντες αυτοί αποτελούν και την ταυτότητα των παραμέτρων του μαθηματικού μοντέλου προσομοίωσης. Αν οι παράμετροι του μαθηματικού μοντέλου ανεξαρτητοποιηθούν από τη χρονική κλίμακα των υδρολογικών δεδομένων, τότε οι παράμετροι αυτές θα εκφράζουν αμφιμονοσήμαντα συγκεκριμένο τόπο και υδρολογική περίοδο. Υπό αυτή την έννοια, κάθε απόπειρα προς την κατεύθυνση αυτή θα συντελούσε στην εύρεση παραμέτρων, οι οποίες θα αποτελούσαν, με τη γενικότερη έννοια, «ιδιότητες» του συγκεκριμένου τόπου, της συγκεκριμένης περιόδου και του συγκεκριμένου μοντέλου – μεθόδου προσομοίωσης.

Οι Rodriguez-Iturbe *et al.* (1984) διερεύνησαν τη δυνατότητα των τριών, υπό εξέταση μοντέλων, να αποδώσουν με ένα ενιαίο τρόπο, δηλαδή με ένα αμετάβλητο σύνολο τιμών των παραμέτρων τους, την ταυτότητα ενός συγκεκριμένου σταθμού και μιας συγκεκριμένης, ομοιογενούς υδρολογικά, περιόδου για δύο διαφορετικές χρονικές κλίμακες: ημερήσια και ωριαία. Τα τρία μοντέλα προσομοίωσης αποτυγχάνουν να εκφράσουν με ένα μοναδικό τρόπο το χώρο και την υδρολογική περίοδο αναφοράς των ιστορικών δεδομένων, μέσω μιας ενιαίας ομάδας παραμέτρων. Όπως είναι αναμενόμενο, διαφορετικές χρονικές κλίμακες δεδομένων αντιστοιχούν και σε διαφορετικές παραμέτρους.

Η διαφοροποίηση των παραμέτρων είναι μειωμένη στην περίπτωση του πολυ-παραμετρικού Μοντέλου Λευκού Θορύβου Neyman-Scott, ενώ καθίσταται ιδιαίτερα εμφανής σε μαθηματικά μοντέλα λιγότερων ανεξάρτητων παραμέτρων. Υπό αυτή την έννοια, το Μοντέλο Λευκού Θορύβου Neyman-Scott, θεωρείται περισσότερο επιτυχές, σε σχέση με τα υπόλοιπα. Ωστόσο, σε κάθε περίπτωση, η διαφοροποίηση των παραμέτρων και η ισχυρή εξάρτησή τους από τη χρονική κλίμακα των δεδομένων, υφίσταται {Παρά το ότι οι Rodriguez-Iturbe *et al.* (1984) δεν αποδέχονται πλήρως τη διαπίστωση αυτή για το προτεινόμενο από τους ίδιους Μοντέλο Λευκού Θορύβου Neyman-Scott και σε αντίθεση με τα αποτελέσματα, πάνω στο ίδιο μοντέλο, των Fofoula-Georgiou και Guttorp (1986)}.

Η σημασία της ανεξαρτητοποίησης των τιμών των παραμέτρων ενός μοντέλου σημειακής ανέλιξης από τη χρονική κλίμακα καταγραφής ή τη χρονική κλίμακα συνάθροισης βροχογραφικών δεδομένων θα αναλυθεί εκτενώς σε ακόλουθη ενότητα.

## 2.8 Η παραδοχή της εκθετικής κατανομής

Ο Κουτσογιάννης (1988, σελ. 104) αναφέρεται στην εργασία των Restepo-Posada και Eagleson (1982), οι οποίοι, διερευνώντας τα μεταβλητά μεγέθη των χρόνων διαχωρισμού βροχογραφικών δεδομένων μικρής κλίμακας, βασίστηκαν στην υπόθεση ότι η άφιξη των επεισοδίων της βροχής μπορεί να αντιπροσωπευτεί από μια ανέλιξη Poisson. Ωστόσο, στα μοντέλα σημειακής ανέλιξης η έννοια του επεισοδίου της βροχής έχει έναν περισσότερο μαθηματικό, παρά φυσικό χαρακτήρα. Για το μοντέλο ορθογωνικών παλμών, οι Isham *et al.* (1986) επισημαίνουν την απουσία οποιουδήποτε φυσικού νοήματος, όσον αφορά στα χρονικά σημεία άφιξης των παλμών.

Το κυριότερο χαρακτηριστικό των μοντέλων σημειακής ανέλιξης είναι η αποδοχή της αλληλοεπικάλυψης διαδοχικών επεισοδίων βροχής. Ως εκ τούτου, η κλασσικά οριζόμενη έννοια

του χρόνου διαχωρισμού δεν υφίσταται ή στερείται φυσικής σημασίας. Το γεγονός αυτό απαλλάσσει τη σχετική ανάλυση από τις αβεβαιότητες ως προς τον ορισμό του επεισοδίου βροχής, την εξάρτησή του από τη χρονική κλίμακα αναφοράς και την απαιτούμενη διερεύνηση των στατιστικών χαρακτηριστικών των χρόνων διαχωρισμού. Ο Κουτσογιάννης (1988, σελ. 136) επισημαίνει ότι «η απλούστερη και πιο αξιόπιστη λύση για την αναγνώριση των επεισοδίων βροχής [...] μπορεί να δοθεί από τη θεωρία των τυχαίων σημείων στο χρόνο».

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, κατά την κατάστρωση του μαθηματικού μοντέλου προσομοίωσης βροχομετρικών δεδομένων, τρεις είναι οι βασικές υπό εξέταση τυχαίες μεταβλητές: η διάρκεια, το μέγεθος και ο χρόνος άφιξης των θεωρητικών παλμών. Επίσης, έχει ήδη διαφανεί η σπουδαιότητα της εκθετικής κατανομής και η σχεδόν κατά αποκλειστικότητα χρήση της στα σχετικά μοντέλα προσομοίωσης. Το γεγονός αυτό οφείλεται σε δύο κυρίως λόγους:

1. Στον μονο-παραμετρικό χαρακτήρα της εκθετικής κατανομής και στην απλή, αναλυτική έκφραση της αντίστροφης συνάρτησης κατανομής,  $F^{-1}$ , που αυτή συνεπάγεται.
2. Στον εκθετικό χαρακτήρα της κατανομής των πραγματικών δεδομένων και ως εκ τούτου, στη φυσική σημασία, που η χρήση της εκθετικής κατανομής εισάγει στα σχετικά μαθηματικά μοντέλα προσομοίωσης.

Είναι γεγονός πως η ιδιότητα της απουσίας μνήμης (memoryless property) των εκθετικά κατανομημένων τυχαίων μεταβλητών σηματοδοτεί και την καταλληλότητα της χρήσής τους, όσον αφορά στη στοχαστική προσομοίωση βροχομετρικών δεδομένων. Ας υποθεθεί πως σε ένα βροχομετρικό σταθμό δεν έχει καταγραφεί κανένα επεισόδιο για χρονικό διάστημα,  $x$ , ημερών. Η πιθανότητα παράτασης της ανομβρίας για διάστημα,  $y$ , επιπλέον, ημερών θεωρείται ανεξάρτητη του γεγονότος, να μην έχει παρατηρηθεί καμμία κατακρήμνιση για το καταγεγραμμένο διάστημα των πρώτων,  $x$ , ημερών. Συνεπώς, αν η τυχαία μεταβλητή είναι ο χρόνος ανομβρίας,  $t$ , και ισχύει η εκθετική συνάρτηση κατανομής, τότε,

$$P\{t > x + y | t > x\} = P\{t > y\} \quad 2.8.1$$

Στην τεχνική υδρολογία, μια τέτοια υπόθεση θεωρείται ιδιαίτερα ρεαλιστική, όσον αφορά στους χρόνους εμφάνισης ενός γεγονότος. Δηλαδή, αν η τυχαία υπό εξέταση υδρολογική μεταβλητή είναι ο χρόνος άφιξης ενός επεισοδίου, τότε η ανέλιξη Poisson και κατ'επέκταση η εφαρμογή της εκθετικής κατανομής, όσον αφορά στα χρονικά διαστήματα,  $\Delta t$ , μεταξύ δύο διαδοχικών αφίξεων, προσεγγίζει ρεαλιστικά την πραγματική κατανομή της χρονικής υστέρησης, του υπό εξέταση φυσικού φαινομένου. Για την τελική υιοθέτηση της εκθετικής συνάρτησης, ως συνάρτησης κατανομής των χρονικών διαστημάτων,  $\Delta t$ , θα πρέπει να ικανοποιούνται δύο βασικές απαιτήσεις:

1. Τα υδρολογικά δεδομένα να είναι ομοιογενή, δηλαδή να αντιστοιχούν σε υδρολογικά ομοιογενείς περιόδους.
2. Τα υδρολογικά δεδομένα να αντιστοιχούν σε μικρές χρονικές κλίμακες (παραδείγματος χάριν, ημερήσια ή ωριαία).

Η υιοθέτηση της εκθετικής κατανομής δεν είναι γενικά αυτονόητη και για τις υπόλοιπες δύο βασικές τυχαίες μεταβλητές του μαθηματικού μοντέλου προσομοίωσης. Η χρήση της, όσον αφορά στη στοχαστική προσομοίωση του μεγέθους και της διάρκειας των παλμών, υπαγορεύεται κυρίως από την απλότητά της (Οι Rodriguez-Iturbe *et al.* (1984) δε σχολιάζουν, αλλά αφήνουν επανειλημμένως να εννοηθεί, πως η υιοθέτηση της εκθετικής συνάρτησης κατανομής γίνεται για αυτόν ακριβώς το λόγο). Η εκθετική κατανομή είναι μονο-παραμετρική και κατ'επέκταση εισάγει στα σχετικά θεωρητικά μοντέλα προσομοίωσης το μικρότερο δυνατό αριθμό αγνώστων παραμέτρων. Επιπλέον, η παραγωγή τυχαίων εκθετικών μεταβλητών (όπως άλλωστε και στην περίπτωση της κατανομής Pareto) μπορεί να επιτευχθεί με την απευθείας εφαρμογή της Μεθόδου Αντίστροφου Μετασχηματισμού (Inverse Transformation Method, Mooney, 1997, σελ. 14).

Συνεπώς, η φυσική σημασία της υπόθεσης, πως η διάρκεια και το μέγεθος των επεισοδίων ακολουθούν την εκθετική κατανομή, δεν είναι πάντοτε επαρκώς αιτιολογημένη. Είναι αληθές ωστόσο, πως οι διάρκειες των επεισοδίων βροχής ακολουθούν πολύ συχνά εκθετική κατανομή (Κουτσογιάννης, 1996). Συμπερασματικά, αν η υδρολογική τυχαία μεταβλητή είναι ο χρόνος,  $\Delta t$ , που μεσολαβεί μεταξύ των αφίξεων διαδοχικών επεισοδίων βροχής, τότε η χρήση της εκθετικής

κατανομής είναι επαρκώς τεκμηριωμένη. Το ίδιο ισχύει, στις περισσότερες των περιπτώσεων, και για τη διάρκεια των επεισοδίων. Όσον αφορά στο μέγεθος (ένταση) των παλμών, η χρήση της εκθετικής κατανομής γίνεται κυρίως για λόγους απλοποίησης του μαθηματικού μοντέλου, με αποτέλεσμα την εξαγωγή σχετικά απλών και εύχρηστων αναλυτικών εξισώσεων (επίσης προτεινόμενη από πολλούς ερευνητές είναι η – δι παραμετρική - κατανομή Pareto).

Στο σημείο αυτό επισημαίνεται προκαταβολικά ο μη ρεαλιστικός χαρακτήρας, της ανεξαρτησίας της έντασης των ορθογωνικών παλμών από τη χρονική τους διάρκεια. Είναι γενικά αποδεκτό το ότι όσο μεγαλώνει η χρονική διάρκεια της βροχής, τόσο μικραίνει η έντασή της. Το γεγονός αυτό υποδεικνύει μια ισχυρή συσχέτιση μεταξύ των δύο μεγεθών, η οποία δε λαμβάνεται υπόψιν στο Μοντέλο Ορθογωνικών Παλμών.

## 2.9 Εισαγωγή στα μοντέλα συστάδων ορθογωνικών παλμών

Κατά αντιστοιχία με το Μοντέλο Λευκού Θορύβου Neyman-Scott, όπου οι σημειακοί παλμοί εμφανίζονται σε ομάδες, το Μοντέλο Bartlett – Lewis (Bartlett – Lewis Rectangular Pulses Model, BLRPM) αποτελεί εφαρμογή της ίδιας διαδικασίας ομαδοποίησης, για την περίπτωση, όμως, ορθογωνικών παλμών. Όπως στο Μοντέλο Λευκού Θορύβου Neyman-Scott, έτσι και εδώ, η ομαδοποίηση των παλμών συνεπάγεται την αύξηση του αριθμού των τυχαίων μεταβλητών κατά δύο: η μία τυχαία μεταβλητή αντιστοιχεί στον αριθμό των παλμών, που συνιστούν κάθε ομάδα, ενώ η δεύτερη μεταβλητή αφορά στο χρονικό διάστημα, που μεσολαβεί μεταξύ της εμφάνισης δύο διαδοχικών παλμών της ίδιας ομάδας. Συνεπώς, με ομαδοποίηση των παλμών (clustering) το Μοντέλο Λευκού Θορύβου Poisson και το Μοντέλο Ορθογωνικών Παλμών μετεξελίσσονται αντίστοιχα στο Μοντέλο Λευκού Θορύβου Neyman-Scott και στο Μοντέλο Bartlett – Lewis, αυξάνοντας, σε κάθε περίπτωση, τον αριθμό των ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών κατά δύο.

Πέραν του μοντέλου Bartlett – Lewis, ένα εναλλακτικό, παρεμφερές μοντέλο συστάδων ορθογωνικών παλμών είναι το Μοντέλο Ορθογωνικών Παλμών Neyman – Scott (Neyman – Scott Rectangular Pulses Model, NSRPM). Όπως και στο κλασσικό Μοντέλο Λευκού Θορύβου Neyman-Scott, έτσι και στην περίπτωση του μοντέλου NSRPM, ο χρόνος εμφάνισης κάθε παλμού έχει ως σημείο αναφοράς το χρονικό σημείο έναρξης της αντίστοιχης καταιγίδας (επεισοδίου). Το γεγονός αυτό αποτελεί και τη βασική διαφοροποίηση του Μοντέλου Ορθογωνικών Παλμών Neyman – Scott σε σχέση με το Μοντέλο Bartlett – Lewis.

Τα δύο βασικά μοντέλα συστάδων ορθογωνικών παλμών, NSRPM και BLRPM, φαίνονται, εκ πρώτης όψεως, εξίσου αποτελεσματικά. Οι Rodriguez – Iturbe *et al.* (1987 α, σελ. 277) επισημαίνουν πως η επιλογή ενός εκ των δύο είναι μάλλον δύσκολο να στηριχτεί στην εμπειρική ανάλυση των διαθέσιμων δεδομένων. Ωστόσο, οι ίδιοι ερευνητές επισημαίνουν πως το μοντέλο BLRPM υπερτερεί ελαφρώς ως προς την ευχέρεια της μαθηματικής του επεξεργασίας και ανάλυσης. Ακολούθως, περιγράφονται τα βασικά χαρακτηριστικά και οι διαφοροποιήσεις των δύο μοντέλων.

## 2.10 Το μοντέλο ορθογωνικών παλμών Neyman – Scott (NSRPM)

Πέντε είναι τα βασικά χαρακτηριστικά του μοντέλου NSRPM :

- I Μια αρχική ανέλιξη Poisson, παραμέτρου,  $\lambda$ , η οποία και καθορίζει τα χρονικά σημεία έναρξης των γεγονότων (storms, events).
- II Έναν τυχαίο αριθμό,  $C$ , ορθογωνικών παλμών για κάθε μία υπό εξέταση καταιγίδα. Ο αριθμός αυτός μπορεί να προκύπτει είτε από τη γεωμετρική, είτε από την κατανομή Poisson. Σύμφωνα με τους Rodriguez-Iturbe *et al.* (1987 α), η τελική επιλογή αποτελεί καθαρά θέμα παραδοχής, σχετιζόμενο με το αν το χρονικό σημείο έναρξης των καταιγίδων συμπίπτει πάντα με την έναρξη του πρώτου ορθογωνικού παλμού της ομάδας.
- III Τα σημεία έναρξης των ορθογωνικών παλμών, για κάθε επεισόδιο (καταιγίδα), προσδιορίζονται από μια ομάδα τυχαίων και ανεξάρτητων μεταβλητών, των οποίων το μέγεθος αντιστοιχεί σε χρονική απόσταση από την χρονική αφετηρία της καταιγίδας. Στο

σημείο αυτό έγκειται και η βασική διαφοροποίηση του μοντέλου NSRPM και του συναφούς μοντέλου Bartlett – Lewis. Στο μοντέλο Bartlett – Lewis το σημείο έναρξης ενός ορθογωνικού παλμού, προσδιορίζεται σε σχέση με το σημείο έναρξης του ακριβώς προηγούμενου. Και στα δύο μοντέλα, οι αντίστοιχες τυχαίες μεταβλητές θεωρείται πως ακολουθούν την εκθετική κατανομή. Συνεπώς, εισάγεται η απαιτούμενη παράμετρος κλίμακας της εκθετικής κατανομής,  $\beta$ .

- IV Οι διάρκειες των παλμών θεωρείται πως ακολουθούν την εκθετική κατανομή, εισάγοντας μία επιπλέον παράμετρο,  $n$ , στο συνολικό μαθηματικό μοντέλο.
- V Τέλος, για κάθε ορθογωνικό παλμό απαιτείται μία εκτίμηση του εντατικού του μεγέθους (ύψους, έντασης),  $X$ .

Στο αρχικό μαθηματικό μοντέλο εμπεριέχονται τα εξής επτά άγνωστα μεγέθη:

$$\lambda, n, E[C], E[C^2-C], E[X], E[X^2], \beta$$

Οι Rodriguez-Iturbe *et al.* (1987 α), προτείνουν τη χρήση της εκθετικής κατανομής, όσον αφορά στη τυχαία μεταβλητή,  $X$ , ενώ για την τυχαία μεταβλητή,  $C$ , προτείνουν επίσης την εκθετική ή, εναλλακτικά, τη γεωμετρική κατανομή. Συνεπώς,

$$E[X^2] = 2 E^2[X] \quad 2.10.1$$

$$\begin{aligned} E[C^2-C] &= E[C] \{ E[C] + 2 \} - \text{Κατανομή Poisson} \\ E[C^2-C] &= 2 E[C] \{ E[C] - 1 \} - \text{Γεωμετρική κατανομή} \end{aligned} \quad 2.10.2$$

Αναλόγως με το αν υιοθετείται η γεωμετρική ή η κατανομή Poisson για την τυχαία μεταβλητή,  $C$ , το μοντέλο NSRPM αποκαλείται γεωμετρικό ή Poisson αντίστοιχα. Βάσει των παραδοχών αυτών, το τελικό μαθηματικό μοντέλο μετεξελιίσσεται σε μοντέλο πέντε ανεξάρτητων αγνώστων μεγεθών (μεταβλητών):

$$\lambda, n, E[C], E[X], \beta$$

Οι διαθέσιμες εξισώσεις συνδέουν τη μέση τιμή, τη διασπορά και τη αυτοσυνδιασπορά των τιμών της υπό εξέταση ιστορικής χρονοσειράς,  $Y_i$ , με τα προαναφερόμενα θεωρητικά μεγέθη. Για μία δεδομένη στάθμη συνάθροισης,  $h$ , και υστέρηση,  $k$ , των ιστορικών δεδομένων, ο αριθμός των διαθέσιμων εξισώσεων περιορίζεται σε τρεις και το σχετικό σύστημα είναι αόριστο.

$$\begin{array}{l} \text{Εξισώσεις :} \\ \text{Αριθμός εξισώσεων :} \\ \text{Μεταβλητές :} \end{array} \left| \begin{array}{l} E[Y_i(h)] - \text{Var}[Y_i(h)] - \text{Cov}[Y_i(h), Y_{i+k}(h)] \\ 2 + k \\ \lambda, n, E[C], E[X], \beta \end{array} \right.$$

Η εξαγωγή αποτελεσμάτων μπορεί να βασιστεί, είτε στην επίλυση ενός μη γραμμικού συστήματος  $5 \times 5$ , για δύο στάθμες συνάθροισης,  $h_1$  και  $h_2$ , υστέρηση,  $k$ , και διατήρηση της μέσης τιμής,  $E[Y_i(h)]$ , της μικρότερης χρονικής κλίμακας,  $h_1 < h_2$ , είτε σε μία διαδικασία βελτιστοποίησης - προσαρμογής των πέντε παραμέτρων, με απώτερο στόχο τη βέλτιστη προσέγγιση περισσότερων των πέντε εξισώσεων με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Τα δύο μοντέλα, NSRPM και BLRPM, επιδέχονται την ίδια μαθηματική επεξεργασία και, ως εκ τούτου, η σχετική ανάλυση θα σχολιαστεί εκτενώς στην επόμενη ενότητα, περιγραφής του μοντέλου Bartlett – Lewis.

Όπως και στην περίπτωση του Μαρκοβιανού Μοντέλου Ορθογωνικών Παλμών (Rectangular Pulses Markovian Model), αποκλίσεις σε σχέση με το προαναφερόμενο μοντέλο NSRPM, οδηγούν στη διατύπωση ενός τροποποιημένου μοντέλου ορθογωνικών παλμών Neyman – Scott (Modified NSRPM ή MNSRPM ή MNSM). Στην πιο συνηθη περίπτωση, οι χρόνοι εμφάνισης τόσο των καταιγίδων, όσο και των μεμονωμένων παλμών προκύπτουν από την εφαρμογή δύο ανεξάρτητων γεωμετρικών (δι-παραμετρικών) κατανομών. Επιπλέον, για την ένταση των ορθογωνικών παλμών υιοθετείται η (δι-παραμετρική) κατανομή Pareto.

## 2.11 Το μοντέλο Bartlett – Lewis (BL)

Πέντε είναι τα βασικά χαρακτηριστικά του μοντέλου BLRPM:

- I Μία αρχική ανέλιξη Poisson, παραμέτρου,  $\lambda$ , η οποία και καθορίζει τα χρονικά σημεία έναρξης των γεγονότων (storms, events).
- II Μία δεύτερη, ανεξάρτητη από την πρώτη, ανέλιξη Poisson, παραμέτρου,  $\beta$ , η οποία και καθορίζει τα σημεία έναρξης των ορθογωνικών παλμών κατά τη διάρκεια κάθε γεγονότος. Όπως έχει ήδη αναφερθεί και εν αντιθέσει με το μοντέλο NSRPM, ως χρονικό σημείο αναφοράς για την έναρξη ενός παλμού λαμβάνεται το σημείο έναρξης του αμέσως προηγούμενου του.
- III Ο συνολικός χρόνος παραγωγής ορθογωνικών παλμών σε κάθε καταγίδα, δηλαδή ο χρονικός ορίζοντας των παραγόμενων σημείων έναρξης των παλμών αποτελεί ανεξάρτητη τυχαία μεταβλητή, για την οποία και υιοθετείται μία εκθετική κατανομή, με παράμετρο,  $\gamma$ .
- IV Η διάρκεια κάθε παλμού θεωρείται, επίσης, πως ακολουθεί μία εκθετική κατανομή, με παράμετρο,  $n$ .
- V Τέλος, για κάθε ορθογωνικό παλμό απαιτείται μία εκτίμηση του εντατικού του μεγέθους (ύψους, έντασης),  $X$ .

Στο αρχικό, γενικό μαθηματικό μοντέλο εμπεριέχονται τα εξής επτά άγνωστα μεγέθη:

$$\lambda, n, \gamma, E[X], E[X^2], \beta, E[C]$$

Οι Rodriguez-Iturbe *et al.* (1987 α, 1987 β), προτείνουν τη χρήση της εκθετικής κατανομής, όσον αφορά στη τυχαία μεταβλητή,  $X$ . Κατά συνέπεια,

$$E[X^2] = 2E^2[X] \quad 2.11.1$$

Η παράμετρος,  $E[C]$  (ή  $\mu_c$ ), ισούται με την αναμενόμενη τιμή του αριθμού,  $C$ , των ορθογωνικών παλμών ανά επεισόδιο (γεγονός, καταγίδα). Το μέγεθος αυτό είναι εξαρτημένο και αποτελεί συνάρτηση των παραμέτρων  $\beta$  και  $\gamma$ . Ως εκ τούτου, ο αριθμός των ανεξάρτητων αγνώστων μεγεθών του μαθηματικού μοντέλου μειώνεται στα εξής πέντε,

$$\lambda, n, \gamma, E[X], \beta$$

Ο αριθμός αυτός αποτελεί και το ελάχιστο δυνατό πλήθος ανεξάρτητων αγνώστων, δεδομένου του ότι από τη διατύπωση του θεωρητικού μοντέλου εισάγονται πέντε ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με πέντε, κατ' αντιστοιχία, συνολικά συναρτήσεις κατανομής. Το μαθηματικό μοντέλο διαμορφώνεται ως εξής:

$$E [Y_i^{(h)}] = h\rho\mu_c\mu_x \quad 2.11.2$$

$$\begin{aligned} \text{Var} [Y_i^{(h)}] = & 2\rho\mu_c \left\{ E[X^2] + \frac{\beta}{\gamma}\mu_x^2 \right\} \frac{h}{n} - 2\rho\mu_c \left\{ E[X^2] + \frac{\beta\gamma}{\gamma^2 - n^2}\mu_x^2 \right\} \frac{(1 - e^{-nh})}{n^2} + \\ & + 2\rho\mu_c\mu_x^2 \frac{\beta}{\gamma^2 - n^2} (1 - e^{-\gamma h}) \frac{n}{\gamma^2} \end{aligned} \quad 2.11.3$$

$$\begin{aligned} \text{Cov} [Y_i^{(h)}, Y_{i+k}^{(h)}] = & \rho\mu_c \left\{ E[X^2] + \frac{\beta\gamma}{\gamma^2 - n^2}\mu_x^2 \right\} (1 - e^{-nh})^2 \frac{e^{-n(k-1)h}}{n^2} - \\ & - \rho\mu_c\mu_x^2 \frac{\beta}{\gamma^2 - n^2} (1 - e^{-\gamma h})^2 (e^{-\gamma(k-1)h}) \frac{n}{\gamma^2} \end{aligned} \quad 2.11.4$$

$$E [X^2] = 2E^2[X] \quad 2.11.5$$

$$\rho = \frac{\lambda}{n} \quad 2.11.6$$

$$\mu_c = E[C] = 1 + \frac{\beta}{\gamma} \quad 2.11.7$$

Οι εξισώσεις 2.11.2 – 2.11.4 συνιστούν το γενικό μαθηματικό μοντέλο Bartlett – Lewis, ενώ η εξίσωση 2.11.5, αφορά στην υιοθέτηση της εκθετικής κατανομής για την ένταση,  $X$ , των



ορθογωνικών παλμών. Τη βασική αυτή παραδοχή εισάγουν στο γενικό μαθηματικό μοντέλο οι Rodríguez-Iturbe *et al.* (1987 α, β), για λόγους απλοποίησης του. Η εξίσωση 2.11.6 αποτελεί ένα μετασχηματισμό, που χρησιμοποιούν οι Rodríguez-Iturbe *et al.* (1987 α, β) και ο οποίος αναγράφεται για λόγους συνέπειας της διατύπωσης των εξισώσεων του μοντέλου με τις αρχικές, δημοσιευμένες εξισώσεις. Η εξίσωση 2.11.7 αποδίδει την ακριβή εξάρτηση του μεγέθους,  $E[C]$ , από τις παραμέτρους  $\beta$  και  $\gamma$ .

Το μέγεθος,  $h$ , έχει μονάδες χρόνου και υποδηλώνει τη λεπτότητα της χρονικής κλίμακας των υπό εξέταση δεδομένων. Το αδιάστατο μέγεθος,  $k$ , αποτελεί ακέραιο θετικό δείκτη της υστέρησης των υπό εξέταση δεδομένων, και είναι αποκλειστικά συνδεδεμένο με τη συνάρτηση αυτοσυνδιασποράς (Cov, εξίσωση 2.11.4). Το μέγεθος,  $Y_i$ , αφορά τις υπό εξέταση,  $i = 1, 2, \dots$ , μετρήσεις, οι οποίες και θα εκφράζονται σε (mm).

Στον πίνακα 2.11.α, αναλύεται συνοπτικά το προτεινόμενο από τους Rodríguez – Iturbe *et al.*, μαθηματικό μοντέλο,

	Άγνωστες μεταβλητές							Γνωστά μεγέθη							
	$\mu_c$	$\mu_x$	$E[X^2]$	$\rho$	$\beta$	$\lambda$	$\gamma$	$\nu$	$E^{(h)}$	$Var^{(h)}$	$Covar^{(h)}$	$h$		$k$	
$E^{(h)}$	√	√		√					√			√		1	Διασποράς Ανεξάρτητες
$Var^{(h)}$	√	√	√	√	√					√		√		1	
$Covar^{(h)}$	√	√	√	√	√						√	√	√	k	
$\rho$					√		√	√						1	
$\mu_c$	√						√	√						1	
$E[X^2]$		√	√											1	

Πίνακας 2.11.α : Πίνακας εξισώσεων, παραμέτρων και μεταβλητών του μοντέλου BLRPM

Όλα τα εμφανιζόμενα στις παραπάνω εξισώσεις (2.3.1.2 – 2.3.1.7) σύμβολα και οι αντίστοιχες μονάδες τους δίνονται στον πίνακα 2.11.β:

$\lambda$	$h^{-1}$	$h$	$h$	Χρονική κλίμακα δεδομένων
$\beta$	$h^{-1}$	$k$	-	Υστέρηση δεδομένων
$\gamma$	$h^{-1}$	$Y$	mm	Μετρήσεις
$n$	$h^{-1}$	$E[Y_i(h)]$	mm	Μέση τιμή μετρήσεων
$E[X] = \mu_x$	mm/h	$Var[Y_i(h)]$	mm <sup>2</sup>	Διασπορά μετρήσεων
$E[X^2]$	mm <sup>2</sup>	$Cov[Y_i(h), Y_{i+k}(h)]$	-	Αυτοσυνδιασπορά μετρήσεων
$E[C] = \mu_c$	-			
$\rho$	-			

$\lambda, \beta, \gamma, \eta$ : Παράμετροι συναρτήσεων κατανομής

Πίνακας 2.11.β : Μεταβλητές και παράμετροι του μοντέλου Bartlett - Lewis

Για μία δεδομένη χρονική κλίμακα δεδομένων,  $h$ , και μία δεδομένη υστέρηση,  $k$  ( $k = 1$ ), ο αριθμός των διαθέσιμων εξισώσεων είναι  $k + 5 = 6$ , ενώ ο αριθμός των άγνωστων μεταβλητών ισούται με οκτώ. Το μη γραμμικό μαθηματικό σύστημα είναι αόριστο και αποκτά χαρακτηριστικά ορισμένου συστήματος με την προσθήκη  $8 - 6 = 2$  επιπλέον εξισώσεων. Ο αριθμός των πέντε μεταβλητών επίλυσης συμπίπτει με τον αριθμό των ελάχιστων απαιτούμενων ανεξάρτητων εξισώσεων,  $E[Y_i^{(h)}]$ ,  $Var[Y_i^{(h)}]$ ,  $Cov[Y_i^{(h)}, Y_{i+k}^{(h)}]$ .

Οι Rodríguez – Iturbe *et al.* (1987 β, σελ. 9651) και για το μοντέλο NSRPM, προτείνουν την προσθήκη των εξισώσεων διασποράς και αυτοσυνδιασποράς (1<sup>ης</sup> τάξεως) μίας μεγαλύτερης (συναθροισμένης) χρονικής κλίμακας. Επιπλέον, επισημαίνουν (σελ. 9653), πως η ίδια τακτική μπορεί να ακολουθηθεί και στην περίπτωση του μοντέλου BLRPM, χωρίς ωστόσο να αναφέρουν σχετικά αποτελέσματα. Ο πίνακας 2.11.γ, συνοψίζει την τακτική επίλυσης του μη γραμμικού συστήματος 5x5, που οι προαναφερόμενοι ακολούθησαν στην περίπτωση του μοντέλου NSRPM. Τα ιστορικά δεδομένα αφορούσαν μια ωριαία ιστορική χρονοσειρά, επί τη βάση της οποίας προέκυψαν οι συναθροισμένες χρονοσειρές 6, 12 και 24 h.

Στάθμες συνάθροισης				
	$h = 1 \text{ h}$	$h = 6 \text{ h}$	$h = 12 \text{ h}$	$h = 24 \text{ h}$
1	$\mu, \sigma^2, \rho^{(1)}$	$\sigma^2, \rho^{(1)}$		
2	$\mu, \sigma^2, \rho^{(1)}$		$\sigma^2, \rho^{(1)}$	
3	$\mu, \sigma^2, \rho^{(1)}$			$\sigma^2, \rho^{(1)}$
4		$\mu, \sigma^2, \rho^{(1)}$	$\sigma^2, \rho^{(1)}$	

$\rho^{(1)}$  : Συντελεστής αυτοσυσχέτισης 1<sup>ης</sup> τάξης

Πίνακας 2.11.γ : Εναλλακτικοί τρόποι επίλυσης συστήματος εξισώσεων του μοντέλου BLRPM

Όπως ήταν αναμενόμενο, διαφορετικές επιλύσεις του συστήματος απέδωσαν παραπλήσιες, μεν, αλλά διαφορετικές τιμές των πέντε ανεξάρτητων μεταβλητών του μαθηματικού μοντέλου. Δεδομένου του ότι ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας του μαθηματικού μοντέλου είναι  $(8 - k - 5, k \geq 1)$ , για μία και μόνο στάθμη συνάθροισης,  $h$ , και υστέρηση 1<sup>ου</sup>, 2<sup>ου</sup> και 3<sup>ου</sup> βαθμού ( $k_1, k_2$  και  $k_3$ ) το μαθηματικό μοντέλο, επίσης, καταλήγει σε ένα μη γραμμικό σύστημα  $5 \times 5$ , για το οποίο μπορεί και να αναζητηθεί μια ακριβής λύση, ομάδα λύσεων ή μία βέλτιστη λύση.

Με απώτερο στόχο την εύρεση ενός και μόνο συνόλου τιμών των πέντε ανεξάρτητων μεταβλητών, οι οποίες θα αποδίδουν με ένα ικανοποιητικό τρόπο τη μέση τιμή, τη διασπορά και την αυτοσυνδιασπορά (1<sup>ης</sup> τάξεως) σε διαφορετικές στάθμες συνάθροισης, οι Rodriguez – Iturbe *et al.* (1987 β) επισημαίνουν την αναγκαιότητα εφαρμογής μιας διαδικασίας βελτιστοποίησης. Η βελτιστοποίηση αφορά τη μέγιστη δυνατή προσαρμογή των θεωρητικών και πραγματικών τιμών της μέσης τιμής, διασποράς και αυτοσυνδιασποράς, για τα διαφορετικά, υπό εξέταση, επίπεδα συνάθροισης και παραπέμπει στην εφαρμογή της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων.

Στο Παράρτημα I, αναφέρονται περισσότερες λεπτομέρειες και σχόλια, σχετικά με την επίλυση – βελτιστοποίηση του μοντέλου BLRPM.

## 2.12 Το Τυχαίο Μοντέλο Bartlett – Lewis (Random Bartlett-Lewis Model, RBLM)

### 2.12.1 Εισαγωγή

Το (κλασικό) μοντέλο Bartlett – Lewis προσομοιώνει σε ικανοποιητικό βαθμό τα επιθυμητά στατιστικά μεγέθη (μέση τιμή, διασπορά, συντελεστή αυτοσυσχέτισης 1<sup>ης</sup> τάξης), για διαφορετικές χρονικές κλίμακες συνάθροισης. Η προσομοίωση επιτυγχάνεται με τη χρήση μιας ενιαίας ομάδας τιμών των παραμέτρων του, για όλες τις κλίμακες συνάθροισης.

Ωστόσο, σχετικά αποτελέσματα (Rodríguez – Iturbe *et al.*, 1987 β), αποδεικνύουν την αδυναμία του μοντέλου να προσομοιώσει την πιθανότητα της απουσίας βροχόπτωσης (ανομβρίας) για ένα υπό εξέταση χρονικό διάστημα,  $h$  (συνήθως, ως,  $h$ , εκλαμβάνεται η χρονική κλίμακα της εκάστοτε συναθροισμένης χρονοσειράς). Οι χρονικές περίοδοι ανομβρίας προκύπτουν υπερεκτιμημένες και το γεγονός αυτό δημιουργεί την αναγκαιότητα διατύπωσης ενός νέου μοντέλου, στο οποίο θα λαμβάνεται πρόνοια για την προσομοίωση και αυτού του στατιστικού μεγέθους.

Το νέο μοντέλο αποκαλείται Τυχαίο Μοντέλο Bartlett – Lewis και προτάθηκε από τους Rodríguez – Iturbe *et al.* (1988). Πρόκειται για το κλασικό μοντέλο Bartlett – Lewis, διαφοροποιούμενο ως προς την τυχαία μεταβλητή, που αντιστοιχεί στο χρονικό εύρος των ορθογωνικών παλμών. Στο κλασικό μοντέλο Bartlett – Lewis, η μεταβλητή αυτή ακολουθεί την εκθετική συνάρτηση κατανομής, με κοινή παράμετρο κλίμακας,  $\eta$ , για όλες τις υπό εξέταση καταγίδες – γεγονότα του μοντέλου. Στο τυχαίο μοντέλο Bartlett – Lewis, η μεταβλητή αυτή ακολουθεί επίσης την εκθετική συνάρτηση κατανομής, με διαφορετική, ωστόσο, παράμετρο κλίμακας,  $\eta^{(i)}$ , για κάθε καταγίδα,  $i$ . Συνεπώς, η παράμετρος κλίμακας της εκθετικής κατανομής,  $\eta$ , αποκτά χαρακτηριστικά τυχαίας μεταβλητής και η προτεινόμενη συνάρτηση κατανομής της είναι η (δι-παραμετρική) γάμα κατανομή.

Το μαθηματικό μοντέλο RBLM διαμορφώνεται ως εξής:

$$E[Y_i^{(h)}] = \lambda h \mu_x v \frac{1 + \kappa/\varphi}{\alpha - 1} \quad 2.12.1.1$$

$$\text{Var}[Y_i^{(h)}] = 2A_1 \left\{ (\alpha - 3)hv^{2-\alpha} - v^{3-\alpha} + (v+h)^{3-\alpha} \right\} - 2A_2 \left\{ \varphi(\alpha - 3)hv^{2-\alpha} - v^{3-\alpha} + (v+\varphi h)^{3-\alpha} \right\} \quad 2.12.1.2$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}[Y_i^{(h)}] = A_1 \left\{ [v+(k+1)h]^{3-\alpha} - 2(v+kh)^{3-\alpha} + [v+(k-1)h]^{3-\alpha} \right\} - \\ - A_2 \left\{ [v+(k+1)h\varphi]^{3-\alpha} - 2(v+hk\varphi)^{3-\alpha} + [v+(k-1)h\varphi]^{3-\alpha} \right\} \end{aligned} \quad 2.12.1.3$$

$$P(Y_i^{(h)} = 0) = \exp \left\{ -\lambda h - \lambda \mu_\tau + \lambda G_p^*(0,0) \left[ \frac{\varphi + \kappa \left( \frac{v}{v + (\kappa + \varphi)h} \right)^{\alpha-1}}{\varphi + \kappa} \right] \right\} \quad 2.12.1.4$$

$$\mu_\tau \cong E\left[\frac{1}{n}\right] \frac{1}{\varphi} \left\{ 1 + \varphi(\kappa + \varphi) - \frac{1}{4}\varphi(\kappa + \varphi)(\kappa + 4\varphi) + \frac{1}{72}\varphi(\kappa + \varphi)(4\kappa^2 + 27\kappa\varphi + 72\varphi^2) \right\} \quad 2.12.1.5$$

$$G_p^*(0,0) \cong E\left[\frac{1}{n}\right] \frac{1}{\varphi} \left\{ 1 - \kappa - \varphi + \frac{3}{2}\kappa\varphi + \varphi^2 + \frac{1}{2}\kappa^2 \right\} \quad 2.12.1.6$$

$$E\left[\frac{1}{n}\right] = \frac{v}{\alpha - 1} \quad 2.12.1.7$$

$$A_1 = \frac{\lambda \mu_x v^\alpha}{(\alpha - 1)(\alpha - 2)(\alpha - 3)} \left[ E(X^2) + \frac{\kappa \varphi \mu_x^2}{\varphi^2 - 1} \right] \quad 2.12.1.8$$

$$A_2 = \frac{\lambda \mu_c \kappa \mu_x^2 v^\alpha}{\varphi^2 (\varphi^2 - 1) (\alpha - 1) (\alpha - 2) (\alpha - 3)} \quad 2.12.1.9$$

$$E[X^2] = 2E^2[X] = 2\mu_x^2 \quad 2.12.1.10$$

$$\mu_c = 1 + \frac{\kappa}{\varphi} \quad 2.12.1.11$$

$$\left\{ \kappa = \frac{\beta_i}{\eta_i}, \varphi = \frac{\gamma_i}{\eta_i}, \mu_c = E[C] \right\} \quad 2.12.1.12$$

Οι συμβολισμοί παραμένουν οι ίδιοι με την περίπτωση του κλασικού μοντέλου Bartlett – Lewis. Δύο είναι οι νέες σημαντικές διαφοροποιήσεις:

- Η εισαγωγή της εξίσωσης,  $P(Y_i^{(h)} = 0)$ , η οποία και αντιστοιχεί στην πιθανότητα απουσίας βροχόπτωσης στο χρονικό διάστημα,  $h$ .
- Η εισαγωγή στο μαθηματικό μοντέλο των παραμέτρων της γεωμετρικής κατανομής,  $\alpha$  και  $v$ .

Για μία δεδομένη χρονική κλίμακα δεδομένων,  $h$ , και μία δεδομένη υστέρηση,  $k$  ( $k = 1$ ), ο αριθμός των διαθέσιμων εξισώσεων είναι  $k + 10 = 11$ , ενώ ο αριθμός των άγνωστων μεταβλητών ισούται με δεκατρία. Το μη γραμμικό μαθηματικό σύστημα είναι αόριστο. Το μαθηματικό μοντέλο αποκτά χαρακτηριστικά ορισμένου συστήματος (6x6) με την προσθήκη δύο επιπλέον εξισώσεων. Οι Rodriguez – Iturbe *et al.* (1988, σελ. 288) προτείνουν δύο ενδεικτικές λύσεις: η πρώτη αφορά στην προσθήκη των εξισώσεων διασποράς και πιθανότητας ανομβρίας,  $P[Y_i^{(h)} = 0]$ , της μεγαλύτερης (συναθροισμένης) χρονικής κλίμακας (24 h). Στη δεύτερη περίπτωση, λαμβάνονται υπόψιν οι εξισώσεις της πιθανότητας ανομβρίας και αυτοσυσχέτισης 1<sup>ης</sup> τάξης. Σε κάθε μία από τις δύο περιπτώσεις, το μαθηματικό μοντέλο λαμβάνει χαρακτηριστικά ορισμένου μη γραμμικού συστήματος.

Ο αριθμός των μεταβλητών επίλυσης συμπίπτει με τον αριθμό των ανεξάρτητων εξισώσεων, που συνδέουν τα θεωρητικά στατιστικά μεγέθη με τα αντίστοιχα πραγματικά. Οι έξι μεταβλητές επίλυσης είναι οι εξής:

$$\lambda, v, \kappa, \mu_x, \alpha, \varphi$$

Ο πίνακας 2.12.α, συνοψίζει την τακτική επίλυσης του μη γραμμικού συστήματος 6 x 6, που οι προαναφερόμενοι ακολούθησαν στην περίπτωση του μοντέλου RBLM. Τα ιστορικά δεδομένα αφορούσαν μια ωριαία ιστορική χρονοσειρά, επί τη βάση της οποίας προέκυψε και η συναθροισμένη σειρά των 24 h.

	Στάθμες συνάθροισης	
	$h = 1 \text{ h}$	$h = 24 \text{ h}$
Επίλυση 1 <sup>η</sup>	$\mu, \sigma^2, \rho^{(1)}, P[Y_i^{(h)} = 0]$	$\sigma^2, P[Y_i^{(h)} = 0]$
Επίλυση 2 <sup>η</sup>	$\mu, \sigma^2, \rho^{(1)}, P[Y_i^{(h)} = 0]$	$\rho^{(1)}, P[Y_i^{(h)} = 0]$

$\rho^{(1)}$ : Συντελεστής αυτοσυσχέτισης 1<sup>ης</sup> τάξης

Πίνακας 2.12.1.α: Εναλλακτικοί τρόποι επίλυσης συστήματος εξισώσεων του μοντέλου RBLM

Όπως ήταν αναμενόμενο, διαφορετικές επιλύσεις του συστήματος απέδωσαν παραπλήσιες, μεν, αλλά διαφορετικές τιμές των έξι ανεξάρτητων μεταβλητών του μαθηματικού μοντέλου. Οι Rodriguez – Iturbe *et al.* (1988, σελ. 288) επισημαίνουν την εξίσου καλή ποιότητα των δύο εναλλακτικών λύσεων, χωρίς ωστόσο να ποσοτικοποιούν την ποιότητα αυτή. Η προσαρμογή των στατιστικών μεγεθών, και στις δύο περιπτώσεις λύσεων, κρίνεται εξίσου ικανοποιητική, και για τις χρονοσειρές 6 και 12 h, οι οποίες δεν συμμετείχαν στην εξαγωγή των αποτελεσμάτων.

## 2.12.2 Η φυσική σημασία των παραμέτρων του τυχαίου μοντέλου Bartlett – Lewis.

### Ποιοτικά χαρακτηριστικά.

Η διαφοροποίηση της παραμέτρου κλίμακας,  $\eta^{(i)}$ , της εκθετικής συνάρτησης κατανομής, που αντιστοιχεί στην τυχαία μεταβλητή του εύρους των ορθογωνικών παλμών, προσδίδει στο τυχαίο μοντέλο Bartlett – Lewis τα παρακάτω ιδιάζοντα χαρακτηριστικά.

Κατ' αρχήν, από το σχετικό μαθηματικό μοντέλο διαφαίνεται η εκτεταμένη χρήση των παρακάτω αδιαστατοποιημένων μεταβλητών επίλυσης:

$$\kappa = \beta_i / \eta_i, \varphi = \gamma_i / \eta_i \quad 2.12.2.1$$

Ως μεταβλητές επίλυσης, οι τιμές των  $\kappa$  και  $\varphi$  ορίζονται με ένα μοναδικό τρόπο (οι τιμές τους προκύπτουν από την επίλυση του σχετικού μαθηματικού συστήματος). Συνεπώς, η διαφοροποίηση της τυχαίας μεταβλητής,  $\eta_i$ , σε κάθε καταιγίδα,  $i$ , τροποποιεί και την εκάστοτε τιμή των παραμέτρων,  $\beta_i$  και  $\gamma_i$ .

Εν αντιθέσει με την περίπτωση του κλασικού μοντέλου Bartlett – Lewis, όπου η παράμετρος,  $\eta$ , αποτελεί μεταβλητή επίλυσης του συστήματος, στην περίπτωση του τυχαίου μοντέλου Bartlett – Lewis, η παράμετρος της εκθετικής κατανομής,  $\eta$ , αποτελεί τυχαία μεταβλητή. Συνεπώς, μεταβλητές επίλυσης του μαθηματικού συστήματος αποτελούν πλέον οι παράμετροι  $\alpha$  και  $\nu$  της γεωμετρικής συνάρτησης κατανομής της.

Σύμφωνα με την αυστηρώς θεωρητική τεκμηρίωση του μοντέλου, ως μεταβλητές επίλυσης ή βελτιστοποίησης του μαθηματικού μοντέλου θα έπρεπε συμπληρωματικά να επιλεγούν οι παράμετροι  $\beta$  και  $\gamma$  (Σχετική περιγραφή της θεωρητικής υπόστασης των παραμέτρων αυτών έχει γίνει στην παράγραφο 2.3). Σε αυτή την περίπτωση, η επίλυση ή η βελτιστοποίηση του μαθηματικού συστήματος θα απέδιδε, όπως και στην περίπτωση του κλασικού μοντέλου Bartlett – Lewis, ένα μοναδικό ζευγάρι τιμών των παραμέτρων,  $\beta$  και  $\gamma$ , για όλες τις καταιγίδες – γεγονότα του μοντέλου.

Δεδομένου του ότι τα πηλίκα  $1 / \gamma$  και  $1 / \beta$  αντιστοιχούν στην μέση διάρκεια της καταιγίδας και στη μέση χρονική απόσταση των σημείων άφιξης των ορθογωνικών παλμών, τα μεγέθη αυτά θα παρέμεναν ανεξάρτητα της μεταβαλλόμενης μέσης, ανά καταιγίδα, χρονικής διάρκειας των παλμών,  $1 / \eta^{(i)}$ . Δεν έχει διερευνηθεί η επιτυχία μιας τέτοιας προσέγγισης. Είναι πολύ πιθανό (σχεδόν βέβαιο) ότι το μοντέλο προσομοίωσης συμπεριφέρεται πολύ ικανοποιητικά και σε αυτή την περίπτωση, αν και η φυσική σημασία μιας τέτοιας θεώρησης θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως μη ρεαλιστική.

Για αυτό το λόγο, οι Rodriguez – Iturbe *et al.* (1988) εισάγουν τις αδιαστατοποιημένες μεταβλητές επίλυσης,  $\kappa$  και  $\varphi$  (εξισώσεις 2.4.2.1), βάσει των οποίων, οι παράμετροι των δύο εκθετικών κατανομών,  $\beta_i$  και  $\gamma_i$ , μεταβάλλονται σε κάθε καταιγίδα,  $i$ , εξαρτώμενες από την εκάστοτε τιμή της παραμέτρου,  $\eta_i$ .

Σε επίπεδο προσομοίωσης, η διαδικασία αναπαραγωγής των θεωρητικών γεγονότων βροχής μπορεί να περιγραφεί από το παρακάτω σχήμα:

$$\kappa, \varphi, \alpha, \nu, \lambda, \mu_x \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} \kappa, \varphi \\ (\alpha, \nu) \Rightarrow \eta_i \end{array} \right] \Rightarrow \beta_i, \gamma_i \\ \lambda \\ (\mu_x) \Rightarrow \lambda_x = \mu_x^{-1} \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda, \gamma_i, (\eta_i, \beta_i, \lambda_x)$$

Σχήμα 2.12.2 : Σχηματική αναπαράσταση της μεθόδου υπολογισμού των παραμέτρων και μεταβλητών του μοντέλου RBLM

Οι μεταβλητές επίλυσης,  $\kappa, \varphi, \alpha, \nu, \lambda, \mu_x$ , οδηγούν στον προσδιορισμό των βασικών στατιστικών παραμέτρων του μοντέλου,  $\lambda, \gamma_i, \eta_i, \beta_i, \lambda_x$ , όπου:

- $\lambda$ : η παράμετρος της αρχικής ανέλιξης Poisson, η οποία καθορίζει και τα χρονικά σημεία έναρξης των γεγονότων (καταιγίδων).
- $\gamma_i$ : η παράμετρος της εκθετικής κατανομής, η οποία υιοθετείται για την περιγραφή της τυχαίας μεταβλητής, που αντιστοιχεί στο χρονικό ορίζοντα των παραγομένων σημείων έναρξης των ορθογωνικών παλμών, σε κάθε καταιγίδα,  $i$ .
- $\eta_i$ : η παράμετρος της εκθετικής κατανομής, η οποία υιοθετείται για την περιγραφή της τυχαίας μεταβλητής, που αντιστοιχεί στο χρονικό εύρος των ορθογωνικών παλμών, που αποτελούν την καταιγίδα,  $i$ .
- $\beta_i$ : η παράμετρος της ανέλιξης Poisson, η οποία καθορίζει και τα χρονικά σημεία έναρξης των ορθογωνικών παλμών, για κάθε καταιγίδα,  $i$ .
- $\lambda_x$ : η παράμετρος της εκθετικής κατανομής, η οποία υιοθετείται για την περιγραφή της τυχαίας μεταβλητής, που αντιστοιχεί στο ύψος (ένταση) των ορθογωνικών παλμών, που αποτελούν την καταιγίδα,  $i$ .

Στον πίνακα 2.12.2.α, αναγράφονται τα βασικά χαρακτηριστικά μεγέθη του τυχαίου μοντέλου Bartlett – Lewis για μία δεδομένη καταιγίδα,  $i$ .

Μέση διάρκεια παλμού	$1 / \eta_i$	h
Μέση χρονική απόσταση άφιξης παλμών	$1 / \beta_i$	h
Μέση τιμή αριθμού αφίξεων παλμών ανά ώρα	$1 / (1 / \beta_i) = \beta_i$	No / h
Μέση τιμή έντασης παλμών	$\mu_x = 1 / \lambda_x$	mm / h
Μέση διάρκεια («ζωντανής») καταιγίδας	$1 / \gamma_i$	h
Μέση διάρκεια («ενεργούς») καταιγίδας *	$\mu_\tau$	h
Μέση χρονική απόσταση άφιξης καταιγίδων	$1 / \lambda$	h
Μέση τιμή αριθμού αφίξεων καταιγίδων ανά ώρα	$1 / (1 / \lambda) = \lambda$	N° / h
Μέση τιμή αριθμού παλμών ανά καταιγίδα	$\mu_c = 1 + \frac{(1/\gamma_i)}{(1/\beta_i)} = 1 + \frac{\beta_i}{\gamma_i} = 1 + \frac{\kappa}{\phi}$	N°
Μέσο ύψος βροχόπτωσης, ΣΥ, ανά καταιγίδα	$\sum Y^{\text{storm}} = \left(1 + \frac{\beta_i}{\gamma_i}\right) (1/\eta_i) (\mu_x)$	mm
Μέση ένταση καταιγίδας	$\sum Y^{\text{storm}} / \mu_\tau$	mm / h

$$* \mu_\tau \cong E \left[ \frac{1}{\eta} \right] \frac{1}{\phi} \left\{ 1 + \phi(\kappa + \phi) - \frac{1}{4} \phi(\kappa + \phi) (\kappa + 4\phi) + \frac{1}{72} \phi(\kappa + \phi) (4\kappa^2 + 27\kappa\phi + 72\phi^2) \right\}$$

$$E \left[ \frac{1}{\eta} \right] = \frac{\nu}{\alpha - 1} \quad \text{και για μία συγκεκριμένη καταιγίδα, } E \left[ \frac{1}{\eta_i} \right] = \frac{1}{\eta_i}$$

Πίνακας 2.12.2.α : Χαρακτηριστικά μεγέθη του μοντέλου RBLM για μία υπό εξέταση καταιγίδα, i

Οι όροι «ζωντανή» (live) και «ενεργός» (active) καταιγίδα εισάγονται για να εκφράσουν την παράταση της θεωρητικής διάρκειας ( $1 / \gamma_i$ ) της καταιγίδας, λόγω του τελευταίου ή των τελευταίων ορθογωνικών παλμών. Οι παλμοί αυτοί ενδέχεται να υπερβαίνουν το θεωρητικά ορισμένο, μέσω της παραμέτρου,  $\gamma_i$ , τέλος της. Τα προαναφερόμενα χαρακτηριστικά μεγέθη του μοντέλου παραμένουν σταθερά ή διαφοροποιούνται με τη μεταβολή της παραμέτρου,  $\eta_i$ , σύμφωνα με τον παρακάτω ενδεικτικό πίνακα:

	$\eta_{i+1} = 50\% \eta_i$	$\eta_{i+1} = 200\% \eta_i$
Μέση διάρκεια παλμού	200%	50%
Μέση χρονική απόσταση άφιξης παλμών	200%	50%
Μέση τιμή αριθμού αφίξεων παλμών ανά ώρα	50%	200%
Μέση τιμή έντασης παλμών	100%	100%
Μέση διάρκεια («ζωντανής») καταιγίδας	200%	50%
Μέση διάρκεια («ενεργούς») καταιγίδας	200%	50%
Μέση χρονική απόσταση άφιξης καταιγίδων	100%	100%
Μέση τιμή αριθμού αφίξεων καταιγίδων ανά ώρα	100%	100%
Μέση τιμή αριθμού παλμών ανά καταιγίδα	100%	100%
Μέσο ύψος βροχόπτωσης, ΣΥ, ανά καταιγίδα	200%	50%
Μέση ένταση καταιγίδας	100%	100%

Πίνακας 2.12.2.β : Εξάρτηση χαρακτηριστικών μεγεθών μοντέλου RBLM, σε σχέση με την παράμετρο, η

Από τον Πίνακα 2.12.2.β, προκύπτει ότι η μέση ένταση των καταιγίδων παραμένει σταθερή και ανεξάρτητη της διάρκειάς της. Αυτό συμβαίνει επειδή το μέσο ύψος βροχόπτωσης ανά καταιγίδα μεταβάλλεται αναλογικά, σε σχέση με τη μέση χρονική διάρκειά της. Συνεπώς, διαπιστώνεται μια

μη συνεπής, ως προς τα φυσικά του χαρακτηριστικά, προσομοίωση του φαινομένου της βροχόπτωσης. Το γεγονός αυτό δεν αναιρεί την πολύ ικανοποιητική «μαθηματική» λειτουργία του μοντέλου και τον αντίστοιχο βαθμό προσέγγισης των στατιστικών χαρακτηριστικών της ιστορικής χρονοσειράς.



## 2.13 Το τροποποιημένο τυχαίο μοντέλο Bartlett – Lewis (Modified / Quadratic Random Bartlett – Lewis Model, MRBLM)

### 2.13.1 Εισαγωγή στο νέο τροποποιημένο τυχαίο μοντέλο Bartlett - Lewis

Η ανεξαρτησία της μέσης έντασης κάθε καταιγίδας,  $i$ , από τη μεταβολή της τυχαίας μεταβλητής,  $\eta_i$ , και κατ' επέκταση από τη μέση διάρκειά της, αποτελεί μία «φυσικού» χαρακτήρα αστοχία του τυχαίου μοντέλου Bartlett – Lewis. Ο Κουτσογιάννης έχει επισημάνει αυτή τη δυσλειτουργία και έχει διερευνήσει την τροποποίηση του τυχαίου μοντέλου Bartlett – Lewis προς την κατεύθυνση της (αρνητικής) συσχέτισης της μέσης διάρκειας κάθε καταιγίδας με τη μέση ένταση της βροχόπτωσης.

Προκειμένου η μέση ένταση της καταιγίδας να μεταβάλλεται αντιστρόφως ανάλογα σε σχέση με τη διάρκειά της, ο Κουτσογιάννης προτείνει τη συσχέτιση της παραμέτρου,  $\beta$ , με την παράμετρο,  $\eta$ , σύμφωνα με την παρακάτω μη γραμμική εξίσωση:

$$\beta_i = \kappa_1 \eta_i + \kappa_2 \eta_i^2 \quad 2.13.1.1$$

Η προηγούμενη εξίσωση ευθύνεται και για την πρόσδοση του χαρακτηρισμού quadratic, στο νέο προτεινόμενο μοντέλο.

Δεδομένου του ότι η ένταση της καταιγίδας ισούται με  $\Sigma Y^{\text{storm}} / \mu_\tau$  και λαμβάνοντας υπόψιν τη διάρκεια της «ζωντανής» (live) καταιγίδας (για λόγους απλοποίησης), δηλαδή,  $\mu_\tau \cong 1 / \gamma_i$ , προκύπτει η παρακάτω εξίσωση μέσης έντασης της καταιγίδας:

$$\Sigma Y^{\text{storm}} / \mu_\tau \cong \Sigma Y^{\text{storm}} / (1 / \gamma_i) = \{(1 + \beta_i / \gamma_i) (1 / \eta_i) \mu_x\} / (1 / \gamma_i) = \mu_x (\varphi + \kappa_1 + \kappa_2 \eta_i) \quad 2.13.1.2$$

Στον Πίνακα 2.13.1.α, δίνεται η μεταβολή των βασικών μεγεθών του μαθηματικού μοντέλου, όταν η μεταβλητή,  $\eta_i$ , μειώνεται ( $\eta_i \downarrow$ ):

$\eta_i$	↓	
$1 / \eta_i$	↑	Μέση διάρκεια παλμών
$\beta_i = \kappa_1 \eta_i + \kappa_2 \eta_i^2$	↓	
$1 / \beta_i$	↑	Μέση χρονική απόσταση μεταξύ διαδοχικών παλμών
$\gamma_i = \varphi \eta_i$	↓	
$1 / \gamma_i$	↑	Μέση διάρκεια «ζωντανής» καταιγίδας
$\kappa_i = \beta_i / \eta_i = \kappa_1 + \kappa_2 \eta_i$	↓	Μέση διάρκεια προς μέση χρονική απόσταση παλμών
$\Sigma Y^{\text{storm}} / \mu_\tau \cong \Sigma Y^{\text{storm}} / (1 / \gamma_i) = \mu_x (\varphi + \kappa_i)$	↓	Μέση ένταση καταιγίδας

Πίνακας 2.13.1.α : Εξάρτηση των βασικών μεγεθών του νέου τυχαίου μοντέλου Bartlett – Lewis, σε σχέση με τη μεταβλητή,  $\eta_i$ .

Όπως και στο αρχικά προτεινόμενο τυχαίο μοντέλο Bartlett – Lewis, η αδιαστατοποιημένη παράμετρος,  $\varphi$ , είναι μία εκ των μεταβλητών επίλυσης ή βελτιστοποίησης του μαθηματικού συστήματος και συνεπώς η τιμή της παραμένει ενιαία (σταθερή) για το σύνολο των θεωρητικών καταιγίδων. Αντιθέτως, η αδιαστατοποιημένη παράμετρος,  $\kappa$ , αποκτά χαρακτηριστικά τυχαίας μεταβλητής και παύει να αποτελεί μεταβλητή επίλυσης του συστήματος (δεν υφίσταται μία ενιαία τιμή για το σύνολο των υπό εξέταση θεωρητικών καταιγίδων).

Τα βασικά στατιστικά χαρακτηριστικά μεγέθη του νέου τυχαίου μοντέλου Bartlett – Lewis έχουν ως εξής:

	Μεταβλητές επίλυσης	Αριθμός μεταβλητών Επίλυσης
$\eta_i (\alpha, \nu)$	$\alpha, \nu$	2
$\beta_i = \kappa_1 \eta_i + \kappa_2 \eta_i^2$	$\kappa_1, \kappa_2$	2
$\gamma_i = \varphi \eta_i$	$\varphi$	1
$\lambda$	$\lambda$	1
$\mu_x$	$\mu_x$	1

Σύνολο: 7

Πίνακας 2.13.1.β : Μεταβλητές επίλυσης του νέου τυχαίου μοντέλου Bartlett - Lewis

Οι μεταβλητές επίλυσης του νέου τυχαίου μοντέλου Bartlett – Lewis είναι εφτά, εν αντιθέσει με το αρχικό τυχαίο μοντέλο, όπου ο αριθμός των μεταβλητών επίλυσης ισούται με έξι. Η διαφοροποίηση ουσιαστικά έγκειται στην αντικατάσταση της μεταβλητής,  $\kappa$ , από τις νέες μεταβλητές επίλυσης,  $\kappa_1$  και  $\kappa_2$ .

Οι Κουτσογιάννης και Ονοφ διερεύνησαν τη δυνατότητα διατύπωσης του νέου μαθηματικού μοντέλου και πιο συγκεκριμένα των εξισώσεων, που αποδίδουν τη μέση τιμή, διασπορά, αυτοσυνδιασπορά  $\kappa$ -τάξεως και την πιθανότητα απουσίας βροχόπτωσης,  $P[Y_i^{(h)} = 0]$ . Το προτεινόμενο μαθηματικό μοντέλο δίνεται αναλυτικά στην επόμενη παράγραφο.

### 2.13.2 Οι εξισώσεις του Τροποποιημένου Τυχαίου Μοντέλου Bartlett – Lewis

Μεταβλητές επίλυσης:

$$\varphi, \nu, \alpha, \lambda, \mu_x, \kappa_1, \kappa_2$$

Φυσικοί και μαθηματικοί περιορισμοί:

$$\alpha, \varphi, \nu, \lambda, \mu_x, \kappa_1, \kappa_2 \geq 0$$

$$\alpha \neq 1, \alpha \neq 2, \alpha \neq 3$$

$$\varphi \neq 0, \varphi \neq 1$$

Διατύπωση μαθηματικού μοντέλου:

$$E[X^2] = 2\mu_x^2 \quad 2.13.2.1$$

$$E[Y_i^{(h)}] = \lambda h \mu_x \left\{ \frac{\nu}{\alpha-1} \left( 1 + \frac{\kappa_1}{\varphi} \right) + \frac{\kappa_2}{\varphi} \right\} \quad 2.13.2.2$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[Y_i^{(h)}] = & \frac{2\lambda\nu\kappa_2}{(\alpha-1)\varphi} \left[ hE[X^2] + h\mu_x^2 \left( 1 + \frac{2\kappa_1}{\varphi} \right) + \frac{\mu_x^2\kappa_2}{\varphi^2(\varphi^2-1)} \left( 1 - \left( \frac{\nu}{\nu+\varphi h} \right)^{(\alpha-1)} \right) - \frac{\kappa_2\mu_x^2\varphi}{\varphi^2-1} \left( 1 - \left( \frac{\nu}{\nu+h} \right)^{(\alpha-1)} \right) \right] + \\ & + \frac{2\lambda h\kappa_2^2\mu_x^2}{\varphi^2} + \frac{2\lambda\nu^2}{(\alpha-1)(\alpha-2)} \left[ \left( 1 + \frac{\kappa_1}{\varphi} \right) h \left( E[X^2] + \mu_x^2 \frac{\kappa_1}{\varphi} \right) + \frac{\kappa_2\mu_x^2}{\varphi^2(\varphi^2-1)} \left( 1 + \frac{2\kappa_1}{\varphi} \right) \left( 1 - \left( \frac{\nu}{\nu+\varphi h} \right)^{(\alpha-2)} \right) - \right. \\ & \left. - \kappa_2 \left( 1 - \left( \frac{\nu}{\nu+h} \right)^{(\alpha-2)} \right) \left( \frac{E[X^2]}{\varphi} + \frac{\mu_x^2\varphi}{\varphi^2-1} \left( 1 + \frac{2\kappa_1}{\varphi} \right) \right) \right] + \\ & + \frac{2\lambda\nu^3 \left( 1 + \frac{\kappa_1}{\varphi} \right)}{(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)} \left[ \frac{\mu_x^2\kappa_1}{\varphi^2(\varphi^2-1)} \left( 1 - \left( \frac{\nu}{\nu+\varphi h} \right)^{(\alpha-3)} \right) - \left( E[X^2] + \frac{\mu_x^2\varphi}{\varphi^2-1} \kappa_1 \right) \left( 1 - \left( \frac{\nu}{\nu+h} \right)^{(\alpha-3)} \right) \right] \end{aligned} \quad 2.13.2.3$$

$$\text{Cov}[Y_i^{(h)}, Y_{i+k}^{(h)}] = \lambda \left(1 + \frac{\kappa_1}{\phi}\right) \left( E[X^2] + \frac{\kappa_1 \phi \mu_x^2}{\phi^2 - 1} \right) A_3(1) + \lambda \kappa_2 \left[ \frac{E[X^2]}{\phi} + \frac{\phi \left(1 + \frac{2\kappa_1}{\phi}\right)}{\phi^2 - 1} \mu_x^2 \right] A_2(1) + \tag{2.13.2.4}$$

$$+ \frac{\lambda \kappa_2^2 \mu_x^2}{\phi^2 - 1} A_1(1) - \frac{\lambda \mu_x^2}{\phi^2 (\phi^2 - 1)} \left[ \left(1 + \frac{\kappa_1}{\phi}\right) \kappa_1 A_3(\phi) + \left(1 + \frac{2\kappa_1}{\phi}\right) \kappa_2 A_2(\phi) + \frac{\kappa_2^2}{\phi} A_1(\phi) \right]$$

$$A_1(x) = \frac{v}{\alpha - 1} \left[ \left( \frac{v}{v + x(k-1)h} \right)^{\alpha-1} - 2 \left( \frac{v}{v + xkh} \right)^{\alpha-1} + \left( \frac{v}{v + x(k+1)h} \right)^{\alpha-1} \right] \tag{2.13.2.5}$$

$$A_2(x) = \frac{v^2}{(\alpha-1)(\alpha-2)} \left[ \left( \frac{v}{v + x(k-1)h} \right)^{\alpha-2} - 2 \left( \frac{v}{v + xkh} \right)^{\alpha-2} + \left( \frac{v}{v + x(k+1)h} \right)^{\alpha-2} \right] \tag{2.13.2.6}$$

$$A_3(x) = \frac{v^3}{(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)} \left[ \left( \frac{v}{v + x(k-1)h} \right)^{\alpha-3} - 2 \left( \frac{v}{v + xkh} \right)^{\alpha-3} + \left( \frac{v}{v + x(k+1)h} \right)^{\alpha-3} \right] \tag{2.13.2.7}$$

$$E_\eta[\mu_\tau(\eta)] = \phi \int_0^1 \int_0^1 \omega^{-1} t^{\phi-1} \left( \frac{v}{\alpha-1} \right) \left[ 1 - (1-\omega t) e^{-\kappa_1 \omega(1-t)} \left( \frac{v}{v + \kappa_2 \omega(1-t)} \right)^{\alpha-1} \right] d\omega dt + \left( \frac{v}{\alpha-1} \right) \frac{1}{\phi} \tag{2.13.2.8}$$

$$I_1(t) = E_\eta \left[ \frac{e^{-(\kappa_1 + \kappa_2 \eta)(1-t)}}{\eta(\kappa_1 + \kappa_2 \eta + \phi)} \right] = \int_0^{+\infty} \left\{ \frac{\eta^{(\alpha-1)} v^\alpha e^{(-v\eta)}}{\Gamma(\alpha)} \left[ \frac{e^{-(\kappa_1 + \kappa_2 \eta)(1-t)}}{\eta(\kappa_1 + \kappa_2 \eta + \phi)} \right] \right\} d\eta \tag{2.13.2.9}$$

$$I_2(t) = E_\eta \left[ \frac{e^{-(\kappa_1 + \kappa_2 \eta)(1-t)} e^{-(\kappa_1 \eta + \kappa_2 \eta^2 + \phi \eta)h}}{\eta(\kappa_1 + \kappa_2 \eta + \phi)} \right] = \int_0^{+\infty} \left\{ \frac{\eta^{(\alpha-1)} v^\alpha e^{(-v\eta)}}{\Gamma(\alpha)} \left[ \frac{e^{-(\kappa_1 + \kappa_2 \eta)(1-t)} e^{-(\kappa_1 \eta + \kappa_2 \eta^2 + \phi \eta)h}}{\eta(\kappa_1 + \kappa_2 \eta + \phi)} \right] \right\} d\eta \tag{2.13.2.10}$$

$$I_3(t) = E_\eta \left[ \frac{e^{-(\kappa_1 + \kappa_2 \eta)(1-t)} e^{-(\kappa_1 \eta + \kappa_2 \eta^2 + \phi \eta)h}}{(\kappa_1 + \kappa_2 \eta + \phi)} \right] = \int_0^{+\infty} \left\{ \frac{\eta^{(\alpha-1)} v^\alpha e^{(-v\eta)}}{\Gamma(\alpha)} \left[ \frac{e^{-(\kappa_1 + \kappa_2 \eta)(1-t)} e^{-(\kappa_1 \eta + \kappa_2 \eta^2 + \phi \eta)h}}{(\kappa_1 + \kappa_2 \eta + \phi)} \right] \right\} d\eta \tag{2.13.2.11}$$

$$\text{PDRY}(h) = \exp \left\{ -\lambda (h + E_\eta[\mu_\tau(\eta)]) + \int_0^1 t^{\phi-1} (1-t) \lambda [\phi I_1(t) + \kappa_1 I_2(t) + \kappa_2 I_3(t)] dt \right\} \tag{2.13.2.12}$$

### 3 Προσαρμογή – Προσδιορισμός των παραμέτρων του MRBLM: Επεξεργασία και απλοποίηση του μαθηματικού μοντέλου

#### 3.1 Εισαγωγή

Για την ανάλυση, που ακολουθεί, λαμβάνονται υπόψιν τα στατιστικά δεδομένα της ιστορικής χρονοσειράς, στην οποία βασίστηκαν οι Rodriguez – Iturbe *et al.* (1988), για την εξαγωγή των πρώτων δημοσιευμένων αποτελεσμάτων, σχετικά με το τυχαίο μοντέλο BL. Η ωριαία αυτή χρονοσειρά έχει προέλθει από το βροχογραφικό σταθμό του αεροδρομίου του Denver (Denver Airport Station, 15/05 – 16/06, 1949-1976) και οι υπό εξέταση στάθμες συνάθροισης αντιστοιχούν σε 6, 12 και 24 h.

$h$	$E[Y_i]$	$Var[Y_i]$	$\rho^{(1)}$	PDR *	Covar <sup>(1)**</sup>
1	0.0885	0.403	0.480	0.939	0.193
6	0.5310	5.970	0.332	0.856	1.982
12	1.0630	16.883	0.230	0.780	3.883
24	2.1250	41.606	0.157	0.642	6.532

Πίνακας 3.1 : Βασικά στατιστικά μεγέθη ιστορικής χρονοσειράς Denver (15/05–16/06, 1949–1976)

\* PDR: Proportion Dry – πιθανότητα απουσία βροχόπτωσης για το διάστημα,  $h$ .

\*\* Covar<sup>(1)</sup>:  $\cong Var[Y_i] \times \rho^{(1)}$

Το μαθηματικό μοντέλο εξετάζεται και τροποποιείται υπό το πρίσμα της ευχέρειας του τελικού προσδιορισμού των επτά αγνώστων παραμέτρων του. Δεδομένου του αριθμού των μεταβλητών επίλυσης (επτά) απαιτείται η επιλογή, τουλάχιστον, επτά στατιστικών μεγεθών από τις τέσσερις προαναφερόμενες συναθροισμένες χρονοσειρές, επί τη βάση των οποίων θα διεξαχθεί η σχετική απόπειρα προσαρμογής, μέσω ενός κατάλληλου αλγόριθμου βελτιστοποίησης.

Ο σχολιασμός των τελικώς επιλεγόμενων μεθόδων αριθμητικής ανάλυσης για την επίλυση των απλών και διπλών ολοκληρωμάτων του μοντέλου, ακολουθεί σε επόμενα κεφάλαια. Επιπλέον, μία εκτενής ανάλυση του χρησιμοποιούμενου (νέου) αλγόριθμου βελτιστοποίησης γίνεται στο σχετικό παράρτημα (Παράρτημα II). Επί του παρόντος, στο κεφάλαιο αυτό θα σχολιαστούν οι πιθανές δυνατότητες απλοποίησης της διαδικασίας βελτιστοποίησης.

Υπό αυτό το πρίσμα, ακολούθως, τεκμηριώνεται η απόπειρα μείωσης των μεταβλητών επίλυσης από επτά σε έξι, η επιλογή της εξαρτημένης παραμέτρου, που προκύπτει, η δυνατότητα εκτίμησης της βέλτιστης τιμής της παραμέτρου,  $\lambda$  και επιπλέον η σκοπιμότητα εισαγωγής της εξίσωσης αυτοσυνδιασποράς, έναντι της εξίσωσης του συντελεστή αυτοσυσχέτισης (τακτική, που ακολουθούν οι Rodriguez – Iturbe *et al.*, 1988), στην τελική διαμόρφωση του μοντέλου. Στην παράγραφο 4.5 αποσαφηνίζονται τα κριτήρια αξιολόγησης των αποτελεσμάτων της βελτιστοποίησης, η αντικειμενική συνάρτηση και οι εισαγόμενοι στο μοντέλο, σχετικοί περιορισμοί.

Επιπλέον, μέσα από μία διαδικασία εφαρμογής απλών δι-παραμετρικών εξισώσεων προσαρμογής για κάθε στατιστικό μέγεθος χωριστά, διαφαίνεται η ισχύς ενός κριτηρίου (εκ των προτέρων) αξιολόγησης της επιτυχίας εφαρμογής του τυχαίου και του τροποποιημένου τυχαίου μοντέλου BL. Η σχετική ανάλυση βασίζεται στις βασικές αρχές της αποσύνθεσης (Decomposition methods, Pardalos και Resende, 2002, σελ. 337 ♦ Edgar και Himmelblau, 1989, σελ. 19, 558) των προβλημάτων βελτιστοποίησης και τα σχετικά ποιοτικά αποτελέσματα ενισχύονται από τα αποτελέσματα της εργασίας των Isham *et al.* (1990), καθώς και από τα δημοσιευμένα αποτελέσματα, για τέσσερις ιστορικές χρονοσειρές, αναφορικά με το τυχαίο μοντέλο BL [Rodriguez – Iturbe *et al.* (1988), Isham *et al.*, (1990), Velghe *et al.* (1994)].

Υπενθυμίζεται το ότι το τροποποιημένο τυχαίο μοντέλο BL εκπίπτει στο (κλασικό) τυχαίο μοντέλο BL για τιμή της παραμέτρου,  $\kappa_2 = 0$ .

### 3.2 Η γραμμική συσχέτιση μέσης τιμής $E[Y_i^{(h)}]$ και στάθμης συνάθροισης, $h$ .

Η θεωρητική εξίσωση του τροποποιημένου τυχαίου μοντέλου BL για τη μέση τιμή των δεδομένων μίας υπό εξέταση ιστορικής χρονοσειράς και για στάθμη συνάθροισης,  $h$ , έχει ως εξής:

$$E[Y_i^{(h)}] = \lambda \mu_x \left\{ \frac{v}{\alpha - 1} \left( 1 + \frac{\kappa_1}{\phi} \right) + \frac{\kappa_2}{\phi} \right\} \quad 3.2.1$$

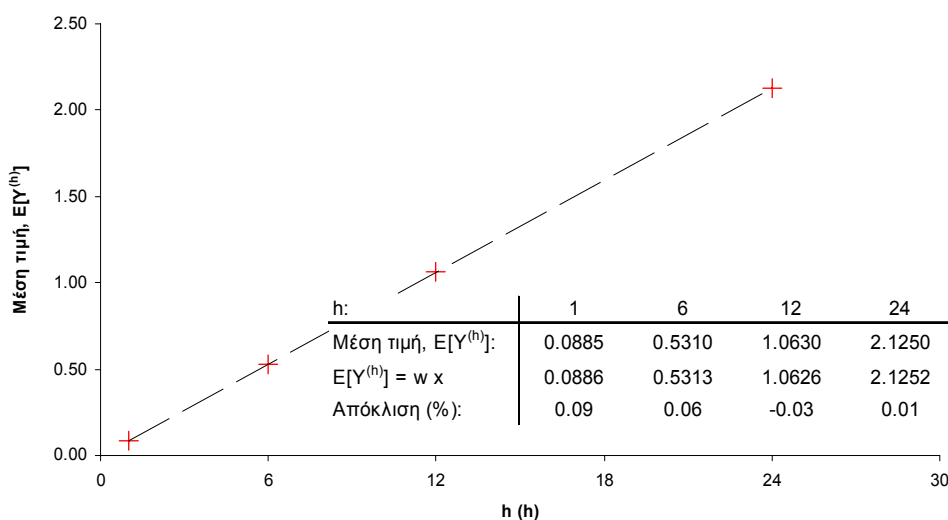
Από την εξίσωση αυτή είναι εμφανής η γραμμική μεταβολή της θεωρητικής μέσης τιμής,  $E[Y_i^{(h)}]$ , σε σχέση με τη στάθμη συνάθροισης,  $h$ . Ως εκ τούτου, προκύπτουν δύο εξίσου ισοδύναμες, με την αρχική, εξισώσεις για τη μέση τιμή:

$$E[Y_i^{(h)}] = wh, \quad w = \lambda \mu_x \left\{ \frac{v}{\alpha - 1} \left( 1 + \frac{\kappa_1}{\phi} \right) + \frac{\kappa_2}{\phi} \right\} \quad 3.2.2$$

Η νέα μεταβλητή,  $w$ , μπορεί να αποτελέσει ένα σταθερό αριθμό, γνωστό εκ των προτέρων, βάσει των γνωστών μέσων τιμών των, υπό εξέταση, ιστορικών χρονοσειρών. Η σχετική απόπειρα επαλήθευσης του παραπάνω θεωρητικού συμπεράσματος, αποδίδει την τιμή,

$$w = 0.08855$$

Η τιμή αυτή υιοθετείται, για την υπό εξέταση χρονοσειρά του Denver και συμπίπτει με την καταγεγραμμένη μέση τιμή της ωριαίας χρονοσειράς ( $h = 1$ ). Το διάγραμμα 3.1 αποδίδει παραστατικά τη σχετική απόπειρα γραμμικής παρεμβολής των μέσων τιμών για τη χρονοσειρά του Denver.



Διάγραμμα 3.1 : Γραμμική προσαρμογή μέσων τιμών (συναθροισμένες χρονοσειρές Denver)

Λαμβάνοντας υπόψιν την τιμή αυτή, στο μαθηματικό μοντέλο προστίθεται μία επιπλέον εξίσωση, 3.2.2, με αποτέλεσμα τη μείωση των μεταβλητών επίλυσης από επτά σε έξι. Ταυτόχρονα, το γεγονός αυτό εγείρει και το ερώτημα της επιλογής της παραμέτρου εκείνης, που θα αντικατασταθεί, μέσω της προηγούμενης εξίσωσης, κατά τη διαδικασία βελτιστοποίησης. Όπως έχει ήδη αναφερθεί οι ανεξάρτητες μεταβλητές επίλυσης του μαθηματικού μοντέλου είναι οι εξής επτά,  $\{\phi, v, \alpha, \lambda, \mu_x, \kappa_1, \kappa_2\}$ , μία εκ των οποίων θα καταστεί πλέον εξαρτημένη.

Στα πλαίσια της λογικής του αλγόριθμου (επιλογής μεταβλητών σχεδιασμού), Lee – Cristensen – Rudd (1966), ως εξαρτημένη μεταβλητή επιλέγεται η μεταβλητή,  $\alpha$ . Το γεγονός αυτό υπαγορεύεται από την συχνή εμφάνιση της παραμέτρου αυτής σε όλες τις εξισώσεις του μοντέλου. Παράλληλα, οι Isham *et al.* (1990), κατόπιν διεξαγωγής σχετικής ανάλυσης ευαισθησίας για το κλασικό τυχαίο μοντέλο BL, επισημαίνουν την ισχυρή εξάρτηση της

αυτοσυσχέτισης  $1^{ns}$  τάξεως και της πιθανότητας απουσίας βροχόπτωσης (PDR) από την τιμή της παραμέτρου,  $\alpha$ . Ειδικά για το συντελεστή αυτοσυσχέτισης  $1^{ns}$  τάξης, η παράμετρος,  $\alpha$ , χαρακτηρίζεται ως «κρίσιμη».

Για τους λόγους αυτούς, στο τελικό μαθηματικό μοντέλο, εισάγεται η εξίσωση:

$$\alpha = 1 + \frac{\lambda_{\mu_x} v (\varphi + \kappa_1)}{\varphi w - \lambda_{\mu_x} \kappa_2} \quad 3.2.3$$

Η εξίσωση 3.2.3, πέραν της μείωσης των μεταβλητών επίλυσης του προβλήματος από επτά σε έξι, έχει και μία επιπλέον σημαντική προσφορά: απαλλάσσει τη διαδικασία βελτιστοποίησης από την εισαγωγή και κατ' επέκταση την ελαχιστοποίηση των αποκλίσεων των μέσων τιμών,  $E[Y_i^{(h)}]$ . Για οποιεσδήποτε τιμές των έξι μεταβλητών επίλυσης, η απόκλιση των υπολογιζομένων μέσων τιμών από τις αντίστοιχες ιστορικές (μετρηθείσες) παραμένει στο ελάχιστο δυνατό επίπεδο, μέσω της διαμόρφωσης της τιμής της, εξαρτημένης πλέον, παραμέτρου,  $\alpha$ .

Η συγκεκριμένη εξάρτηση της παραμέτρου,  $\alpha$ , ουσιαστικά αντιστοιχεί στην εισαγωγή πολύ μεγάλων συντελεστών βάρους, σε σχέση με την ελαχιστοποίηση της απόκλισης των μέσων τιμών των υπό εξέταση συναθροισμένων χρονοσειρών. Το γεγονός αυτό είναι επιθυμητό: οι μέσες τιμές θεωρούνται το σημαντικότερο στατιστικό μέγεθος και συνεπώς η συγκεκριμένη απόπειρα μείωσης των μεταβλητών επίλυσης από επτά σε έξι αποκτά πλέον διττή σημασία.

Επιπλέον, από την εξίσωση 3.2.3, προκύπτει και το ερώτημα της εξαγωγής ενός επιπλέον ανισοτικού περιορισμού, σε σχέση με την παράμετρο,  $\alpha$ . Η παράμετρος αυτή αποτελεί την παράμετρο σχήματος της (δι-παραμετρικής) γάμα κατανομής. Για τιμή  $\alpha = 1$ , η γάμα κατανομή ταυτίζεται με την εκθετική. Για τιμές του,  $\alpha < 1$ , το σχήμα της γάμα κατανομής έχει φθίνουσα μορφή, όπως στην περίπτωση της εκθετικής, και συνεπώς, τίθεται υπό ερώτημα η σκοπιμότητα της αρχικής παραδοχής του μοντέλου.

Συνεπώς, η εισαγωγή του ανισοτικού περιορισμού,  $\varphi w > \lambda_{\mu_x} \kappa_2$ , τεκμηριώνεται επαρκώς. Ωστόσο, κρίθηκε σκόπιμη η μη, εξ αρχής, εισαγωγή του περιορισμού αυτού στο τελικό μαθηματικό μοντέλο. Τα προκαταρκτικά και τελικά αποτελέσματα της βελτιστοποίησης, συνηγορούν για την ορθότητα της παραδοχής,  $\alpha > 1$ .

Η προαναφερόμενη ανάλυση σχετικά με τις μέσες τιμές των υπό εξέταση συναθροισμένων χρονοσειρών, έχει θεωρητικό υπόβαθρο. Η θεωρητική εξίσωση της μέσης τιμής, υποδεικνύει τη γραμμική συσχέτιση μεταξύ των μεγεθών,  $E[Y_i^{(h)}]$  και  $h$ . Το γεγονός αυτό επιβεβαιώνεται πλήρως από τα ιστορικά δεδομένα. Η εξαγωγή της εξίσωσης 3.2.3 ουσιαστικά παραπέμπει στις βασικές αρχές των μεθόδων αποσύνθεσης (decomposition). Οι μέσες τιμές εξετάζονται ως ένα αυτόνομο ομογενές υποσύστημα του γενικού προβλήματος βελτιστοποίησης και επιτρέπουν την εξαγωγή «τοπικών» - επιμέρους συμπερασμάτων, σχετικά με τις μεταβλητές απόφασης (partitioning).

Ίδωμένη από μία πιο γενική άποψη, η γραμμική θετική συσχέτιση των μεγεθών,  $E[Y_i^{(h)}]$  και  $h$ , οδηγεί σε μία γενικότερη διαπίστωση: απαιτούνται μόνο δύο τιμές του μεγέθους,  $E[Y_i^{(h)}]$ , σε δύο, δηλαδή, διαφορετικές κλίμακες συνάθροισης, για την ικανοποιητική προσαρμογή του συνόλου των τεσσάρων υπό εξέταση τιμών. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, όπου η γενική γραμμική εξίσωση,  $y = a x + c$  εκπίπτει στην μονο-παραμετρική  $y = w x$ , η μέγιστη δυνατή προσέγγιση μίας μόνο μέσης τιμής αυτομάτως οδηγεί και στη μέγιστη δυνατή προσέγγιση των υπολοίπων. Αυτό είναι και το πλαίσιο της πρακτικής, που έχει μέχρι τώρα ακολουθηθεί στην περίπτωση του κλασικού τυχαίου μοντέλου BL [Rodríguez – Iturbe *et al.* (1988), Isham *et al.*, (1990), Velghe *et al.* (1994)]. Υπενθυμίζεται ότι, το νέο τροποποιημένο μοντέλο BL, εκπίπτει στο κλασικό τυχαίο μοντέλο για τιμή της παραμέτρου  $\kappa_2 = 0$ .

Αντί της συνήθους πρακτικής, προσέγγισης μίας μόνο μέσης τιμής με παράλληλη εξέταση όλων των παραμέτρων του μαθηματικού μοντέλου ως μεταβλητών επίλυσης, προτιμάται η μείωση των διαστάσεων του προβλήματος. Στην περίπτωση αυτή δεν εξετάζεται καμία μέση τιμή, για

οποιαδήποτε, από τις υπό εξέταση, στάθμη συνάθροισης. Εφόσον ο αριθμός των ταυτοχρόνως επιλυομένων εξισώσεων υψωμένος στην 3<sup>η</sup> δύναμη (Μαρίνος – Κουρής και Μαρούλης, 1993, σελ. 128) αποτελεί ένα γενικά αποδεκτό μέτρο της δυσκολίας επίλυσης ενός συστήματος, η μείωση των μεταβλητών επίλυσης από εφτά σε έξι ισοδυναμεί με παράλληλη μείωση του βαθμού δυσκολίας επίλυσης από 343 σε 216.

Το γεγονός αυτό ενισχύει την αξιοπιστία των αποτελεσμάτων της διαδικασίας βελτιστοποίησης και είναι συνακόλουθο της σημασίας της παραμέτρου,  $\alpha$ , έτσι όπως αυτή έχει προσδιοριστεί από τη σχετική ανάλυση ευαισθησίας (Isham *et al.*, 1990) για το κλασικό τυχαίο μοντέλο BL.

### 3.3 Εφαρμογή δι-παραμετρικών εξισώσεων προσαρμογής στα βασικά στατιστικά μεγέθη της ιστορικής χρονοσειράς

Η προαναφερόμενη ανάλυση σχετικά με το υποσύνολο των μέσων τιμών δε μπορεί να επαναληφθεί στην περίπτωση των υπόλοιπων στατιστικών μεγεθών. Οι θεωρητικές εξισώσεις του μοντέλου, δεν επιτρέπουν την εξαγωγή κάποιων ισοτήτων (ή έστω ανισοτήτων), με στόχο τη διερεύνηση της ύπαρξης επιπλέον εξαρτήσεων μεταξύ των μεταβλητών επίλυσης. Ως εκ τούτου, οι διαστάσεις του προβλήματος για το νέο, τροποποιημένο τυχαίο μοντέλο BL παραμένουν οριστικά ίσες με έξι ( $\varphi, \nu, \lambda, \mu_x, \kappa_1, \kappa_2$ ).

Ο αριθμός των ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών επίλυσης,  $m$ , οριοθετεί αυτομάτως και τον ελάχιστο απαιτούμενο αριθμό ανεξάρτητων θεωρητικών εξισώσεων, οι οποίες απαιτούνται για την επίλυση του μη γραμμικού συστήματος, ( $m \times m$ ). Αυτή είναι και η συνήθης πρακτική προσδιορισμού των τιμών των παραμέτρων των προβλημάτων, που αφορούν στα σημειακά μοντέλα και ιδιαίτερα στα μοντέλα Bartlett – Lewis [Rodriguez – Iturbe *et al.* (1988), Isham *et al.*, (1990), Velghe *et al.* (1994)]. Η λογική αυτή παραπέμπει στην προσπάθεια (ακριβούς) επίλυσης του μη γραμμικού συστήματος, ( $m \times m$ ).

Ωστόσο, διαφορετικές ομάδες,  $m$ , θεωρητικών εξισώσεων οδηγούν σε διαφορετικές λύσεις. Επιπλέον, δεν είναι εξασφαλισμένη η εξεύρεση λύσης για κάθε τυχαία επιλεγόμενη ομάδα,  $m$  θεωρητικών εξισώσεων. Σε αυτή την περίπτωση τίθεται το ερώτημα του τρόπου επιλογής των,  $m$ , στατιστικών μεγεθών, των οποίων οι θεωρητικές εξισώσεις θα αποτελέσουν το υπό επίλυση μη γραμμικό σύστημα. Το ερώτημα αυτό δεν έχει απαντηθεί με σαφήνεια. Στις μέχρι σήμερα σχετικές δημοσιεύσεις, δεν έχει προταθεί ένα κριτήριο επιλογής και οι περισσότεροι αναλυτές εξετάζουν διαφορετικές ομάδες στατιστικών μεγεθών χωρίς κάποια επαρκή αιτιολόγηση.

Παράλληλα, κάθε λύση δε μπορεί παρά να αξιολογείται βάσει των αποκλίσεων του συνόλου των υπό εξέταση στατιστικών μεγεθών για όλες τις υπό εξέταση στάθμες συνάθροισης. Μία τέτοια αξιολόγηση είναι άλλωστε συνακόλουθη με αυτή καθ' αυτή τη σκοπιμότητα εξέτασης των σημειακών μοντέλων: επιζητείται η εξεύρεση μίας ενιαίας ομάδας παραμέτρων, που να ικανοποιούν το σύνολο των υπό εξέταση στατιστικών μεγεθών, για διαφορετικές στάθμες συνάθροισης. Η αναζήτηση μίας ακριβούς επίλυσης περιορίζει το γενικότερο πρόβλημα της βελτιστοποίησης, έτσι όπως αυτό ορίζεται από την ελαχιστοποίηση του συνόλου των αποκλίσεων όλων των στατιστικών μεγεθών, σε ένα μικρό υποσύνολο λύσεων. Εν ολίγοις, η επίλυση του συστήματος, ( $m \times m$ ), οδηγεί στη διατύπωση μίας (μερικής) αντικειμενικής συνάρτησης, η οποία δεν αποτελεί και το τελικό κριτήριο αξιολόγησης της διαδικασίας βελτιστοποίησης.

Η εμμονή των Rodriguez – Iturbe *et al.* (1988), Isham *et al.* (1990) και Velghe *et al.* (1994) ως προς την αναζήτηση μίας ακριβούς λύσης, λαμβάνοντας δηλαδή υπόψιν τον ελάχιστο απαιτούμενο αριθμό θεωρητικών εξισώσεων, μπορεί να αιτιολογηθεί από τη δυσκολία του προβλήματος βελτιστοποίησης και την επιλογή του χρησιμοποιούμενου αλγόριθμου (Powell). Η πολυπλοκότητα των θεωρητικών εξισώσεων και η ύπαρξη πολλών τοπικών ελαχίστων οδηγεί προς την κατεύθυνση απλοποίησης της διαδικασίας ελαχιστοποίησης των αποκλίσεων. Κατ' ουσία, το γενικό πρόβλημα προσαρμογής αποσυντίθεται (partitioning) σε μικρότερα υπο-προβλήματα (sets), οι λύσεις των οποίων συγκρίνονται εκ των υστέρων με απώτερο στόχο την αναζήτηση μίας συνολικά (για το σύνολο των στατιστικών μεγεθών) βέλτιστης λύσης (αυτή η σκοπιμότητα αποσαφηνίζεται κυρίως στην εργασία των Velghe *et al.*, 1994).

Η τακτική αυτή είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με τον επιλεγόμενο αλγόριθμο βελτιστοποίησης και μπορεί να αναθεωρηθεί. Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιείται μία πρωτότυπη μέθοδος βελτιστοποίησης, η οποία βασίζεται στα στατιστικά χαρακτηριστικά αποδεκτών τιμών της αντικειμενικής συνάρτησης. Η απουσία υπολογισμού παραγώγων (direct – search methods) επιτρέπει την εισαγωγή όλων των στατιστικών μεγεθών, για όλες τις στάθμες συνάθροισης, στην αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος βελτιστοποίησης. Συνεπώς, δεν υφίσταται θέμα επιλογής των κατάλληλων, ελάχιστων απαιτούμενων, για την επίλυση, στατιστικών μεγεθών ή ακόμα χειρότερα, η απόπειρα ελαχιστοποίησης των αποκλίσεων πολλών διαφορετικών ομάδων στατιστικών μεγεθών.



Παρ' όλα αυτά, επιχειρείται η διατύπωση ενός κριτηρίου επιλογής των κατάλληλων, ελάχιστων απαιτούμενων, στατιστικών μεγεθών για δύο κυρίως λόγους:

1. για την περίπτωση χρησιμοποίησης ενός (συμβατικού) αλγόριθμου βελτιστοποίησης
2. και γιατί, δεδομένης μιας ιστορικής χρονοσειράς, η διαδικασία αυτή, οδηγεί στη διατύπωση ενός κριτηρίου αξιολόγησης του τυχαίου και του τροποποιημένου τυχαίου μοντέλου BL. Στα πλαίσια εφαρμογής του κριτηρίου αυτού, καθίσταται εφικτή η, εκ των προτέρων, εκτίμηση της επιτυχίας ή αποτυχίας του μοντέλου, ως προς την προσομοίωση των βασικών στατιστικών μεγεθών μίας δεδομένης ιστορικής χρονοσειράς.

Στις επόμενες παραγράφους επιχειρείται:

1. Η διατύπωση κριτηρίων επιλογής των ελάχιστων απαιτούμενων, για το γενικό πρόβλημα βελτιστοποίησης,  $m$ , στατιστικών μεγεθών.
2. Η διατύπωση ενός κριτηρίου, ποιοτικής αξιολόγησης του τελικού βαθμού προσομοίωσης των στατιστικών μεγεθών, του τυχαίου και του τροποποιημένου τυχαίου μοντέλου BL, πριν τη διεξαγωγή της διαδικασίας βελτιστοποίησης.

### 3.3.1 Κριτήριο επιλογής των ελάχιστων απαιτούμενων στατιστικών μεγεθών

Οι έξι ανεξάρτητες μεταβλητές επίλυσης του τροποποιημένου τυχαίου μοντέλου BL ( $\varphi$ ,  $\nu$ ,  $\lambda$ ,  $\mu_x$ ,  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$ ) απαιτούν την επιλογή τουλάχιστον έξι θεωρητικών εξισώσεων – στατιστικών μεγεθών, για διαφορετικές κλίμακες συνάθροισης,  $h$ . Τα στατιστικά μεγέθη, που εξετάζονται σε διαφορετικές κλίμακες συνάθροισης είναι η διασπορά, η αυτοσυνδιασπορά 1<sup>ης</sup> τάξεως και η πιθανότητα απουσίας βροχόπτωσης (PDR). Η επιλογή έξι εξ αυτών οδηγεί στη διατύπωση του τελικού, προς επίλυση μη γραμμικού συστήματος  $6 \times 6$ . Η εξαίρεση του στατιστικού μεγέθους της μέσης τιμής έχει αιτιολογηθεί σε προηγούμενη παράγραφο.

Για την ανάλυση, που ακολουθεί, λαμβάνονται υπόψιν τα στατιστικά δεδομένα της ιστορικής χρονοσειράς, στην οποία βασίστηκαν οι Rodriguez – Iturbe *et al.* (1988), για την εξαγωγή των πρώτων δημοσιευμένων αποτελεσμάτων, σχετικά με το τυχαίο μοντέλο BL. Η ωριαία αυτή χρονοσειρά έχει προέλθει από το βροχογραφικό σταθμό του αεροδρομίου του Denver (Denver Airport Station, 15/05 – 16/06, 1949-1976) και οι υπό εξέταση στάθμες συνάθροισης αντιστοιχούν σε 6, 12 και 24 h.

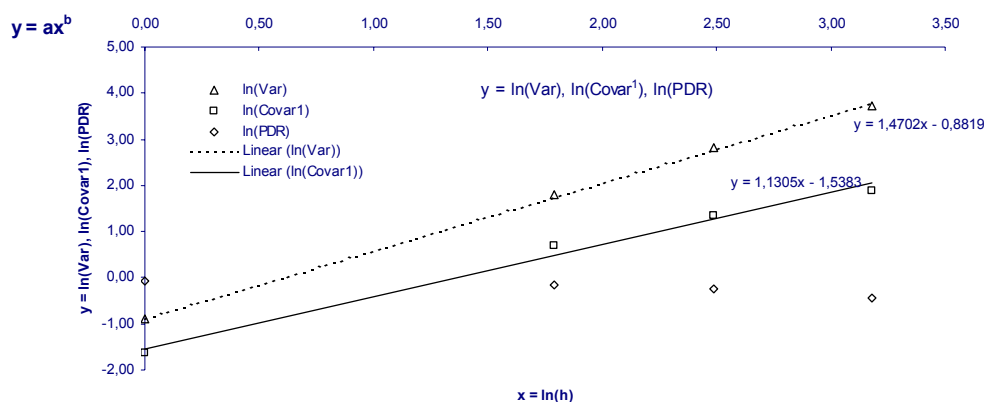
Κάθε υποσύνολο στατιστικών ιστορικών δεδομένων, για τις υπό εξέταση συναθροισμένες χρονοσειρές, δηλαδή οι τιμές της διασποράς, αυτοσυνδιασποράς (1<sup>ης</sup> τάξεως) και πιθανότητας απουσίας βροχόπτωσης (PDR), για τις τέσσερις υπό εξέταση κλίμακες συνάθροισης ( $h = 1, 6, 12, 24$  h) ενδέχεται να εμπεριέχει πληροφορίες κατάλληλες για την ασφαλή επιλογή των έξι εξισώσεων του μαθηματικού μοντέλου βελτιστοποίησης. Οι γνωστές τιμές των παραπάνω στατιστικών μεγεθών δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

h	Var[ $Y_i$ ]	PDR	Covar <sup>(1)</sup>
1	0.403	0.939	0.193
6	5.970	0.856	1.982
12	16.883	0.780	3.883
24	41.606	0.642	6.532

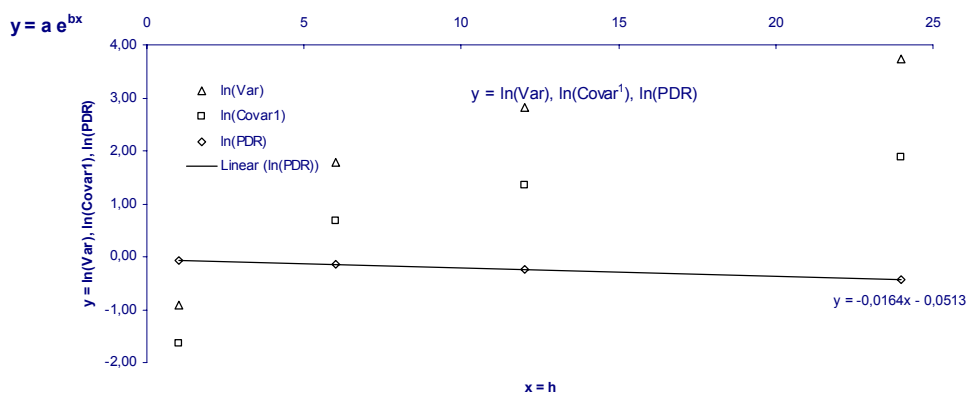
Για κάθε υποσύνολο των παραπάνω τιμών, εξετάζεται η προσαρμογή μίας εκ των παρακάτω δι – παραμετρικών εξισώσεων:

- 1 Γραμμική:  $y = ax + b \Rightarrow y = ax + b$
- 2 Εκθετική:  $y = a e^{bx} \Rightarrow \ln y = a + bx$
- 3 Δύναμη:  $y = a x^b \Rightarrow \ln y = a + b \ln x$
- 4 Λογαριθμική:  $y = a \ln x + b \Rightarrow y = a \ln x + b$

Για την περίπτωση των PDR η εκθετική συνάρτηση προσαρμογής αποδίδει τα καλύτερα αποτελέσματα. Το γεγονός αυτό είναι αναμενόμενο, δεδομένου και του χαρακτήρα της αντίστοιχης θεωρητικής εξίσωσης του μοντέλου. Παρομοίως, η συνάρτηση,  $y = a x^b$ , αποδίδει τα καλύτερα αποτελέσματα όσον αφορά στα στατιστικά μεγέθη Var και Covar<sup>(1)</sup>. Το αποτέλεσμα αυτό είναι επίσης συμβατό με το χαρακτήρα των αντίστοιχων θεωρητικών εξισώσεων.



Διάγραμμα 3.3.1.α : Η προσαρμογή  $y = a x^b$  στις τιμές της διασποράς και της αυτοσυνδιασποράς<sup>(1)</sup>



Διάγραμμα 3.3.1.β : Η προσαρμογή  $y = a e^{bx}$  στις τιμές του μεγέθους PDR

Από τα σχετικά διαγράμματα, μπορούν να εξαχθούν τα εξής συμπεράσματα: δεδομένης της αναγκαιότητας επιλογής έξι στατιστικών μεγεθών για την ταυτόχρονη επίλυση έξι θεωρητικών εξισώσεων, θεωρείται λογική (επιβεβλημένη) η επιλογή δύο τιμών από κάθε στατιστικό μέγεθος. Συνεπώς, δύο τιμές για τη διασπορά, δύο για τη αυτοσυνδιασπορά 1ης τάξεως και δύο για το μέγεθος PDR θα εισαχθούν στις αντίστοιχες θεωρητικές εξισώσεις του μοντέλου και θα αποτελέσουν το τελικό μαθηματικό σύστημα επίλυσης. Κάθε ζεύγος τιμών επιφορτίζεται με τη δυνατότητα προσαρμογής των υπολοίπων ομοειδών τους. Για την επιλογή του κατάλληλου ζεύγους εξετάζονται οι προαναφερόμενες, κατάλληλες δι-παραμετρικές εξισώσεις προσαρμογής. Βάσει αυτών, επιλέγονται οι δύο τιμές, που,

1. εμφανίζουν τη μεγαλύτερη εγγύτητα ως προς τη γραμμή προσαρμογής
2. βρίσκονται εκατέρωθεν της γραμμής προσαρμογής

Η τελική υπόθεση διαμορφώνεται ως εξής: δεδομένης της αναγκαιότητας προσαρμογής κάθε στατιστικού μεγέθους βάσει δύο μόνο ιστορικών τιμών, επιλέγονται οι δύο εκείνες τιμές, που παρουσιάζουν τη μεγαλύτερη εγγύτητα ως προς την κατάλληλη δι-παραμετρική εξίσωση προσαρμογής. Αν για τις δύο αυτές τιμές, μία μειωμένης αποτελεσματικότητας δι-παραμετρική εξίσωση προσαρμογής αποδίδει ικανοποιητικά, τότε αναμένονται μεγαλύτεροι βαθμοί προσέγγισης όλων των συμμετεχουσών πειραματικών τιμών από τις αντίστοιχες θεωρητικές,

πολυ-παραμετρικές εξισώσεις του συστήματος επίλυσης. Εν ολίγοις, οποιαδήποτε άλλη προσέγγιση των πειραματικών δεδομένων θα αποδώσει καλύτερα.

Στο πλαίσιο της ανάλυσης αυτής και αναφορικά με την ιστορική χρονοσειρά του Denver, θεωρείται σκόπιμη η επιλογή των παρακάτω στατιστικών μεγεθών:

	$h = 1$	$h = 6$	$h = 12$	$h = 24$
$\text{Var}^{(h)}$		✓		✓
$\text{Covar}_1^{(h)}$		✓		✓
PDR	✓	✓		

Πίνακας 3.3.1.α : Επιλογή στατιστικών μεγεθών για τη χρονοσειρά του Denver

Η επιλογή αυτή των στατιστικών μεγεθών επιβεβαιώνεται από τους Velghe *et al.* (1994), οι οποίοι και καταλήγουν στην ίδια ομάδα στατιστικών μεγεθών, ως την πιο αποτελεσματική ως προς την προσομοίωση όλων των στατιστικών ιστορικών δεδομένων σε όλες τις υπό εξέταση (τέσσερις) στάθμες συνάθροισης.

### 3.3.2 Ένα, εκ των προτέρων, κριτήριο αξιολόγησης της μεθόδου προσομοίωσης

Οι δι-παραμετρικές εξισώσεις προσαρμογής, που χρησιμοποιήθηκαν στην περίπτωση της διασποράς, αυτοσυνδιασποράς και PDR αντιστοιχούν σε μία συγκεκριμένη και μετρήσιμη ποιότητα προσαρμογής των στατιστικών αυτών μεγεθών. Η ποιότητα αυτή προσαρμογής δείχνει να συμβαδίζει με την ποιότητα προσομοίωσης του τυχαίου μοντέλου Bartlett – Lewis. Σε κάθε περίπτωση, η ποιότητα της προσέγγισης των στατιστικών μεγεθών ποσοτικοποιείται μέσω της μέσης τιμής των απόλυτων εκατοστιαίων αποκλίσεών τους.

Κατά αυτό τον τρόπο, από κάθε ιστορική χρονοσειρά εξάγεται μία μέση τιμή αποκλίσεων, για τις δι-παραμετρικές εξισώσεις προσαρμογής και μία μέση τιμή αποκλίσεων από την τελική επίλυση του προβλήματος βελτιστοποίησης. Παρατηρείται μία τάση αυξομείωσης των δύο αθροισμάτων, γεγονός, που υποδεικνύει την ποιοτική τους ταύτιση. Σε αυτή την περίπτωση, η προσαρμογή των δι-παραμετρικών εξισώσεων μπορεί να αποτελέσει ένα ποιοτικό κριτήριο αξιολόγησης για την επιτυχία της προσομοίωσης μέσω του τυχαίου και του τροποποιημένου τυχαίου μοντέλου BL.

Για την ανάλυση, που ακολουθεί, χρησιμοποιούνται γνωστές βελτιστοποιημένες λύσεις για το τυχαίο μοντέλο BL, όπως αυτές έχουν προκύψει από τις μέχρι σήμερα δημοσιεύσεις. Σε όλες τις χρονοσειρές ελήφθησαν υπόψιν οι στάθμες,  $h = 1, 6, 12, 24$  h (στην περίπτωση του Camaldoli εξαιρέθηκε η στάθμη συνάθροισης  $h = 48$  h). Η τακτική αυτή κρίνεται σκόπιμη, δεδομένου του ότι για στάθμες συνάθροισης μεγαλύτερες των 24 h, ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης λαμβάνει φθίνουσες τιμές (η εξίσωση της αυτοσυσχέτισης 1<sup>ης</sup> τάξης δεν είναι μονότονη).

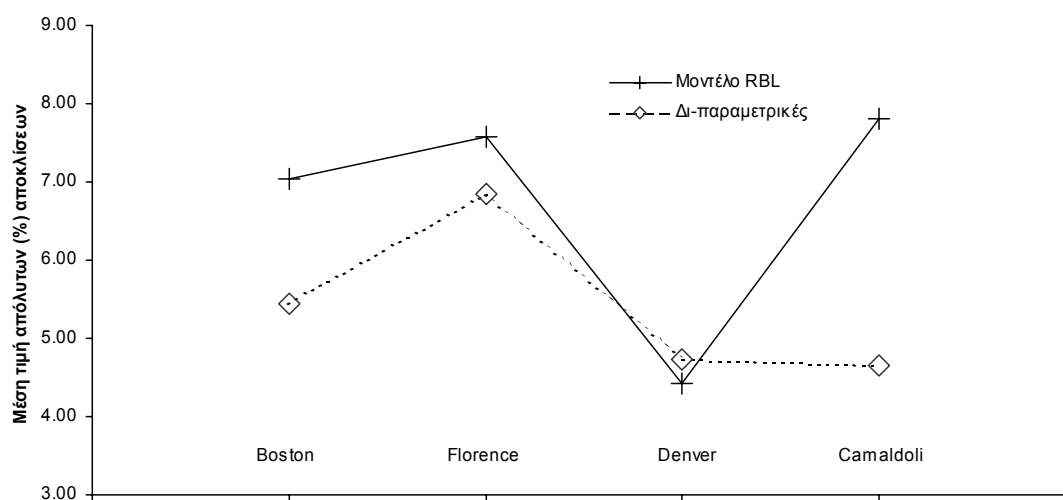
Πιο συγκεκριμένα, εξετάζονται τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης, όσον αφορά στις παρακάτω ιστορικές χρονοσειρές:

Ιστορική χρονοσειρά	Δημοσίευση	Στάθμες συνάθροισης
Βοστώνη, 01-31 Ιούλιος, 1951-1978	Rodriguez <i>et al.</i> (1988)	$h = 1, 6, 12, 24$ (h)
Καμαλινόλι, 01-31 Ιουλίου, 1962-1985	Isham <i>et al.</i> (1990)	$h = 1, 6, 12, 24, 48$ (h) *
Φλωρεντία, 01-30 Νοέμβριος, 1962-1985	Isham <i>et al.</i> (1990)	$h = 1, 6, 12, 24, 48$ (h)
Ντένβερ, 15/05 - 16/06, 1947-1974	Rodriguez <i>et al.</i> (1988)	$h = 1, 6, 12, 24$ (h)

Πίνακας 3.3.2.α : Δημοσιευμένες ιστορικές χρονοσειρές για το τυχαίο μοντέλο BL

Οι χρονικές κλίμακες, που ελήφθησαν υπόψιν, αντιστοιχούν σε  $h = 1, 6, 12, 24$  h (Denver, Boston) και  $h = 1, 6, 12, 24, 48$  h (Camaldoli, Florence), και τα αντίστοιχα, ανά κλίμακα, στατιστικά μεγέθη είναι η μέση τιμή, η διασπορά, η αυτοσυνδιασπορά 1<sup>ης</sup> τάξης και η πιθανότητα απουσίας βροχόπτωσης (PDR). Όπως φαίνεται παραστατικά και στο παρακάτω διάγραμμα, η εξέταση των δι-παραμετρικών εξισώσεων αποτελεί μία σχετικά αξιόπιστη ένδειξη της δυνατότητας του τυχαίου (και κατ' επέκταση του τροποποιημένου τυχαίου) μοντέλου BL να προσεγγίσει τα υπό εξέταση στατιστικά μεγέθη, για όλες τις υπό εξέταση κλίμακες συνάθροισης.

	Μέση τιμή απόλυτων εκατοστιαίων αποκλίσεων τυχαίου μοντέλου BL	Μέση τιμή απόλυτων εκατοστιαίων αποκλίσεων δι-παραμετρικών εξισώσεων	%
Βοστώνη, 01-31 Ιούλιος, 1951-1978	7.04	5.44	-22.7
Φλωρεντία, 01-30 Νοέμβριος, 1962-1985	7.57	6.85	-9.5
Ντένβερ, 15/05 - 16/06, 1947-1974	4.421	4.73	7.0
Καμαλντόλι, 01-31 Ιουλίου, 1962-1985	7.81	4.66	-40.3



Διάγραμμα 3.3.2.α : Συγκριτικά αποτελέσματα τυχαίου μοντέλου BL – δι-παραμετρικών εξισώσεων

\* Στην περίπτωση του Camaldoli, και όσον αφορά στην περίπτωση των δι-παραμετρικών εξισώσεων, εξαιρέθηκε η στάθμη συνάθροισης,  $h = 48$  h. Για αυτό το λόγο και στο διάγραμμα παρατηρείται μεγαλύτερη απόκλιση, από ότι για τις υπόλοιπες χρονοσειρές..

Σε κάθε περίπτωση, η εξέταση των δι-παραμετρικών εξισώσεων απέδωσε ένα ανώτερο ποιοτικό όριο απόδοσης, κάτω από το οποίο βρίσκονται όλες οι βελτιστοποιημένες λύσεις (με εξαίρεση την ιδιαίζουσα περίπτωση του Denver). Συνεπώς, υπάρχουν σοβαρές ενδείξεις για το ότι η εξέταση της επιτυχίας προσαρμογής των δι-παραμετρικών εξισώσεων μπορεί να αποτελέσει κριτήριο αξιολόγησης της απόδοσης του τυχαίου και του νέου, τροποποιημένου τυχαίου μοντέλου BL.

Το γεγονός αυτό έχει και θεωρητική τεκμηρίωση. Στην περίπτωση των δι-παραμετρικών εξισώσεων, απλές εξισώσεις προσαρμογής εξετάζονται για κάθε ομοειδές στατιστικό μέγεθος, σε όλες τις υπό εξέταση κλίμακες συνάθροισης. Συνεπώς, το σύνολο των προσαρμογών παράγει έξι (ανεξάρτητες ανά δύο) παραμέτρους προσαρμογής. Στην περίπτωση του θεωρητικού μοντέλου, μία ενιαία ομάδα έξι παραμέτρων αναλαμβάνει την προσαρμογή όλων των (μη – ομοειδών) στατιστικών μεγεθών. Θα ήταν δίκαιος ο ισχυρισμός, που αποδίδει υπεροχή στην ανεξάρτητη προσαρμογή των στατιστικών μεγεθών, που επιτυγχάνεται μέσω των (μειωμένης «ποιότητας») δι-παραμετρικών εξισώσεων.

Οι Isham *et al.* (1990, σελ. 2099), κατόπιν μίας σχετικής ανάλυσης ευαισθησίας, που διεξήγαγαν για τις παραμέτρους του τυχαίου μοντέλου BL, επισημαίνουν την ισχυρή εξάρτηση του μεγέθους της αυτοσυσχέτισης 1<sup>ης</sup> τάξης με τις παραμέτρους,  $\alpha$  και  $\nu$  (δηλαδή

με τις δύο παραμέτρους της γάμα κατανομής). Επιπλέον, επισημαίνεται η ισχυρή εξάρτηση του μεγέθους PDR από την παράμετρο,  $\lambda$  και η πιο ασθενής εξάρτησή του από τις παραμέτρους,  $\alpha$  και  $\nu$ .

Και τα δύο αυτά συμπεράσματα, ενισχύουν τη χρήση των απλών δι-παραμετρικών εξισώσεων, ως ενός, εκ των προτέρων, κριτηρίου αξιολόγησης της επιτυχίας εφαρμογής του τυχαίου και του τροποποιημένου τυχαίου μοντέλου BL. Η τακτική αυτή θα ακολουθηθεί και στην περίπτωση της Αθήνας (σταθμός Ε.Μ.Π.), όπου θα τεθεί το ερώτημα επιλογής συγκεκριμένης υδρολογικής περιόδου, με απώτερο στόχο την εξαγωγή της τελικά χρησιμοποιούμενης ιστορικής χρονοσειράς.

### 3.4 Εκτίμηση της τιμής της παραμέτρου, $\lambda$ .

Η επιλογή των σταθμών συνάθροισης, 1 και 6 h, για τα μεγέθη PDR οφείλεται και σε ένα επιπρόσθετο λόγο. Η θεωρητική συνάρτηση, PDR, μπορεί να προσεγγιστεί με την ακόλουθη μορφή:

$$\ln(\text{PDR}) = -\lambda h + c_1 + \Omega(h) \quad 3.4.1$$

Έστω ότι,  $\Omega(h) = a_0 h^3 + a_1 h^2 + a_2 h + a_3$ , οπότε προκύπτει η εξής σχέση:

$$\ln(\text{PDR}) = a_0 h^3 + a_1 h^2 + (-\lambda + a_2) h + (a_3 + c_1) \quad 3.4.2$$

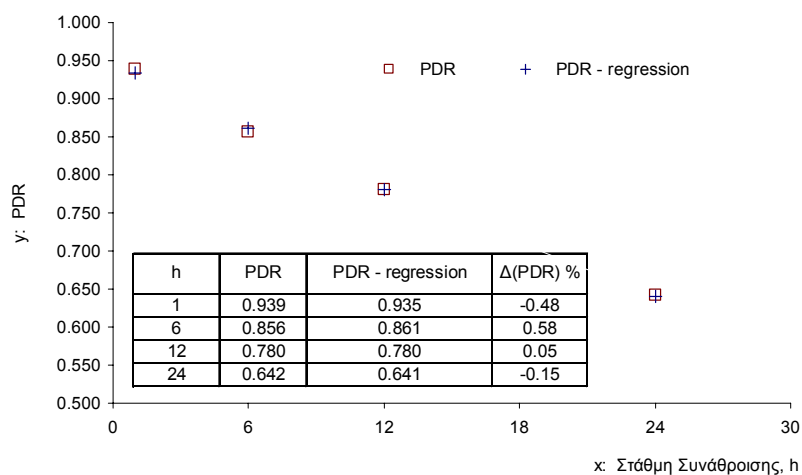
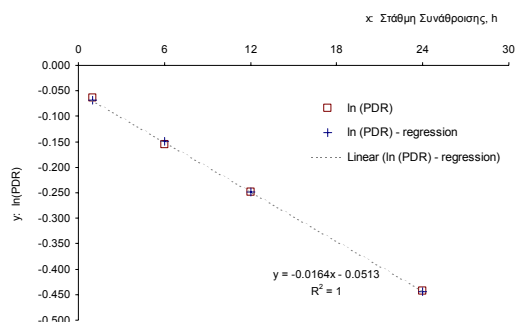
Η χρήση της πολυωνυμικής εξίσωσης 3.4.2 ως εξίσωσης προσαρμογής των μεγεθών PDR απέδωσε τις τιμές:

$$\begin{aligned} a_0 &= -10^{-5} \\ a_1 &= 5 \cdot 10^{-4} \\ -\lambda + a_2 &= -0.0217 \\ a_3 + c_1 &= -0.0418 \end{aligned}$$

Για τις στάθμες συνάθροισης,  $h = 1$  και 6 h, αποδεικνύεται ότι το γραμμικό τμήμα της παραπάνω εξίσωσης,  $(-\lambda + a_2) h + (a_3 + c_1)$ , ευθύνεται για το 99.2 και 89.9% αντίστοιχα του συνολικού βαθμού προσαρμογής. Συνεπώς, για αυτές τις στάθμες συνάθροισης, θα μπορούσε να υποτεθεί η παραδοχή της γραμμικής συσχέτισης μεταξύ των μεγεθών,  $\ln(\text{PDR})$  και  $h$ .

$$\ln(\text{PDR}) = (-\lambda + a_2) h + (a_3 + c_1), \quad -\lambda + a_2 = -0.0164 \quad 3.4.3$$

Τα διαγράμματα 3.4.α & β ισχύουν για την προαναφερόμενη γραμμική εξίσωση.



Διαγράμματα 3.4.α & β : Προσαρμογή εκθετικής διπαμετρικής εξίσωσης στις τιμές PDR (Denver)

Η προσπάθεια αυτή παρέχει μία ένδειξη για το εύρος τιμών της παραμέτρου,  $\lambda$ . Ως αρχικό σημείο εκκίνησης του αλγόριθμου βελτιστοποίησης, λαμβάνεται η τιμή  $\lambda = 0.0164$ . Γύρω από αυτή την

τιμή αναμένονται οι πιθανές βέλτιστες λύσεις του προβλήματος. Το γεγονός αυτό επιβεβαιώνεται πλήρως από τις σχετικές δημοσιεύσεις, σχετικά με το (κλασικό) τυχαίο μοντέλο BL και την υπό εξέταση χρονοσειρά του Denver.

Οι Rodriguez – Iturbe *et al.* (1988, σελ. 288) αναφέρουν τιμή για το,  $\lambda$ , ίση με 0.0158 και 0.0147. Οι Velghe *et al.* (1994, σελ. 2848, 2850) αναφέρουν τις παρακάτω βέλτιστες τιμές των παραμέτρων του μοντέλου, για πέντε διαφορετικές ομάδες στατιστικών μεγεθών.

	$\lambda$ ( $h^{-1}$ )	$\kappa$	$\varphi$	$\mu_x$ (mm/h)	$\alpha$	$\nu$	$Z_{min}$	Στατιστικά μεγέθη, που συμμετείχαν στην ελαχιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης, Z
set 1:	0.0164	0.3680	0.0747	3.6809	2.7448	0.4302	3.00E-05	$E^{1h}, Var^{1h}, Covar^{1h \& 24h}, PDR^{1h \& 24h}$
set 2:	0.0168	0.4141	0.0511	4.3163	2.3616	0.1825	1.00E-04	$E^{1h}, Var^{1h \& 24h}, Covar^{1h}, PDR^{1h \& 24h}$
set 3:	0.0147	0.5144	0.0670	3.6399	2.9050	0.3667	3.00E-04	$E^{6h}, Var^{6h \& 24h}, Covar^{6h \& 24h}, PDR^{6h}$
set 4:	0.0115	0.5347	0.0503	3.8661	3.5255	0.4321	3.00E-03	$E^{1h}, Var^{1h \& 24h}, Covar^{1h \& 24h}, PDR^{12h}$
set 5:	0.0127	0.5379	0.0538	3.9056	3.1790	0.3535	5.00E-04	$E^{1h}, Var^{1h \& 24h}, Covar^{1h \& 12h \& 24h}$

Πίνακας 3.4.α : Βέλτιστες τιμές παραμέτρων μοντέλου RBL (Velghe *et al.*, 1994)

Τα αποτελέσματα αυτά αφορούν το κλασικό τυχαίο μοντέλο BL και την ίδια ιστορική χρονοσειρά του Denver (Denver Airport Station, 15/05 – 16/06, 1949-1976). Υπενθυμίζεται η ταύτιση του τυχαίου μοντέλου BL με το νέο τροποποιημένο μοντέλο, για τιμή της παραμέτρου,  $\kappa_2 = 0$  (οπότε,  $\kappa_l = \kappa$ ).

Από τον πίνακα αυτό, είναι εμφανής η υπεροχή της πρώτης ομάδας λύσεων, για τιμή του  $\lambda = 0.0164$  ( $Z_{min} = 3.0E-05$ ). Από την ίδια δημοσίευση προκύπτει και η υπεροχή της λύσης αυτής σε σχέση με τις αποκλίσεις των μέσων τιμών και των PDR, οι οποίες και πρακτικά μηδενίζονται. Η τιμή αυτή ταυτίζεται με την τιμή, που προέκυψε ως εκτίμηση από την εκθετική συνάρτηση προσαρμογής.

Πρόσθετα αποτελέσματα, για άλλες ιστορικές χρονοσειρές και όσον αφορά στο κλασικό τυχαίο μοντέλο BL δίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Ωριαία ιστορική χρονοσειρά	Δημοσίευση	Τιμές παραμέτρου, $\lambda$	
		Δημοσιευμένο αποτέλεσμα βελτιστοποίησης	Εκτίμηση εκθετικής συνάρτησης προσαρμογής
Βοστώνη, 01-31 Ιουλίου, 1951-1978	Rodriguez - Iturbe <i>et al.</i> (1988)	0.0135	0.0125
Καμαλινόλι, 01-31 Ιουλίου, 1962-1985	Isham <i>et al.</i> (1990)	0.0103	0.0103
Φλωρεντία, 01-30 Νοεμβρίου, 1962-1985	Isham <i>et al.</i> (1990)	0.0173	0.0171

Πίνακας 3.4.β : Ακριβείς και προσεγγιστικές τιμές παραμέτρου,  $\lambda$ , για τρεις ιστορικές χρονοσειρές

Σε όλες τις περιπτώσεις, η τιμή της παραμέτρου,  $\lambda$ , που προέκυψε από τη διαδικασία βελτιστοποίησης ταυτίζεται ή προσεγγίζει την τιμή, που προκύπτει ως εκτίμηση από την εκθετική συνάρτηση προσαρμογής. Επιπρόσθετα, οι Isham *et al.*, (1990, σελ. 2099), κατόπιν σχετικής ανάλυσης ευαισθησίας, επισημαίνουν την πολύ ισχυρή εξάρτηση των στατιστικών μεγεθών PDR σε σχέση με την παράμετρο,  $\lambda$ .

Τα προαναφερόμενα στοιχεία επιβεβαιώνουν την ισχύ της προσεγγιστικής συσχέτισης,

$$\ln(\text{PDR}) = -\lambda h + c \quad 3.4.4$$

Από την εξίσωση αυτή προκύπτει ένα αξιόπιστο (σχεδόν ταυτόσημο με τη βέλτιστη τιμή), αρχικό σημείο εκκίνησης, της τιμής της παραμέτρου,  $\lambda$ .

### 3.5 Βελτιστοποίηση: Κριτήρια αξιολόγησης αποτελεσμάτων και Αντικειμενική συνάρτηση.

Για την ανάλυση, που ακολουθεί, λαμβάνονται υπόψιν τα στατιστικά δεδομένα της ιστορικής χρονοσειράς, στην οποία βασίστηκαν οι Rodriguez – Iturbe *et al.* (1988), για την εξαγωγή των πρώτων δημοσιευμένων αποτελεσμάτων, σχετικά με το τυχαίο μοντέλο BL. Η ωριαία αυτή

χρονοσειρά έχει προέλθει από το βροχογραφικό σταθμό του αεροδρομίου του Denver (Denver Airport Station, 15/05 – 16/06, 1949-1976) και οι υπό εξέταση στάθμες συνάθροισης (επιπλέον της ιστορικής ωριαίας) αντιστοιχούν σε 6, 12 και 24 h.

Οι Rodriguez – Iturbe *et al.* (1988, σελ. 288) δημοσιεύουν δύο ισοδύναμες (κατά τον δικό τους ισχυρισμό) λύσεις, χωρίς ωστόσο να ποσοτικοποιούν την ποιότητα των δύο εναλλακτικών λύσεων. Οι δύο «ισοδύναμες» λύσεις στηρίχθηκαν στην επιλογή των εξής στατιστικών μεγεθών:

$$\begin{aligned} \text{Λύση 1}^{\text{η}}: & E^{1\text{h}}, \text{Var}^{1\text{h}}, \mathbf{Var}^{24\text{h}}, \text{PDR}^{1\text{h}}, \text{PDR}^{24\text{h}}, \text{Covar}_1^{1\text{h}} \\ \text{Λύση 2}^{\text{η}}: & E^{1\text{h}}, \text{Var}^{1\text{h}}, \text{PDR}^{1\text{h}}, \text{PDR}^{24\text{h}}, \text{Covar}_1^{1\text{h}}, \mathbf{Covar}^{24\text{h}} \end{aligned}$$

Πίνακας 3.5.α : Επιλογή στατιστικών μεγεθών, Rodriguez – Iturbe *et al.* (1988) - Denver

Οι τελικές τιμές των παραμέτρων του μοντέλου, για κάθε λύση, προέκυψαν από τη διαδικασία ελαχιστοποίησης των αποκλίσεων των παραπάνω μεγεθών (τα υπόλοιπα δεκαοχτώ στατιστικά μεγέθη δεν συμμετείχαν στην αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος).

Έχοντας ως απώτερο στόχο την ποσοτικοποίηση της ποιότητας των δύο δημοσιευμένων εναλλακτικών λύσεων, κρίνεται σκόπιμη η σύγκριση των απόλυτων τιμών των εκατοστιαίων αποκλίσεων όλων των στατιστικών μεγεθών, καθώς και της τυπικής τους απόκλισης. Οι Velghe *et al.* (1994) επιβεβαιώνουν τη σκοπιμότητα της χρήσης της μέσης τιμής των απόλυτων εκατοστιαίων αποκλίσεων (S), ως μέτρου αξιολόγησης της ποιότητας της προσαρμογής. Η σχετική εξίσωση, η οποία υιοθετείται και από τους Verhoest *et al.* (1997), έχει ως εξής:

$$S = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left| 1 - \frac{x_i}{x_{\text{his},i}} \right| \times 100 \quad 3.5.1$$

Κατά την άποψή μας, το παραπάνω μέτρο αξιολόγησης αποτελεί το κυρίως κριτήριο, χωρίς ωστόσο να επαρκεί από μόνο του. Σε δεύτερο πλάνο, κρίνεται σκόπιμη και η εξέταση της τυπικής απόκλισης των απόλυτων εκατοστιαίων αποκλίσεων. Επιπρόσθετα, οι συντελεστές βάρους των εκάστοτε στατιστικών μεγεθών, εφόσον εισαχθούν ή ληφθούν υπόψιν με έναν ποιοτικό τρόπο, είναι δυνατό να τροποποιήσουν περαιτέρω το συνολικό κριτήριο αξιολόγησης (παραδείγματος χάριν, είναι γενικότερα αποδεκτή μία μεγαλύτερη απόκλιση στο συντελεστή αυτοσυσχέτισης παρά στη μέση τιμή και οι συντελεστές βάρους ακολουθούν την άτυπη ιεραρχία της τάξης των ροπών).

Γενικότερα, το κριτήριο αξιολόγησης, που βασίζεται στην τυπική απόκλιση των απόλυτων τιμών των αποκλίσεων, ουσιαστικά ταυτίζεται με το κριτήριο αυτής καθ' αυτής της αντικειμενικής συνάρτησης, Z, που χρησιμοποιείται στη διαδικασία βελτιστοποίησης (εφόσον αυτή αποτελείται από το άθροισμα των τετραγώνων των αποκλίσεων), με τη διαφορά ότι η αντικειμενική συνάρτηση αντιστοιχεί στις αποκλίσεις μίας επιλεγμένης υπο-ομάδας στατιστικών μεγεθών.

Για τις δύο λύσεις των Rodriguez – Iturbe *et al.* (1988, σελ. 288), η μέση τιμή των απόλυτων εκατοστιαίων αποκλίσεων, S, και η τυπική απόκλισή τους διαμορφώνονται ως εξής:

	Μέση τιμή απόλυτων αποκλίσεων	Τυπική απόκλιση απόλυτων αποκλίσεων	Αντικειμενική συνάρτηση, Z
Λύση 1 <sup>η</sup> :	<b>4.628</b>	4.864	<b>0.079</b>
Λύση 2 <sup>η</sup> :	11.92	<b>7.851</b>	0.090

Πίνακας 3.5.β : Κριτήρια αξιολόγησης των λύσεων των Rodriguez – Iturbe *et al.* (1988) - Denver

Παρά την, εκ πρώτης όψεως, οριακή υπεροχή (από τη σκοπιά της αντικειμενικής συνάρτησης, Z και της τυπικής απόκλισης) της 2<sup>ης</sup> λύσης, η μεγαλύτερη προσέγγιση της διασποράς, Var[Y<sub>i</sub><sup>(h)</sup>], σε όλες τις στάθμες συνάθροισης της 1<sup>ης</sup> λύσης, της δίνει ένα σημαντικό ποιοτικό πλεονέκτημα. Επιπλέον, η 1<sup>η</sup> λύση αντιστοιχεί σε μικρότερη μέση τιμή των απόλυτων εκατοστιαίων αποκλίσεων και ως εκ τούτου, υπερέχει ως προς το βασικό κριτήριο αξιολόγησης. Υπό αυτή την σκοπιά, η 1<sup>η</sup> λύση θεωρείται ως καλύτερη και, από εδώ και στο εξής, θα αποτελέσει το σημείο



αναφοράς για οποιεσδήποτε συγκρίσεις (μεταξύ του κλασικού και του νέου τροποποιημένου μοντέλου) επακολογήσουν.

Γενικότερα, η επιλογή των στατιστικών μεγεθών της πρώτης λύσης ( $E^{1h}$ ,  $Var^{1h}$ ,  $Var^{24h}$ ,  $PDR^{1h}$ ,  $PDR^{24h}$ ,  $Covar_1^{1h}$ ) αξιολογείται ως πιο ενδεδειγμένη, σε σύγκριση με την επιλογή των στατιστικών μεγεθών της δεύτερης λύσης. Δεδομένης της αναγκαιότητας επιλογής έξι στατιστικών μεγεθών (στα πλαίσια της αναζήτησης «ακριβούς λύσης») και της εξέτασης τεσσάρων διαφορετικών στατιστικών μεγεθών ( $E$ ,  $PDR$ ,  $Var$ ,  $Covar$ ) για τέσσερις διαφορετικές κλίμακες συνάθροισης ( $h = 1, 6, 12, 24$  h), δύο στατιστικά μεγέθη θα λαμβάνονται υπόψη σε μία και μοναδική κλίμακα συνάθροισης. Τα μεγέθη αυτά είναι η μέση τιμή και η αυτοσυνδιασπορά,  $1^{ns}$  τάξεως (ή αντίστοιχα ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης  $1^{ns}$  τάξεως).

Ως προς τη μέση τιμή, η αναγκαιότητα της μέγιστης προσέγγισης του στατιστικού αυτού μεγέθους σε όλες τις κλίμακες συνάθροισης, δεν αιτιολογεί, εκ πρώτης όψεως, την μία και μοναδική εμφάνισή του, στο μαθηματικό μοντέλο βελτιστοποίησης. Ωστόσο, όπως έχει ήδη σχολιαστεί σε προηγούμενη παράγραφο, υπάρχει μία ισχυρά γραμμική θετική συσχέτιση μεταξύ των τιμών της μέσης τιμής,  $E(h = 1, 6, 12, 24)$  και της στάθμης συνάθροισης,  $h$ , ( $E[Y_i^{(h)}] = wh + c$ ,  $c = 0$ ) με κλίση ίση με τη μέση τιμή της ωριαίας ιστορικής χρονοσειράς. Κατ' επέκταση, η μέγιστη δυνατή προσέγγιση της μέσης τιμής της ωριαίας ιστορικής χρονοσειράς, αυτομάτως συνεπάγεται και τη μέγιστη δυνατή προσέγγιση των υπολοίπων μέσων τιμών, για τις μεγαλύτερες κλίμακες συνάθροισης. Το συμπέρασμα αυτό ισχύει τόσο για το κλασικό, τυχαίο μοντέλο BL, όσο και για το υπό διερεύνηση, νέο τροποποιημένο τυχαίο μοντέλο BL.

Επίσης σε προηγούμενη παράγραφο, έχει αποδειχτεί η (κατά κύριο λόγο) γραμμική αρνητική συσχέτιση του φυσικού λογάριθμου του στατιστικού μεγέθους,  $PDR(h = 1, 6, 12, 24)$ , και της στάθμης συνάθροισης,  $h$ . Το γεγονός αυτό υποδεικνύει την αναγκαιότητα προσέγγισης δύο τιμών του μεγέθους,  $PDR$ , με απώτερο στόχο την εξασφαλισμένη προσέγγιση και των υπολοίπων δύο τιμών, που δε συμμετέχουν άμεσα στο τελικό μαθηματικό μοντέλο βελτιστοποίησης. Στο πλαίσιο αυτό, αξιολογείται ως ενδεδειγμένη η επιλογή των στατιστικών μεγεθών,  $PDR(h = 1)$  και  $PDR(h = 24)$ .

Ως κατακλείδα, προκύπτει το συμπέρασμα ενός βελτιστοποιημένου μέγιστου αριθμού οκτώ συνολικά στατιστικών μεγεθών, μέσω της συμμετοχής μόνο τριών εξ αυτών: της μέσης τιμής,  $E(h=1)$  και της πιθανότητας απουσίας βροχόπτωσης,  $PDR$ , για δύο στάθμες συνάθροισης,  $h = 1$  και  $h = 24$  h. Το γεγονός αυτό παραπέμπει στις κλασσικές μεθόδους αποσύνθεσης (decomposition) των προβλημάτων βελτιστοποίησης.

Τα τρία υπόλοιπα, απαιτούμενα στατιστικά μεγέθη (για το κλασικό τυχαίο μοντέλο BL, των έξι συνολικά άγνωστων παραμέτρων) επιλέγονται βάσει της λογικής της μεταξύ τους άτυπης προτεραιότητας. Δεδομένης, δηλαδή, της (στατιστικού χαρακτήρα) βάρους της διασποράς, επιλέγονται δύο τιμές του μεγέθους. Συνεπώς, η μία και μοναδική εμφάνιση του στατιστικού μεγέθους της αυτοσυνδιασποράς στο γενικό μαθηματικό μοντέλο βελτιστοποίησης, αιτιολογείται από τη μειωμένη προτεραιότητα της προσέγγισης του συγκεκριμένου στατιστικού μεγέθους, σε σχέση με τα υπόλοιπα τρία.

Το προαναφερόμενο γενικό πλαίσιο τεκμηριώνει την επιλογή μίας μέσης τιμής, δύο τιμών διασποράς και  $PDR$  και μίας τιμής αυτοσυνδιασποράς  $1^{ns}$  τάξεως. Κατά αυτό τον τρόπο, αποκλείεται εκ των προτέρων οποιαδήποτε σκοπιμότητα εξέτασης άλλων, εναλλακτικών ομάδων στατιστικών μεγεθών (όπως για παράδειγμα η  $2^{ns}$  ομάδα στατιστικών μεγεθών –Λύση  $2^{ns}$ -, που ελήφθη υπόψη από τους Rodriguez – Iturbe *et al.*, 1988). Το πλαίσιο αυτό διαφοροποιείται στην περίπτωση εισαγωγής περισσότερων στατιστικών μεγεθών στην αντικειμενική συνάρτηση βελτιστοποίησης. Σε αυτή την περίπτωση, η σχετική αναλογία των μεγεθών αυτών, τροποποιεί αυτομάτως και τη βαρύτητα, που τους αποδίδεται.

Όσον αφορά στο νέο τροποποιημένο τυχαίο μοντέλο BL, οι επτά συνολικά άγνωστες παράμετροι του μοντέλου,  $\varphi$ ,  $\nu$ ,  $\alpha$ ,  $\lambda$ ,  $\mu_x$ ,  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$ , συνεπάγονται έξι συνολικά ανεξάρτητες μεταβλητές επίλυσης,

$$\lambda, \varphi, \nu, \mu_x, \kappa_1, \kappa_2$$

δεδομένης της (τεκμηριωμένης σε προηγούμενες παραγράφους) αποδοχής της εξίσωσης:

$$\alpha = 1 + \frac{\lambda \mu_x v(\varphi + \kappa_1)}{\varphi w - \lambda \mu_x \kappa_2} \quad w = 0.08855 \quad 3.5.2$$

Σε αυτή την περίπτωση, τα ελάχιστα απαιτούμενα στατιστικά μεγέθη, που θα συμμετάσχουν στη διαδικασία βελτιστοποίησης θα συνιστούν δυάδες ομοειδών ιστορικών δεδομένων. Για παράδειγμα, μία, τεκμηριωμένη σε προηγούμενη παράγραφο, επιλογή ελάχιστων στατιστικών μεγεθών είναι η ακόλουθη:

$$PDR^{1h}, PDR^{6h}, Var^{6h}, Var^{12h}, Covar^{6h}, Covar^{12h}$$

Καμία μέση τιμή,  $E(h = 1, 6, 12, 24)$ , δε λαμβάνεται υπόψιν, δεδομένης της εκ των προτέρων εξασφαλισμένης μέγιστης προσέγγισης της, μέσω της εξαρτημένης μεταβλητής,  $\alpha$ .

Η αποδοχή του εξαρτημένου χαρακτήρα της παραμέτρου,  $\alpha$ , εισάγει από μόνη της ισχυρούς συντελεστές βάρους για τις μέσες τιμές. Το γεγονός αυτό είναι επιθυμητό για την περίπτωση των μέσων τιμών: επιζητείται στην περίπτωσή τους η μέγιστη δυνατή προσέγγιση. Στην περίπτωση των PDR, η αρχική τιμή  $\lambda = 0.0164$  δεν οδηγεί αυτομάτως στη μέγιστη δυνατή προσέγγιση των τιμών αυτών. Υποδεικνύει, ωστόσο, τη σωστή κατεύθυνση αναζήτησης μιας βέλτιστης λύσης.

Η αντικειμενική συνάρτηση αντιστοιχεί στην εξίσωση:

$$Z = \min \left[ \sum_{i=1}^N W_i \left( 100 \left( \frac{F_i(X)}{F_i} - 1 \right) \right)^2 \right], \quad i = PDR^{1h}, PDR^{24h}, Var^{1h}, Var^{24h}, Covar^{1h} \quad 3.5.3$$

όπου,  $W_i$ : Ο συντελεστής βάρους του στατιστικού μεγέθους,  $i$ . Θεωρήθηκε σκόπιμη η μη εισαγωγή συντελεστών βάρους ( $W_i = 1$ ). Επίσης, υπενθυμίζεται η εισαγωγή ενός πολύ μεγάλου συντελεστή βάρους στην περίπτωση των μέσων τιμών, οι οποίες όμως δε συμμετέχουν στη μαθηματική διατύπωση της αντικειμενικής συνάρτησης,  $Z$ .

Επιπλέον, δε θεωρήθηκε σκόπιμη η εισαγωγή του συντελεστή αυτοσυσχέτισης  $1^{ns}$  τάξεως,  $lag_1$ , (τακτική που ακολούθησαν οι Rodriguez – Iturbe *et al.*, 1988) έναντι της αυτοσυνδιασποράς,  $Covar_1$ . Ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης  $1^{ns}$  τάξεως, πρακτικά ιδωμένος ως πηλίκο δύο θεωρητικών εξισώσεων του μαθηματικού συστήματος,  $lag_1 \equiv Covar_1 / Var$ , επιτείνει τη δυσκολία του γενικότερου προβλήματος βελτιστοποίησης (ιδιαίτερα στην περίπτωση όπου χρησιμοποιούνται κλασσικές μέθοδοι βελτιστοποίησης, όπως η GRG, Powell κ.ο.κ.). Ως εκ τούτου, δεν έγινε και καμία χρήση του ανισοτικού περιορισμού,  $0 < lag_1 < 1$ , μέσω της εισαγωγής συναρτήσεων ποινής (penalty functions). Συναρτήσεις ποινής δεν εισήχθησαν και στην περίπτωση των μεγεθών PDR, τα οποία είναι επίσης φραγμένα μεταξύ της τιμής μηδέν και ένα.

Η προαναφερόμενη αντικειμενική συνάρτηση θα μπορούσε να αντικατασταθεί από την εξίσωση

$$Z' = \min \sum_{i=1}^m \left| 1 - \frac{x_i}{x_{his,i}} \right| \times 100, \quad \text{δεδομένου του ότι ο χρησιμοποιούμενος αλγόριθμος βελτιστοποίησης}$$

δε χρησιμοποιεί παραγώγους  $1^{ns}$  ή/και  $2^{ns}$  τάξεως. Ωστόσο, θεωρήθηκε σκόπιμη η εξέταση του προβλήματος βελτιστοποίησης από την κλασσική σκοπιά της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων. Υπό αυτή τη σκοπιά, το σχετικό πρόβλημα αντιμετωπίστηκε ως κλασικό πρόβλημα προσαρμογής και όχι ως πρόβλημα ακριβούς επίλυσης ενός ( $m \times m$ ) ορισμένου μη γραμμικού συστήματος. Ο πρωτότυπος χρησιμοποιούμενος αλγόριθμος βελτιστοποίησης περιγράφεται αναλυτικά στο Παράρτημα II.

Η μελέτη της αποτελεσματικότητας του νέου τροποποιημένου τυχαίου μοντέλου Bartlett – Lewis θα βασιστεί στην εξέταση δύο ιστορικών χρονοσειρών:

1. της χρονοσειράς του Denver (Denver Airport Station, 15/05 – 16/06, 1949-1976)
2. και μίας ιστορικής χρονοσειράς της Αθήνας (Σταθμός Ε.Μ.Π., Ζωγράφου)

Για τη χρονοσειρά του Denver θα εξεταστούν δύο σενάρια:

1. το σενάριο της επιλογής του ελάχιστου απαιτούμενου αριθμού στατιστικών μεγεθών
2. και το σενάριο βελτιστοποίησης όλων ανεξαιρέτως των υπό εξέταση στατιστικών μεγεθών, για όλες τις υπό εξέταση στάθμες συνάθροισης.

Το πρώτο σενάριο δεν κρίνεται απαραίτητο και λαμβάνεται υπόψιν για λόγους καθαρά «ιστορικής» συνέχειας. Η επιλογή των ελάχιστων απαιτούμενων στατιστικών μεγεθών, έχει ήδη τεκμηριωθεί στην παράγραφο 3.3 και συμπίπτει με την βέλτιστη εμπειρική επιλογή προσομοίωσης (μεταξύ διαφόρων άλλων ομάδων στατιστικών μεγεθών) των Velghe *et al.* (1994). Τα επιλεγόμενα στατιστικά μεγέθη δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

	$h = 1$	$h = 6$	$h = 12$	$h = 24$
$\text{Var}^{(h)}$		✓		✓
$\text{Covar}_1^{(h)}$		✓		✓
PDR	✓	✓		

Πίνακας 3.5.γ : Επιλογή ελάχιστων στατιστικών μεγεθών για τη χρονοσειρά του Denver

Το δεύτερο σενάριο αποτελεί και την καλύτερη και πιο αξιόπιστη τακτική προσδιορισμού των βέλτιστων τιμών των έξι παραμέτρων του μοντέλου (Σχετικά σχόλια έχουν αναφερθεί στις προηγούμενες παραγράφους και ιδιαίτερα στην παράγραφο 3.3).

Για τη χρονοσειρά του σταθμού Ε.Μ.Π., θα εφαρμοστεί μόνο το δεύτερο σενάριο, δηλαδή η εξέταση όλων των στατιστικών μεγεθών και η ελαχιστοποίηση των εκατοστιαίων αποκλίσεων τους από τις ιστορικές τιμές. Σχόλια σχετικά με την επιλογή της υδρολογικής περιόδου προέλευσης αυτών των ιστορικών τιμών θα αναφερθούν στο σχετικό κεφάλαιο.

#### 4 Εφαρμογή του νέου τροποποιημένου τυχαίου μοντέλου Bartlett – Lewis για τη χρονοσειρά του Denver

##### 4.1 Εισαγωγή

Για την ανάλυση, που ακολουθεί, λαμβάνονται υπόψιν τα στατιστικά δεδομένα της ιστορικής χρονοσειράς, στην οποία βασίστηκαν οι Rodriguez – Iturbe *et al.* (1988), για την εξαγωγή των πρώτων δημοσιευμένων αποτελεσμάτων, σχετικά με το τυχαίο μοντέλο BL. Η ωριαία αυτή χρονοσειρά έχει προέλθει από το βροχογραφικό σταθμό του αεροδρομίου του Denver (Denver Airport Station, 15/05 – 16/06, 1949-1976) και οι υπό εξέταση στάθμες συνάθροισης αντιστοιχούν σε 6, 12 και 24 h.

Οι Rodriguez – Iturbe *et al.* (1988) προτείνουν δύο, ισοδύναμες κατά τον ισχυρισμό τους, λύσεις. Στο κεφάλαιο 3, έχει γίνει εκτενής αναφορά στην ποιότητα των δύο λύσεων και έχει αξιολογηθεί, ως υπερτερούσα της άλλης, η λύση, που προσεγγίζει σε μεγαλύτερο βαθμό το στατιστικό μέγεθος της διασποράς. Για την αξιολόγηση των δύο λύσεων εφαρμόστηκαν τα, αναφερόμενα στο κεφάλαιο 3, κριτήρια.

Η βέλτιστη λύση των Rodriguez – Iturbe *et al.* (1988, σελ. 288), σύμφωνα με την οποία οι παράμετροι του μοντέλου λαμβάνουν τις τιμές,  $\lambda = 0.0158$ ,  $\nu = 0.3056$ ,  $\kappa = 0.2597$ ,  $\mu_x = 3.985$ ,  $\alpha = 2.370$ ,  $\varphi = 0.0489$ , υστερεί της μεταγενέστερης επίλυσης των Velghe *et al.* (1994, σελ. 2850), σύμφωνα με την οποία οι τιμές των παραμέτρων του μοντέλου διαμορφώνονται ως εξής:

$$\lambda = 0.0147, \nu = 0.3667, \kappa = 0.5144, \mu_x = 3.6399, \alpha = 2.9050, \varphi = 0.0670$$

Η λύση αυτή (πίνακας 4.1.α) θα αποτελέσει και τη βάση σύγκρισης για την ανάλυση, που ακολουθεί.

##### Velghe *et al.* (1994), set 3/5 - RBLM

$$\lambda = 0.0147, \nu = 0.3667, \kappa = 0.5144, \mu_x = 3.6399, \alpha = 2.9050, \varphi = 0.0670$$

Ιστορικά δεδομένα

Στάθμη συνάθροισης	Μέση τιμή	Διασπορά	Συνδιασπορά(1)	P-wet	PDR
1 h	0.0885	0.4030	0.1934	0.0610	0.9390
6 h	0.5310	5.9700	1.9820	0.1440	0.8560
12 h	1.0630	16.8830	3.8831	0.2200	0.7800
24 h	2.1250	41.6060	6.5321	0.3580	0.6420

Θεωρητικά δεδομένα (Μαθηματικό μοντέλο)

Στάθμη συνάθροισης	Μέση τιμή	Διασπορά	Συνδιασπορά(1)	P-wet	PDR
1 h	0.0894	0.4027	0.1959	0.0503	0.9497
6 h	0.5363	6.1522	1.9307	0.1207	0.8793
12 h	1.0725	16.1658	3.8022	0.1951	0.8049
24 h	2.1450	39.9360	6.5466	0.3253	0.6747

Πίνακας 4.1.α : Η βέλτιστη λύση των Velghe *et al.* (1994) – set 3/5 – Ιστορική χρονοσειρά Denver

Βασικό κριτήριο αξιολόγησης είναι ο μέσος όρος των απόλυτων εκατοστιαίων αποκλίσεων, για το σύνολο των υπό εξέταση στατιστικών μεγεθών και για το σύνολο των υπό εξέταση σταθμών συνάθροισης,  $h$  (σχετικά σχόλια έχουν αναφερθεί στην παράγραφο 3.5). Στον πίνακα 4.1.β αναγράφονται οι σχετικές εκατοστιαίες και απόλυτες εκατοστιαίες αποκλίσεις. Η μέση τιμή των απόλυτων εκατοστιαίων αποκλίσεων,  $S$ , ισούται με 2.096

## Εκατοστιαίες Αποκλίσεις Θεωρητικών - Πραγματικών Μεγεθών

%	Μέση τιμή	Διασπορά	Συνδιασπορά(1)	P-wet	PDR
1 h	0.9903	-0.0634	1.2834	-17.4911	1.1363
6 h	0.9903	3.0520	-2.5897	-16.1993	2.7251
12 h	0.8953	-4.2479	-2.0837	-11.3391	3.1982
24 h	0.9428	-4.0137	0.2214	-9.1441	5.0990

## Απόλυτες τιμές εκατοστιαίων αποκλίσεων

%	Μέση τιμή	Διασπορά	Συνδιασπορά(1)	PDR
1 h	0.9903	0.0634	1.2834	1.1363
6 h	0.9903	3.0520	2.5897	2.7251
12 h	0.8953	4.2479	2.0837	3.1982
24 h	0.9428	4.0137	0.2214	5.0990
Μέση τιμή:	0.9547	2.8443	1.5445	3.0397
Τυπική απ/ση:	0.0455	1.9248	1.0331	1.6318

Μέση τιμή (S): 2.096

Τυπική απ/ση: 1.517

Πίνακας 4.1.β : Εκατοστιαίες αποκλίσεις για τη λύση των Velghe *et al.* (1994) –Denver

Η λύση αυτή αποτελεί τη βέλτιστη λύση από πέντε διαφορετικές λύσεις, που προκύπτουν για διαφορετικές επιλεγμένες ομάδες (εξάδες) στατιστικών μεγεθών. Οι Velghe *et al.* (1994) ακολουθούν τη λογική της ακριβούς επίλυσης, λαμβάνοντας υπόψιν έξι στατιστικά μεγέθη (τον ελάχιστο απαιτούμενο αριθμό). Η ποιότητα των λύσεων τους αξιολογείται βάσει της μέσης τιμής των απόλυτων εκατοστιαίων αποκλίσεων όλων των στατιστικών μεγεθών. Εκτενής σχολιασμός για τη σκοπιμότητα υιοθέτησης της τακτικής αυτής έχει γίνει στο κεφάλαιο 3 (παράγραφοι 3.1 και 3.5).

Ως βασικός στόχος, όσον αφορά στην εξέταση του τροποποιημένου τυχαίου μοντέλου Bartlett – Lewis (MRBLM), τίθεται η μείωση της τιμής,  $S = 2.096$ . Στις επόμενες παραγράφους θα εξεταστούν δύο σενάρια αναφορικά με το MRBLM:

1. Το πρώτο σενάριο περιορίζει την τιμή της παραμέτρου  $\kappa_2$  στη λήψη θετικών τιμών ( $\kappa_2 > 0$ ). Το γεγονός αυτό συνάδει με τη φυσική υπόσταση του τροποποιημένου τυχαίου μοντέλου BL (σχετικός σχολιασμός έχει προηγηθεί στην παράγραφο 2.5.1)
2. Το δεύτερο σενάριο επιτρέπει τη λήψη και αρνητικών τιμών, όσον αφορά στην παράμετρο  $\kappa_2$ . Η παραδοχή αυτή στερείται φυσικής σημασίας. Ωστόσο, αιτιολογείται από τη μαθηματική σκοπιά εξέτασης του προβλήματος. Το νέο, τροποποιημένο τυχαίο μοντέλο BL, εισάγει μία επιπλέον παράμετρο συγκριτικά με το (κλασσικό) τυχαίο μοντέλο. Υπό αυτή την έννοια, είναι αναμενόμενη η βελτίωση της ποιότητας προσαρμογής.

Στην περίπτωση και των δύο σεναρίων προέκυψαν υπερτερούσες, συγκριτικά με τη λύση των Velghe *et al.* (1994), λύσεις. Στην περίπτωση του πρώτου σεναρίου ( $\kappa_2 > 0$ ) η παράμετρος,  $\kappa_2$ , λαμβάνει μηδενική τιμή, γεγονός που αντιστοιχεί σε ταύτιση του τροποποιημένου μοντέλου με το παλιό. Υπό αυτή την έννοια, η βελτίωση της μέσης τιμής των απόλυτων εκατοστιαίων αποκλίσεων,  $S$ , σε σχέση με τη λύση των Velghe *et al.* (1994) απλώς αντιστοιχεί σε μία ακόμα καλύτερη λύση του κλασσικού τυχαίου μοντέλου (υποδεικνύει την μη σκοπιμότητα χρήσης του τροποποιημένου μοντέλου).

Στην περίπτωση του δεύτερου σεναρίου, η τιμή της παραμέτρου,  $\kappa_2$ , λαμβάνει αρνητική τιμή. Το γεγονός αυτό τεκμηριώνει τη σκοπιμότητα εφαρμογής του τροποποιημένου μοντέλου BL. Η βελτίωση της μέσης τιμής των απόλυτων εκατοστιαίων αποκλίσεων,  $S$ , είναι της τάξης του 54%.

Από τη σχετική διαδικασία προσομοίωσης (παραγωγής συνθετικών χρονοσειρών) επιβεβαιώνεται η ισχύς της λύσης και η συγκριτική υπεροχή της. Κατά συνέπεια, η σκοπιμότητα εφαρμογής του νέου, τροποποιημένου μοντέλου τεκμηριώνεται επαρκώς.

#### 4.2 Εφαρμογή του τροποποιημένου τυχαίου μοντέλου BL για την ιστορική χρονοσειρά του Denver και για θετικές τιμές της παραμέτρου $\kappa_2$ , ( $\kappa_2 > 0$ )

Η εφαρμογή του τροποποιημένου τυχαίου μοντέλου BL για την ιστορική χρονοσειρά του Denver και για τιμές της παραμέτρου,  $\kappa_2 > 0$ , απέδωσε τα εξής αποτελέσματα.

##### Τροποποιημένο τυχαίο μοντέλο BL

$$\lambda = 0.0164, \nu = 0.0841, \kappa_1 = 0.5144, \mu_x = 5.5735, \alpha = 2.5619, \varphi = 0.0319, \kappa_2 = 1e-04$$

Ιστορικά δεδομένα

Στάθμη συνάθροισης	Μέση τιμή	Διασπορά	Συνδιασπορά(1)	P-wet	PDR
1 h	0.0885	0.4030	0.1934	0.0610	0.9390
6 h	0.5310	5.9700	1.9820	0.1440	0.8560
12 h	1.0630	16.8830	3.8831	0.2200	0.7800
24 h	2.1250	41.6060	6.5321	0.3580	0.6420

Θεωρητικά δεδομένα (Μαθηματικό μοντέλο)

Στάθμη συνάθροισης	Μέση τιμή	Διασπορά	Συνδιασπορά(1)	P-wet	PDR
1 h	0.0886	0.4013	0.1953	0.0421	0.9579
6 h	0.5313	6.2001	1.9320	0.1180	0.8820
12 h	1.0626	16.2642	3.7702	0.2007	0.7993
24 h	2.1252	40.0688	6.6520	0.3435	0.6565

Πίνακας 4.2.α : Αποτελέσματα βελτιστοποίησης για το μοντέλο MRBLM και για τιμές  $\kappa_2 > 0$

Οι εκατοστιαίες αποκλίσεις μεταξύ ιστορικών και θεωρητικών δεδομένων δίνονται στον πίνακα 4.2.β

Εκατοστιαίες Αποκλίσεις Θεωρητικών - Πραγματικών Μεγεθών

%	Μέση τιμή	Διασπορά	Συνδιασπορά(1)	P-wet	PDR
1 h	0.0565	-0.4287	0.9865	-31.0388	2.0164
6 h	0.0565	3.8549	-2.5265	-18.0534	3.0370
12 h	-0.0376	-3.6652	-2.9078	-8.7807	2.4766
24 h	0.0094	-3.6947	1.8363	-4.0549	2.2611

Απόλυτες τιμές εκατοστιαίων αποκλίσεων

%	Μέση τιμή	Διασπορά	Συνδιασπορά(1)	PDR
1 h	0.0565	0.4287	0.9865	2.0164
6 h	0.0565	3.8549	2.5265	3.0370
12 h	0.0376	3.6652	2.9078	2.4766
24 h	0.0094	3.6947	1.8363	2.2611
Μέση τιμή:	0.0400	2.9109	2.0643	2.4478
Τυπική απ/ση:	0.0223	1.6569	0.8444	0.4355

Μέση τιμή (S): 1.866  
Τυπική απ/ση: 1.418

Πίνακας 4.2.β : Εκατοστιαίες αποκλίσεις για μοντέλο MRBLM ( $\kappa_2 > 0$ )

Η λύση αυτή υπερέρχει της λύσης των Velghe *et al.* (1994), όσον αφορά στα μεγέθη των μέσων τιμών και της πιθανότητας απουσίας βροχόπτωσης (PDR). Η προσαρμογή του συνόλου των στατιστικών μεγεθών υπερέρχει της αντίστοιχης των Velghe *et al.* (1994), δεδομένου ότι η μέση τιμή των απόλυτων εκατοστιαίων αποκλίσεων,  $S$ , μειώνεται κατά 11.0%.

Η εξαιρετικά μικρή τιμή της παραμέτρου,  $\kappa_2$ , ουσιαστικά υποδηλώνει την ταύτιση του (κλασικού) τυχαίου μοντέλου BL με το τροποποιημένο. Εξάγεται, συνεπώς, το συμπέρασμα της απουσίας επαρκούς αιτιολόγησης, όσον αφορά στην εφαρμογή του νέου μοντέλου (έναντι του κλασικού) για τιμές της παραμέτρου  $\kappa_2 > 0$  (τουλάχιστον όσον αφορά στην ιστορική υπό εξέταση χρονοσειρά του Denver).



### 4.3 Εφαρμογή του τροποποιημένου τυχαίου μοντέλου BL για την ιστορική χρονοσειρά του Denver και για αποδεκτές, αρνητικές τιμές της παραμέτρου $\kappa_2$ .

#### 4.3.1 Αποτελέσματα βελτιστοποίησης

Στους πίνακες 4.3.1.α και 4.3.1.β αναφέρονται τα σχετικά αποτελέσματα της διαδικασίας βελτιστοποίησης.

##### Τροποποιημένο τυχαίο μοντέλο BL ( $\kappa_2 < 0$ )

$$\lambda = 0.0164, \nu = 0.3033, \kappa_1 = 0.6400, \mu_x = 3.9213, \alpha = 3.0887, \varphi = 0.0600, \kappa_2 = -0.0190$$

Ιστορικά δεδομένα

Στάθμη συνάθροισης	Μέση τιμή	Διασπορά	Συνδιασπορά(1)	P-wet	PDR
1 h	0.0885	0.4030	0.1934	0.0610	0.9390
6 h	0.5310	5.9700	1.9820	0.1440	0.8560
12 h	1.0630	16.8830	3.8831	0.2200	0.7800
24 h	2.1250	41.6060	6.5321	0.3580	0.6420

Θεωρητικά δεδομένα (Μαθηματικό μοντέλο)

Στάθμη συνάθροισης	Μέση τιμή	Διασπορά	Συνδιασπορά(1)	P-wet	PDR
1 h	0.0886	0.4028	0.1933	0.0535	0.9465
6 h	0.5313	6.1876	2.0030	0.1285	0.8715
12 h	1.0626	16.3813	3.9050	0.2102	0.7898
24 h	2.1252	40.5727	6.5300	0.3513	0.6487

Πίνακας 4.3.1.α : Αποτελέσματα βελτιστοποίησης για το μοντέλο MRBLM και για τιμές  $\kappa_2 < 0$

Εκατοστιαίες Αποκλίσεις Θεωρητικών - Πραγματικών Μεγεθών

%	Μέση τιμή	Διασπορά	Συνδιασπορά(1)	P-wet	PDR
1 h	0.0565	-0.0443	-0.0575	-12.2951	0.7987
6 h	0.0565	3.6455	1.0585	-10.7639	1.8107
12 h	-0.0376	-2.9715	0.5645	-4.4545	1.2564
24 h	0.0094	-2.4836	-0.0318	-1.8715	1.0436

Απόλυτες τιμές εκατοστιαίων αποκλίσεων

%	Μέση τιμή	Διασπορά	Συνδιασπορά(1)	PDR
1 h	0.0565	0.0443	0.0575	0.7987
6 h	0.0565	3.6455	1.0585	1.8107
12 h	0.0376	2.9715	0.5645	1.2564
24 h	0.0094	2.4836	0.0318	1.0436
Μέση τιμή:	0.0400	2.2862	0.4281	1.2274
Τυπική απ/ση:	0.0223	1.5687	0.4866	0.4315
Μέση τιμή (S):	0.995			
Τυπική απ/ση:	1.168			

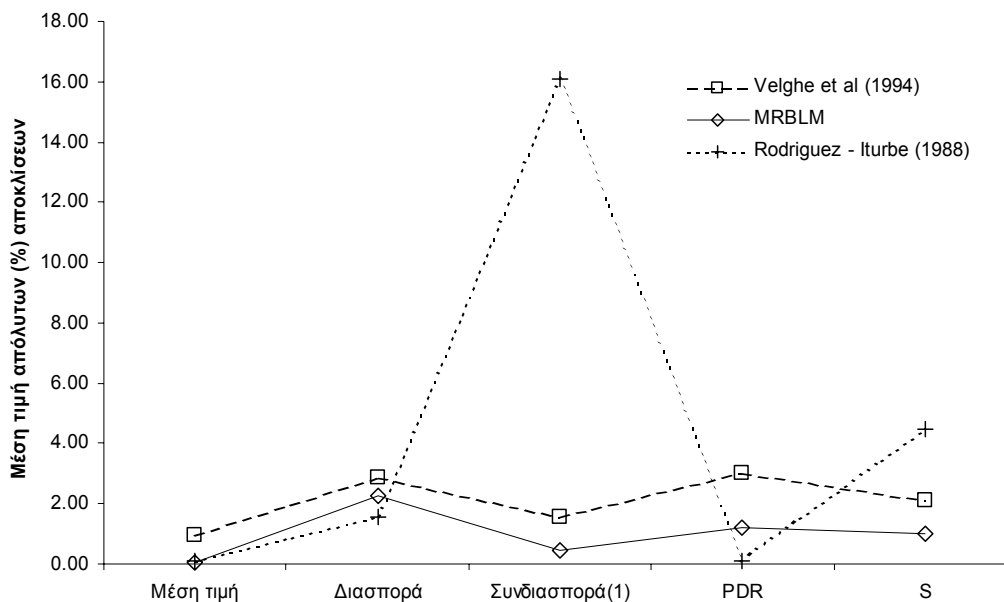
Πίνακας 4.3.1.β : Εκατοστιαίες αποκλίσεις για μοντέλο MRBLM ( $\kappa_2 < 0$ )

Η νέα αυτή λύση, συγκριτικά με τη λύση των Velghe *et al.* (1994), βελτιώνει:

1. Τις μέσες τιμές για όλες τις υπό εξέταση στάθμες συνάθροισης.
2. Τη μέση τιμή των απόλυτων εκατοστιαίων αποκλίσεων των μεγεθών της διασποράς, αυτοσυνδιασποράς  $1^{ns}$  τάξης και PDR.

3. Τη μέση τιμή των απόλυτων εκατοστιαίων αποκλίσεων όλων των υπό εξέταση στατιστικών μεγεθών,  $S$ , κατά 52.5%.
4. Την τυπική απόκλιση των απόλυτων εκατοστιαίων αποκλίσεων κατά 23.0%.

Το διάγραμμα 4.3.1.α δίνει παραστατικά τη μεταβολή των μέσων τιμών των απόλυτων εκατοστιαίων αποκλίσεων ανά στατιστικό μέγεθος για τη λύση των Velghe *et al.* (1994), Rodriguez-Iturbe *et al.* (1988) και τη λύση που προέκυψε από το νέο τροποποιημένο μοντέλο MRBLM ( $\kappa_2 < 0$ ).



\* S: η μέση τιμή των απόλυτων εκατοστιαίων αποκλίσεων για όλα τα στατιστικά μεγέθη

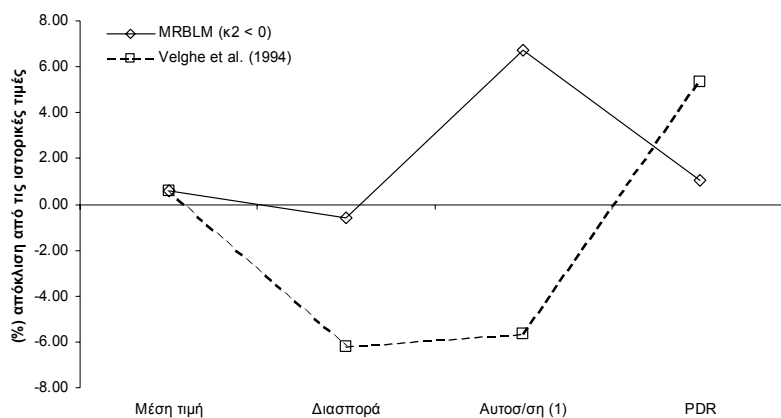
Διάγραμμα 4.3.1.α : Μέσες τιμές απόλυτων εκατοστιαίων αποκλίσεων ανά στατιστικό μέγεθος

Από το διάγραμμα αυτό διαφαίνεται η αποτυχία της λύσης των Rodriguez-Iturbe *et al.* (1988) σχετικά με το μέγεθος της αυτοσυνδιασποράς  $1^{nc}$  τάξης και η υπεροχή της λύσης του μοντέλου MRBLM σε όλα τα υπό εξέταση στατιστικά μεγέθη (συγκριτικά με τη λύση των Velghe *et al.*, 1994).

### 4.3.2 Παραγωγή συνθετικών χρονοσειρών – Συγκριτικά αποτελέσματα

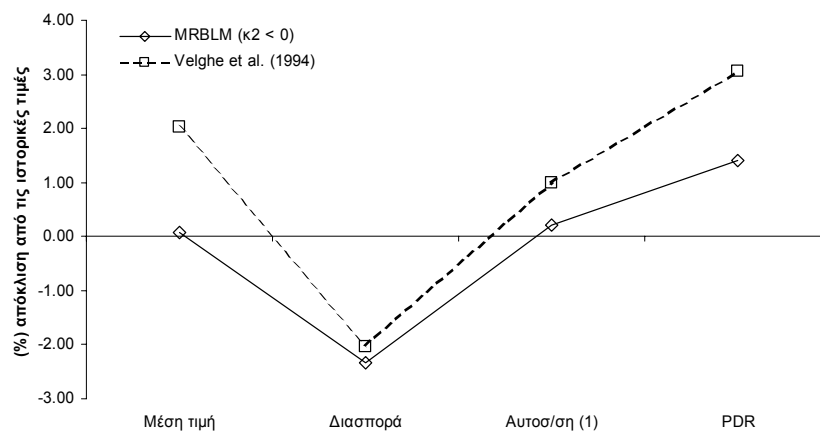
Στα παρακάτω διαγράμματα δίνεται παραστατικά η απόκλιση των υπό εξέταση στατιστικών μεγεθών των συνθετικών χρονοσειρών, που προέκυψαν από τη διαδικασία της προσομοίωσης. Η παραγωγή των συνθετικών χρονοσειρών διεξήχθη τόσο για τη λύση του MRBLM, όσο και για τη λύση των Velghe *et al.* (1994).

Κλίμακα συνάθροισης: 24 h

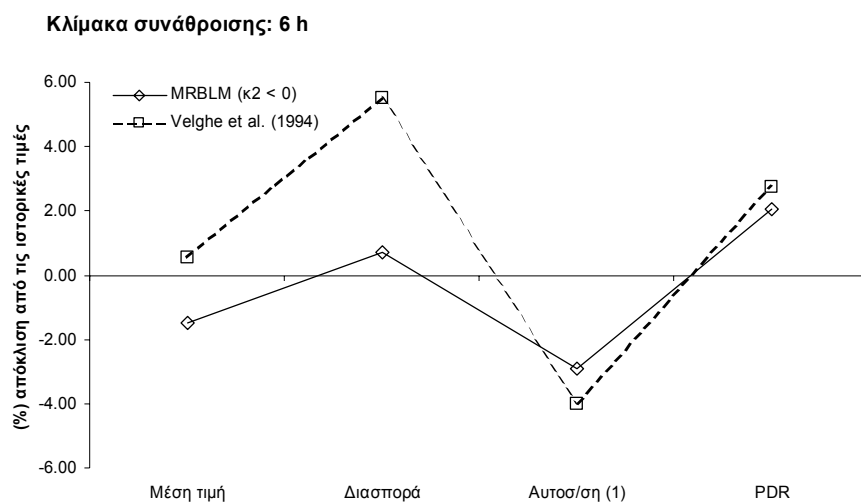


Διάγραμμα 4.3.2.α : Εκατοστιαία απόκλιση στατιστικών μεγεθών από τις ιστορικές τιμές για στάθμη συνάθροισης,  $h = 24$  h

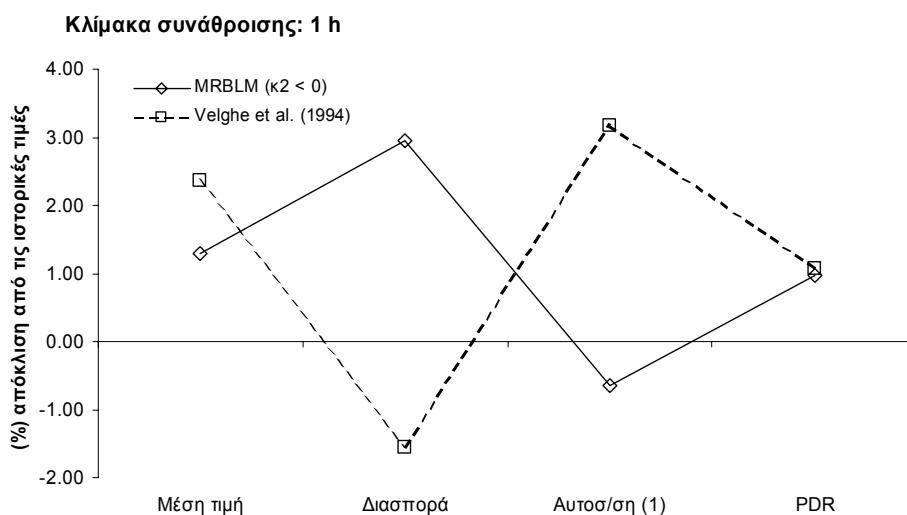
Κλίμακα συνάθροισης: 12 h



Διάγραμμα 4.3.2.β : Εκατοστιαία απόκλιση στατιστικών μεγεθών από τις ιστορικές τιμές για στάθμη συνάθροισης,  $h = 12$  h



Διάγραμμα 4.3.2.γ : Εκατοστιαία απόκλιση στατιστικών μεγεθών από τις ιστορικές τιμές για στάθμη συνάθροισης,  $h = 6$  h



Διάγραμμα 4.3.2.δ : Εκατοστιαία απόκλιση στατιστικών μεγεθών από τις ιστορικές τιμές για στάθμη συνάθροισης,  $h = 1$  h

Στον πίνακα 4.3.2.α δίνονται αναλυτικά οι τιμές των στατιστικών μεγεθών, έτσι όπως προέκυψαν από τη διαδικασία προσομοίωσης και παραγωγής των συνθετικών χρονοσειρών, καθώς και οι σχετικές εκατοστιαίες αποκλίσεις τους σε σχέση με τις ιστορικές και θεωρητικές τιμές τους (ως θεωρητική ορίζεται η τιμή, που προκύπτει από το μοντέλο, για συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων του)

	MRBLM ( $\kappa_2 < 0$ )			Velghe <i>et al.</i> (1994)		
	Απόκλιση (%) από			Απόκλιση (%) από		
	Θεωρητικές τιμές	Ιστορικές τιμές		Θεωρητικές τιμές	Ιστορικές τιμές	
<b>24 h</b>						
Μέση τιμή	2.1374	0.575%	0.584%	2.1374	0.572%	0.582%
Διασπορά	41.3593	1.939%	-0.593%	39.0169	-3.835%	-6.223%
Αυτοσ/ση <sup>(1)</sup>	0.1676	4.150%	6.737%	0.1481	-7.942%	-5.654%
PDR	0.6487	-0.004%	1.039%	0.6762	4.232%	5.320%
<b>12 h</b>						
Μέση τιμή	1.0637	0.106%	0.068%	1.0846	2.068%	2.029%
Διασπορά	16.4905	0.666%	-2.325%	16.5405	0.972%	-2.028%
Αυτοσ/ση <sup>(1)</sup>	0.2305	-3.300%	0.224%	0.2323	-2.556%	1.003%
PDR	0.7910	0.141%	1.407%	0.8039	1.779%	3.058%
<b>6 h</b>						
Μέση τιμή	0.5230	-1.553%	-1.498%	0.5339	0.481%	0.538%
Διασπορά	6.0134	-2.816%	0.727%	6.2995	1.808%	5.519%
Αυτοσ/ση <sup>(1)</sup>	0.3223	-0.438%	-2.921%	0.3187	-1.558%	-4.017%
PDR	0.8736	0.231%	2.056%	0.8796	0.925%	2.753%
<b>1 h</b>						
Μέση τιμή	0.0897	1.244%	1.301%	0.0906	2.251%	2.367%
Διασπορά	0.4149	3.000%	2.954%	0.3967	-1.508%	-1.557%
Αυτοσ/ση <sup>(1)</sup>	0.4768	-0.645%	-0.637%	0.4951	3.164%	3.164%
PDR	0.9481	0.052%	0.968%	0.9491	0.275%	1.076%

Η μέση τιμή των αρνητικών αποκλίσεων (από τις ιστορικές τιμές) είναι 0% στατιστικά μετρήσιμη και για όλες τις υπό εξέταση στάθμες συνάθροισης δίνεται στον πίνακα 4.3.2.β.

	S	ΔS (%)
MRBLM ( $\kappa_2 < 0$ )	1.628	-
Velghe <i>et al.</i> (1994)	2.137	31.30%

Πίνακας 4.3.2.β : Μέση τιμή απόλυτων (%) αποκλίσεων από τις ιστορικές τιμές, για όλα τα στατιστικά μεγέθη και όλες τις στάθμες συνάθροισης

Από τον πίνακα 4.3.2.β είναι εμφανής η μεγαλύτερη (κατά 31.30%) προσέγγιση των ιστορικών τιμών, στην περίπτωση των συνθετικών χρονοσειρών, που παρήχθησαν με εφαρμογή του νέου, τροποποιημένου τυχαίου μοντέλου BL. Στον πίνακα 4.3.2.γ δίνονται τα μεγέθη των συνθετικών χρονοσειρών, ανά στάθμη συνάθροισης. Πιο αναλυτικά:

	Αριθμός καταγιγίδων	Σύνολο ωρών (h)	Αριθμός συναθροισμένων τιμών	Αριθμός αρνητικών (απορριπτέων) τιμών, $\beta_i$	Ποσοστό αρνητικών τιμών, $\beta_i$
1 h	3000	182201	182201	7	0.23%
6 h	15000	925410	154235	34	0.23%
12 h	30000	1827504	152292	82	0.27%
24 h	60000	3651216	152134	171	0.29%

Πίνακας 4.3.2.γ : Λοιπά στοιχεία συνθετικών χρονοσειρών

Δεδομένης της αρνητικής τιμής της παραμέτρου,  $\kappa_2$ , αναμένεται και ένας αριθμός αρνητικών τιμών της μεταβλητής,  $\beta_i$  (η σημασία της μεταβλητής,  $\beta_i$ , έχει σχολιαστεί στην παράγραφο 2.5.1.1).

$$\beta_i = \kappa_1 \eta_i + \kappa_2 \eta_i^2 \quad 4.3.2.1$$

Στον πίνακα 4.3.2.γ αναγράφεται το ποσοστό των αρνητικών τιμών της μεταβλητής, ανά στάθμη συνάθροισης,  $h$ . Το ποσοστό αυτό δεν υπερβαίνει το 0.3%. Οι τιμές αυτές απορρίφθηκαν, ως μη αποδεκτές. Ο αριθμός των καταγιγίδων επιλέχθηκε με γνώμονα τον αριθμό των παραγόμενων τιμών των συνθετικών χρονοσειρών. Ως ελάχιστο όριο ετέθη ο αριθμός 150000. Τα αποτελέσματα, που αφορούν τη λύση των Velghe *et al.* (1994) είναι συμβατά με τα αντίστοιχα δημοσιευμένα. Πιο αναλυτικά:

Velghe <i>et al.</i> (1994)			Ιστορικές τιμές (% απόκλιση)		
<b>24 h</b>			<b>6 h</b>		
Μέση τιμή	2.1672	1.99	Μέση τιμή	0.5418	2.03
Διασπορά	41.7190	0.27	Διασπορά	6.3010	5.54
Αυτοσ/ση <sup>(1)</sup>	0.1775	13.06	Αυτοσ/ση <sup>(1)</sup>	0.3059	-7.86
PDR	0.6398	-0.34	PDR	0.8625	0.76
<b>12 h</b>			<b>1 h</b>		
Μέση τιμή	1.0863	2.19	Μέση τιμή	0.0888	0.34
Διασπορά	16.9340	0.30	Διασπορά	0.4034	0.10
Αυτοσ/ση <sup>(1)</sup>	0.2134	-7.22	Αυτοσ/ση <sup>(1)</sup>	0.4908	2.27
PDR	0.7804	0.05	PDR	0.9438	0.51

Πίνακας 4.3.2.δ : Στατιστικά χαρακτηριστικά συνθετικών χρονοσειρών. Δημοσιευμένα αποτελέσματα από τους Velghe *et al.* (1994, σελ. 2852)

Η μέση τιμή των απόλυτων εκατοστιαίων αποκλίσεων από τις ιστορικές τιμές, έτσι όπως προκύπτουν από τη διαδικασία παραγωγής συνθετικών χρονοσειρών, που διεξήγαγαν οι Velghe *et al.* (1994), είναι της τάξεως του 2.80%. Η τιμή αυτή είναι παραπλήσια της τιμής 2.14%, που δίνεται στον πίνακα 4.3.2.β.

## 5 Εφαρμογή του νέου τροποποιημένου τυχαίου μοντέλου Bartlett – Lewis (MRBLM) για τη χρονοσειρά της Αθήνας

Η εφαρμογή του τροποποιημένου τυχαίου μοντέλου BL θα βασιστεί στις βροχογραφικές μετρήσεις του σταθμού του Ε.Μ.Π. για την περίοδο 15-12 έως 15-01 και για τα έτη 1994 έως 2003. Οι συναθροισμένες ιστορικές χρονοσειρές των 6, 12 και 24 h, προκύπτουν από την αντίστοιχη ωριαία ( $h = 1$  h). Μεταξύ των διαθέσιμων βροχογραφικών ωριαίων μετρήσεων για τους μήνες Δεκέμβρη και Ιανουάριο, επιλέχθηκε το συγκεκριμένο μηνιαίο χρονικό διάστημα βάσει των κριτηρίων, που έχουν αναφερθεί στο κεφάλαιο 3. Πιο συγκεκριμένα, υπήρχαν ενδείξεις πως από το συγκεκριμένο χρονικό διάστημα ενδείκνυται για την εφαρμογή του τυχαίου μοντέλου BL.

Τα υπό εξέταση στατιστικά μεγέθη, μέση τιμή, διασπορά, αυτοσυνδιασπορά 1<sup>ης</sup> τάξης και πιθανότητα απουσίας βροχόπτωσης (PDR), για την υπό εξέταση υδρολογική περίοδο και για τέσσερις στάθμες συνάθροισης ( $h = 1, 6, 12$  και  $24$  h) δίνονται στον πίνακα 5.1.α.

h :	1	6	12	24
Αριθμός δεδομένων:	7650	1275	638	319
Μέση τιμή:	0.1226	0.7358	1.4705	2.9410
Διασπορά:	0.6323	10.1490	29.357	76.667
PDR:	0.9183	0.8251	0.7476	0.6238
Συνδιασπορά <sup>(1)</sup> :	0.3271	4.0773	7.6865	10.2886

Πίνακας 5α : Στατιστικά μεγέθη για την ιστορική χρονοσειρά του Ε.Μ.Π.

Δεδομένου του μικρού αριθμού δεδομένων (319) για τη συναθροισμένη χρονοσειρά των 24 h, η συγκεκριμένη στάθμη συνάθροισης εξαιρέθηκε από την ανάλυση, που ακολουθεί. Η εφαρμογή της δι-παραμετρικής εκθετικής συνάρτησης προσαρμογής για τα μεγέθη των PDR απέδωσε μία πρώτη εκτίμηση για την τιμή της παραμέτρου,  $\lambda = 0.0186$  (η σχετική αιτιολόγηση έχει αναφερθεί στην παράγραφο 3.4).

Η εφαρμογή του (κλασικού) τυχαίου μοντέλου BL απέδωσε τις παρακάτω βέλτιστες τιμές των παραμέτρων:

$$\lambda = 0.0186, \mu_x = 4.3471, \nu = 0.1258, \kappa = 0.6959, \varphi = 0.0480, \alpha = 2.2868$$

Η μέση τιμή των απόλυτων εκατοστιαίων αποκλίσεων,  $S$ , ισούται με 2.72%. Πιο αναλυτικά, όλες οι σχετικές εκατοστιαίες αποκλίσεις δίνονται στον πίνακα 5.1.β

### Ιστορικά δεδομένα

Στάθμη συνάθροισης	Μέση τιμή	Διασπορά	Συνδιασπορά(1)	P-wet	PDR
1 h	0.1226	0.6323	0.3271	0.0817	0.9183
6 h	0.7358	10.1490	4.0773	0.1749	0.8251
12 h	1.4705	29.3571	7.6865	0.2524	0.7476
24 h	2.9410	76.6672	10.2886	0.3762	0.6238

### Θεωρητικά δεδομένα (Μαθηματικό μοντέλο)

Στάθμη συνάθροισης	Μέση τιμή	Διασπορά	Συνδιασπορά(1)	P-wet	PDR
1 h	0.1225	0.6285	0.3337	0.0503	0.9468
6 h	0.7350	10.4425	3.7450	0.1207	0.8615
12 h	1.4700	28.3750	8.0547	0.1951	0.7705

%	Μέση τιμή	Διασπορά	Συνδιασπορά(1)	P-wet	PDR
1 h	-0.1135	-0.6054	2.0064	-38.3956	3.1080
6 h	-0.1135	2.8926	-8.1511	-31.0053	4.4146
12 h	-0.0352	-3.3453	4.7910	-22.7054	3.0513

Απόλυτες τιμές εκατοστιαίων αποκλίσεων

%	Μέση τιμή	Διασπορά	Συνδιασπορά(1)	PDR
1 h	0.1135	0.6054	2.0064	3.1080
6 h	0.1135	2.8926	8.1511	4.4146
12 h	0.0352	3.3453	4.7910	3.0513
Μέση τιμή:	0.0874	2.2811	4.9828	3.5246
Τυπική απ/ση:	0.0452	1.4688	3.0768	0.7712
Μέση τιμή (S):	2.719			
Τυπική απ/ση:	2.395			

Πίνακας 5β : Στατιστικά μεγέθη για την ιστορική χρονοσειρά του Ε.Μ.Π.

Η απόπειρα εφαρμογής του νέου τροποποιημένου μοντέλου BL απέδωσε καλύτερη λύση μόνο για την περίπτωση  $\kappa_2 < 0$ . Για την περίπτωση, που η παράμετρος  $\kappa_2$  εξαναγκαστεί να λάβει θετικές μόνο τιμές, η βέλτιστη προσαρμογή αντιστοιχεί σε  $\kappa_2 = 0$  και, συνεπώς, υφίσταται ταύτιση του κλασικού με το τροποποιημένο τυχαίο μοντέλο BL.

Παρά τη σημαντική βελτίωση της αντικειμενικής συνάρτησης στην περίπτωση του τροποποιημένου μοντέλου και για τιμή της παραμέτρου  $\kappa_2 < 0$ , η σχετική απόπειρα παραγωγής συνθετικών χρονοσειρών απέτυχε. Ο συνδυασμός των τιμών των παραμέτρων,  $\alpha, \nu, \kappa_1, \kappa_2$ , οδηγεί σε αρνητικές τιμές της παραμέτρου  $\beta$ , σε ποσοστό άνω του 10%. Η απόρριψη του υψηλού αυτού αριθμού αρνητικών τιμών οδηγεί σε μη αποδεκτά αποτελέσματα προσομοίωσης. Υπενθυμίζεται, ότι η εξίσωση, που παράγει τις τιμές της μεταβλητής,  $\beta$ , είναι της μορφής:

$$\beta_i = \kappa_1 \eta_i + \kappa_2 \eta_i^2 \tag{5.1}$$

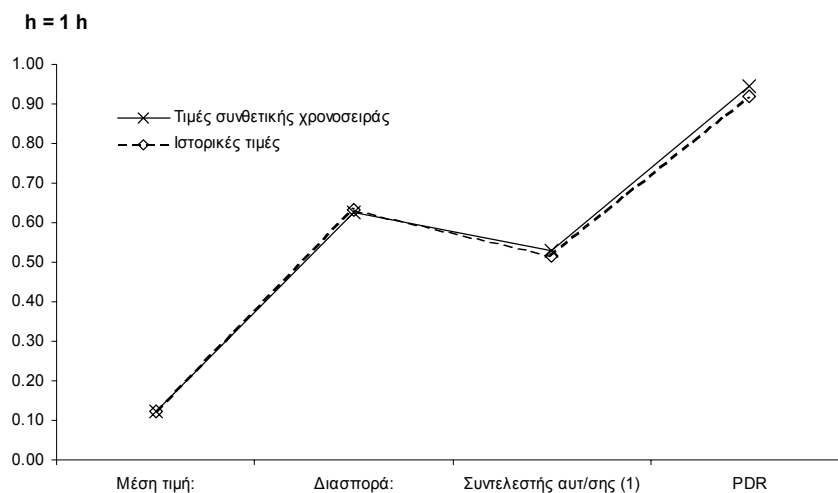
Καταβλήθηκε προσπάθεια προς την κατεύθυνση περιορισμού της μείωσης των τιμών της παραμέτρου,  $\kappa_2$ . Όλες οι λύσεις, που προέκυψαν, οδήγησαν στο συγκεκριμένο εμπόδιο του υψηλού ποσοστού αρνητικών τιμών της μεταβλητής,  $\beta$ . Σε κάθε περίπτωση, η γενική κατεύθυνση των αποτελεσμάτων υποδεικνύει την εφαρμογή του κλασικού μοντέλου.

Η παραγωγή συνθετικών χρονοσειρών για την περίπτωση της λύσης του κλασικού τυχαίου μοντέλου, απέδωσε τα αναμενόμενα αποτελέσματα. Το διάγραμμα 5.1.α, για παράδειγμα, αποδίδει παραστατικά το βαθμό προσέγγισης των ιστορικών τιμών, μέσα από τη διαδικασία παραγωγής χρονοσειρών, για στάθμη συνάθροισης,  $h = 1$  h.

	Τιμές συνθετικής χρονοσειράς	Ιστορικές τιμές	Απόκλιση (%)
Μέση τιμή:	0.1219	0.123	-0.61
Διασπορά:	0.6272	0.632	-0.80
Συντελεστής αυτ/σης <sup>(1)</sup>	0.5283	0.517	2.12
PDR	0.9465	0.918	3.07
Αριθμός παραγόμενων δεδομένων:		164756	
Αριθμός καταγίδων:		3000	

Πίνακας 5γ : Στατιστικά μεγέθη, προερχόμενα από την παραγωγή συνθετικής χρονοσειράς για στάθμη συνάθροισης,  $h = 1$  h.





Διάγραμμα 5α : Στατιστικά μεγέθη, προερχόμενα από την παραγωγή συνθετικής χρονοσειράς για στάθμη συνάθροισης,  $h = 1 h$  και οι αντίστοιχες ιστορικές τιμές τους

Η γενικότερη τάση του νέου τροποποιημένου μοντέλου, να αποδώσει καλύτερα αποτελέσματα σε σχέση με το αυθεντικό τυχαίο μοντέλο Bartlett – Lewis, για τιμές της παραμέτρου,  $\kappa_2 < 0$ , σχολιάζεται στο κεφάλαιο 6 και μπορεί να αποδοθεί σε μία τάση της συνάρτησης,  $\beta$  (εξίσωση 5.1.1) να στρέψει τα κοίλα προς τα κάτω.

## 6 Συμπεράσματα

Αντικείμενο της παρούσας εργασίας αποτελεί η εξέταση ενός νέου, τροποποιημένου μοντέλου σημειακής ανέλιξης, για την περιγραφή της βροχόπτωσης σε μικρή κλίμακα. Το νέο μοντέλο εμπίπτει στην κατηγορία των σημειακών μοντέλων ορθογωνικών παλμών και πιο συγκεκριμένα στην κατηγορία των μοντέλων Bartlett – Lewis. Η εφαρμογή του μοντέλου αποσκοπεί στην ενιαία προσαρμογή των στατιστικών μεγεθών της μέσης τιμής, της διασποράς, του συντελεστή αυτοσυσχέτισης 1<sup>ης</sup> τάξης και της πιθανότητας απουσίας βροχόπτωσης,  $P[Y^{(h)} = 0]$ , για διαφορετικές στάθμες συνάθροισης (κυρίως για τις στάθμες 1, 6, 12 και 24 h). Η προσαρμογή αυτή επιτυγχάνεται για όλες τις στάθμες συνάθροισης και για όλα τα υπό εξέταση στατιστικά μεγέθη, μέσω μίας ενιαίας ομάδας τιμών των παραμέτρων του μοντέλου.

Το υπό εξέταση μοντέλο αποτελεί συνέχεια του τυχαίου μοντέλου Bartlett – Lewis και έχει προταθεί από τους Κουτσογιάννη και Οποφ (αδημοσίευτα κείμενα). Η βασική του διαφοροποίηση σε σχέση με το αυθεντικό, τυχαίο μοντέλο, έγκειται στην εξάρτηση της μέσης έντασης της καταγίδας από τη διάρκειά της. Το τυχαίο μοντέλο Bartlett – Lewis δε λαμβάνει υπόψη την εξάρτηση και οι Κουτσογιάννης και Οποφ με το νέο, τροποποιημένο μοντέλο επιχειρούν να αποκαταστήσουν αυτή τη «φυσικού» χαρακτήρα αστοχία. Η εξάρτηση αυτή εισάγεται μέσω της μη γραμμικής εξίσωσης, 2.6.1 και έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση των ανεξάρτητων παραμέτρων του μοντέλου, σε σχέση με το αυθεντικό τυχαίο μοντέλο Bartlett – Lewis, κατά μία.

$$\beta_i = \kappa_1 \eta_i + \kappa_2 \eta_i^2 \quad 2.6.1$$

Η αντίστοιχη εξίσωση του (κλασικού) τυχαίου μοντέλου αντιστοιχεί σε μία γραμμική θετική συσχέτιση των μεταβλητών,  $\beta_i$  και  $\eta_i$ , σύμφωνα με την εξίσωση 2.6.2.

$$\beta_i = \kappa \eta_i \quad 2.6.2$$

Η μεταβλητή,  $\beta_i$ , αντιστοιχεί στην παράμετρο της ανέλιξης Poisson, η οποία καθορίζει και τα χρονικά σημεία έναρξης των ορθογωνικών παλμών, για κάθε καταγίδα,  $i$ . Η μεταβλητή,  $\eta_i$ , αντιστοιχεί στην παράμετρο της εκθετικής κατανομής, η οποία υιοθετείται για την περιγραφή της τυχαίας μεταβλητής, που αντιστοιχεί στο χρονικό εύρος των ορθογωνικών παλμών, που αποτελούν την καταγίδα,  $i$ . Η μέση ένταση της καταγίδας, ισούται προσεγγιστικά με,  $\mu_x (\varphi + \kappa_i)$ , όπου,  $\kappa_i = \beta_i / \eta_i = \kappa_1 + \kappa_2 \eta_i$ . Η παράμετρος,  $\mu_x$ , αντιστοιχεί στη μέση ένταση των ορθογωνικών παλμών, ενώ η παράμετρος,  $\varphi$ , αντιστοιχεί σε μία σταθερή, για όλες τις παραγόμενες καταγίδες, τιμή. Για τιμή της παραμέτρου,  $\kappa_2 = 0$ , το τροποποιημένο μοντέλο εκπίπτει στο (κλασικό) τυχαίο μοντέλο Bartlett – Lewis και η μέση ένταση των καταγίδων παραμένει σταθερή (ανεξάρτητη της διάρκειά των).

Υπό αυτό το πλαίσιο, εξετάζεται η δυνατότητα του νέου μοντέλου να προσεγγίσει τα υπό εξέταση στατιστικά μεγέθη με ένα πιο ικανοποιητικό τρόπο, συγκριτικά με το αυθεντικό, τυχαίο μοντέλο Bartlett – Lewis. Για αυτό το λόγο, εξετάζονται δύο ιστορικές χρονοσειρές (Denver και Αθήνα) με απώτερο στόχο την εξαγωγή συγκριτικών αποτελεσμάτων.

Το πρόβλημα της ελαχιστοποίησης των αποκλίσεων των υπό εξέταση στατιστικών μεγεθών από τις ιστορικές τιμές τους, για διαφορετικές στάθμες συνάθροισης, αποτελεί ένα ιδιαίτερα δύσκολο πρόβλημα βελτιστοποίησης. Σχετικές παρατηρήσεις αναφορικά με το κλασικό (μη τυχαίο) μοντέλο Bartlett – Lewis αναφέρονται στο Παράρτημα Ι. Όσον αφορά στο (κλασικό) τυχαίο μοντέλο, η εφαρμογή του αλγόριθμου Generalized Reduced Gradient (δέκα set των 50000 διαφορετικών σημείων) απέτυχε να πλησιάσει τη λύση των Rodriguez – Iturbe *et al.* (1988) και των Velghe *et al.* (1994), όσον αφορά στην ιστορική χρονοσειρά του Denver. Προφανώς, απαιτείται ακόμα μεγαλύτερος αριθμός δοκιμών, για τον προσδιορισμό μίας αξιόλογης βέλτιστης λύσης. Από την παραπάνω πρόχειρη δοκιμή προκύπτει η μεγάλη ευαισθησία της αντικειμενικής συνάρτησης στις μικρές μεταβολές των μεταβλητών επίλυσης και η ύπαρξη μεγάλου αριθμού τοπικών ακρότατων.

Μία συμβατική μέθοδος βελτιστοποίησης δε μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην περίπτωση του νέου τροποποιημένου μοντέλου. Για το γεγονός αυτό ευθύνεται η εμφάνιση των απλών και διπλών

(σύνθετων) ολοκληρωμάτων στο υπο-σύστημα εξισώσεων του μεγέθους,  $P[Y^{(h)} = 0]$ . Τα ολοκληρώματα δεν επιδέχονται αναλυτική επίλυση, ενώ δεν κρίθηκε σκόπιμη, λόγω της πολυπλοκότητάς τους, η αναζήτηση κάποιας προσεγγιστικής εξίσωσης υπολογισμού τους. Επιπλέον, η ύπαρξη μεγάλου αριθμού τοπικών ακρότατων δυσχεραίνει, εκ των παραγμάτων, τη διαδικασία αναζήτησης ενός «ολικά» βέλτιστου σημείου. Γι αυτούς τους λόγους, εξετάστηκε η εφαρμογή μίας μεθόδου βελτιστοποίησης, που βασίζεται αποκλειστικά στις τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης (direct-search method). Η μέθοδος προσομοιωμένης απόπτωσης (simulated annealing) των Vanderbilt και Louie (1983) τροποποιήθηκε και αναπτύχθηκε ένας νέος, πρωτότυπος αλγόριθμος βελτιστοποίησης (Παράρτημα II).

Η εκκίνηση του νέου αλγόριθμου βελτιστοποίησης βασίζεται στην παραγωγή ενός λευκού θορύβου κινήσεων (τιμών των μεταβλητών επίλυσης), βάσει των οποίων υπολογίζονται οι τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης. Στη συνέχεια, μέσα από τη διαδικασία απόρριψης τιμών της συνάρτησης (κριτήριο Metropolis), η συμμετρία του λευκού θορύβου διαταράσσεται και μέσω ενός τετραγωνικού μητρώου συνδιασπορών καθορίζεται η κατεύθυνση των νέων κινήσεων. Οι νέες παραγόμενες κινήσεις τείνουν να αξιοποιήσουν την «τοπογραφία» της αντικειμενικής συνάρτησης. Ο αρχικά παραγόμενος λευκός θόρυβος παραμορφώνεται και σταδιακά τείνει να προσεγγίσει το ολικά βέλτιστο σημείο, παρακάμπτοντας τα ενδιάμεσα τοπικά ακρότατα. Η νέα αυτή μέθοδος δε διατηρεί το μαρκοβιανό χαρακτήρα της αυθεντικής μεθόδου των Vanderbilt και Louie (1983).

Η αριθμητική επίλυση των ολοκληρωμάτων έγινε με συνδυασμό των μεθόδων Romberg, Gauss-Legendre και του τραπεζοειδή κανόνα (trapezoidal rule). Ο συνδυασμός των τριών μεθόδων αριθμητικής ολοκλήρωσης έχει ως απώτερο στόχο τη βελτίωση της ταχύτητας υπολογισμού των ολοκληρωμάτων και κατ' επέκταση του μεγέθους απουσίας βροχόπτωσης,  $P[Y^{(h)} = 0]$ .

Λόγω της δυσκολίας του προβλήματος της βελτιστοποίησης, της ύπαρξης πολλών τοπικών ακρότατων, της πολυπλοκότητας των εξισώσεων, της απουσίας αναλυτικών εξισώσεων για την περίπτωση του μεγέθους  $P[Y^{(h)} = 0]$  και του μεγάλου αριθμού ανεξάρτητων μεταβλητών επίλυσης (εφτά), κρίθηκε αναγκαία η περαιτέρω ανάλυση του μαθηματικού μοντέλου. Μέσω της εφαρμογής της βασικής μεθοδολογίας των μεθόδων αποσύνθεσης (decomposition), οι ιστορικές τιμές των ομοειδών στατιστικών μεγεθών υπέστησαν επεξεργασία, μέσω της οποίας προέκυψαν χρήσιμες εκτιμήσεις και ενδείξεις για την πορεία της διαδικασίας βελτιστοποίησης, την επιλογή των ελάχιστων απαιτούμενων, για τη βελτιστοποίηση, στατιστικών μεγεθών και την ποιότητα τη τελικής βέλτιστης λύσης. Οι εκτιμήσεις αυτές συνάδουν με την ανάλυση ευαισθησίας, που διεξήχθη από τους Isham *et al.* (1990), για το αυθεντικό τυχαίο μοντέλο BL.

Από την επεξεργασία αυτή προέκυψε η μείωση των μεταβλητών επίλυσης από εφτά σε έξι και η εξαγωγή μίας αξιόπιστης πρώτης προσέγγισης της τιμής μίας επιπλέον μεταβλητής. Η τιμή αυτή αποτέλεσε σε όλες τις περιπτώσεις, ένα ασφαλές σημείο εκκίνησης του αλγόριθμου βελτιστοποίησης. Η εφαρμογή απλών δι-παραμετρικών εξισώσεων προσαρμογής, σε κάθε υποομάδα ομοειδών στατιστικών μεγεθών, οδήγησε στην εξαγωγή χρήσιμων κριτηρίων επιλογής στατιστικών μεγεθών και μίας, εκ των προτέρων, εκτίμησης της ποιότητας προσέγγισης του μοντέλου για κάθε υπό εξέταση χρονοσειρά. Το τελευταίο αυτό κριτήριο, εφαρμόστηκε για την επιλογή της κατάλληλης, προς επεξεργασία, υδρολογικής περιόδου για την περίπτωση της Αθήνας.

Από την εφαρμογή του νέου τροποποιημένου τυχαίου μοντέλου Bartlett – Lewis (MRBLM) στη χρονοσειρά του Denver, επιβεβαιώνεται η σκοπιμότητα της περαιτέρω εξέτασης του. Τα σχετικά αποτελέσματα βελτιώνουν τόσο τη λύση των Velghe *et al.* (1994), όσο και τη λύση των Rodríguez-Iturbe *et al.* (1988), για τη συγκεκριμένη υπό εξέταση ιστορική χρονοσειρά. Η βελτίωση αυτή είναι της τάξεως του 54%. Στην περίπτωση της χρονοσειράς της Αθήνας, η αντικειμενική συνάρτηση και η προσαρμογή των στατιστικών ιστορικών δεδομένων βελτιώνεται για αρνητικές τιμές της παραμέτρου του μοντέλου,  $\kappa_2$ . Σε δεύτερο επίπεδο όμως, η διαμόρφωση των τιμών των παραμέτρων  $\alpha$ ,  $\nu$ ,  $\kappa_2$ , και  $\kappa_1$ , οδηγούν σε ένα απαγορευτικό πλαίσιο διεξαγωγής της διαδικασίας προσομοίωσης (παραγωγής συνθετικών χρονοσειρών). Για το γεγονός αυτό, αποτελεί αιτία, η παραγωγή μεγάλου ποσοστού αρνητικών τιμών της μεταβλητής του μοντέλου,

$\beta$ , έτσι όπως αυτή ορίζεται από την εξίσωση, 2.6.1. Η τυχαία μεταβλητή,  $\eta$ , προκύπτει από τη δι-παραμετρική γάμα συνάρτηση κατανομής, των οποίων παράμετροι είναι οι μεταβλητές επίλυσης,  $\alpha$  και  $\nu$ .

Το γεγονός της απόδοσης αρνητικών τιμών στην παράμετρο,  $\kappa_2$ , στερείται φυσικής σημασίας, αλλά αποκαλύπτει μία μαθηματικού χαρακτήρα τάση. Η συνάρτηση,  $\beta_i = \kappa_1 \eta_i + \kappa_2 \eta_i^2$ , τείνει να στρέψει τα κοίλα προς τα κάτω, προσδίδοντας αρνητικές τιμές στην «σταθερά»  $\kappa_2$  και διατηρώντας παράλληλα, όπως είναι αναμενόμενο, τις τιμές της μεταβλητής,  $\beta$ , θετικές. Σε αυτό το πλαίσιο, και δεδομένου του ότι,  $\eta_i > 0$ , αναμένονται πάντα τιμές της παραμέτρου,  $\kappa_2$ , μικρότερες, κατά τουλάχιστον μία τάξη μεγέθους, της  $\kappa_1$ .

Από τη διαδικασία προσομοίωσης (παραγωγής συνθετικών χρονοσειρών) εξήχθη το συμπέρασμα της μη απόλυτης ταύτισης των θεωρητικών τιμών των στατιστικών μεγεθών, με τα προκύπτοντα, από την προσομοίωση, μεγέθη (σχετική αναφορά γίνεται και από τους Velghe *et al.*, 1994). Οι αποκλίσεις, αν και σε ανεκτά επίπεδα, υποδεικνύουν, πρακτικά, μία ανακολουθία, μεταξύ της ποιότητας των αποτελεσμάτων της διαδικασίας βελτιστοποίησης και της διαδικασίας προσομοίωσης. Το γεγονός αυτό αποδίδει στη διαδικασία αναζήτησης μίας ολικά βέλτιστης λύσης μία θεωρητική υπόσταση.

Όσον αφορά, γενικότερα, στην εφαρμογή των σημειακών μοντέλων και ειδικότερα της κατηγορίας Bartlett – Lewis, κρίνεται σκόπιμη η αναφορά των εξής επισημάνσεων:

Οι τιμές του μεγέθους της αυτοσυνδιασποράς τείνουν να παρουσιάσουν μέγιστο για στάθμες συνάθροισης μεγαλύτερες ή ίσες των 24 h. Παράλληλα, ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης 1<sup>ης</sup> τάξης τείνει προς το μηδέν (η λαμβάνει ακόμα και αρνητικές τιμές) για στάθμες συνάθροισης μεγαλύτερες των 24 h. Η δυνατότητα των μοντέλων Bartlett – Lewis να παρακολουθήσουν αυτή τη μαθηματική συμπεριφορά δεν έχει επαρκώς διερευνηθεί. Ωστόσο, η γενικότερη τάση, που επικρατεί, είναι η εξαγωγή αποτελεσμάτων για στάθμες συνάθροισης μέχρι 24 h (κατ' εξαίρεση, σε λίγες εργασίες, 48 h).

Η αβεβαιότητα στατιστικού χαρακτήρα, που απορρέει από το μήκος της χρησιμοποιούμενης ιστορικής χρονοσειράς (συσχέτιση μήκους και στατιστικών μεγεθών) και οι επιπλοκές, που αυτή προκαλεί στα μοντέλα BL είναι κάτι το οποίο παραμένει ασχολίαστο στις περισσότερες δημοσιευμένες εργασίες. Το πρόβλημα δείχνει να έχει δύο βασικές παραμέτρους: Η πρώτη αφορά στην αξιοπιστία της χρήσης παρελθόντων αποτελεσμάτων – παραμέτρων του μοντέλου για μελλοντικές εφαρμογές. Δεδομένου του ότι στην πλειονότητα των περιπτώσεων, το μήκος των διαθέσιμων χρονοσειρών είναι σχετικά μικρό (ιδιαίτερα για τις λεπτές χρονικές κλίμακες) η αξιοπιστία των αποτελεσμάτων πλήττεται ακόμα περισσότερο.

Η δεύτερη παράμετρος του προβλήματος της αβεβαιότητας συνδέεται με την κλίμακα συνάθροισης των χρησιμοποιούμενων, για την εξαγωγή των σχετικών αποτελεσμάτων, χρονοσειρών. Αν είναι σωστή η υπόθεση, ότι σε λεπτότερες χρονικές κλίμακες η αβεβαιότητα για τις τιμές των στατιστικών μεγεθών εντείνεται (ιδιαίτερα για το μέγεθος της διασποράς και της αυτοσυνδιασποράς), τότε λεπτότερες χρησιμοποιούμενες χρονικές κλίμακες συνάθροισης επιτείνουν το πρόβλημα της «αξιοπιστίας» των παραμέτρων. Επιπλέον, διαφαίνεται και η σκοπιμότητα της χρήσης κλιμάκων συνάθροισης, που παρουσιάζουν μια σχετική μεταξύ τους εγγύτητα. Οι προαναφερόμενες ενστάσεις είναι ανεξάρτητες της ποιότητας προσέγγισης των στατιστικών δεδομένων από τον εκάστοτε χρησιμοποιούμενο αλγόριθμο βελτιστοποίησης.

Το γενικό εξαγόμενο συμπέρασμα είναι ότι οι τιμές μιας λύσης του μοντέλου Bartlett – Lewis συνιστούν ένα συνεχές πολυ-παραμετρικό πεδίο τιμών, στο δεικτοσύνολο του οποίου υπεισέρχεται ένας σημαντικός, ίσως μεγαλύτερος του αναμενόμενου, αριθμός παραμέτρων. Μία ιστορική χρονοσειρά αποτελείται από μετρήσεις κατακρημνίσεων επί τη βάση μιας χρονικής κλίμακας,  $h$ . Οι παράμετροι ενός μοντέλου αντιστοιχούν συνεπώς,

- Σε συγκεκριμένο βροχογραφικό σταθμό, δηλαδή σε συγκεκριμένο σημείο του χώρου.
- Σε συγκεκριμένη ομογενή, υδρολογικά, περίοδο.

- Σε συγκεκριμένη χρονική κλίμακα μετρήσεων,  $h$ , ή σε συγκεκριμένη χρονική κλίμακα αναγωγής των μετρήσεων.
- Σε συγκεκριμένο μαθηματικό μοντέλο στοχαστικής προσομοίωσης.

Οι παράγοντες αυτοί αποτελούν και την ταυτότητα των παραμέτρων ενός μαθηματικού μοντέλου προσομοίωσης. Αν οι παράμετροι του μαθηματικού μοντέλου ανεξαρτητοποιηθούν από τη χρονική κλίμακα των υδρολογικών δεδομένων,  $h$ , τότε οι παράμετροι αυτές θα εκφράζον με ένα μοναδικό τρόπο, συγκεκριμένο τόπο και υδρολογική περίοδο. Υπό αυτή την έννοια, κάθε απόπειρα προς την κατεύθυνση αυτή θα συντελούσε στην εύρεση παραμέτρων, οι οποίες θα αποτελούσαν, με τη γενικότερη έννοια, «ιδιότητες» του συγκεκριμένου σταθμού, της συγκεκριμένης περιόδου και του συγκεκριμένου μοντέλου – μεθόδου προσομοίωσης.

Οι παράμετροι ενός μοντέλου, που εξυπηρετεί αυτό το στόχο, μπορούν όντως να αποτελέσουν «ιδιότητες» ενός συγκεκριμένου σταθμού, περιόδου και μοντέλου προσομοίωσης; Στην περίπτωση των μοντέλων Bartlett – Lewis η απάντηση στο ερώτημα είναι, μάλλον, αρνητική. Οι τιμές των παραμέτρων του είναι άρρηκτα συνδεδεμένες με:

- Το πλήθος των συναθροισμένων χρονοσειρών, που επιλέγεται να ληφθούν υπόψιν
- Την «εγγύτητα» των κλιμάκων συνάθροισης των χρονοσειρών
- Την επιλογή και τον αριθμό των στατιστικών χαρακτηριστικών (ροπών) που συμμετέχουν στο μαθηματικό μοντέλο
- Την επιλογή επίλυσης ενός ορισμένου συστήματος,  $n \times n$ , ή της προσαρμογής (βελτιστοποίησης) των αποκλίσεων μεταξύ περισσότερων των,  $n$ , θεωρητικών και των αντίστοιχών τους πραγματικών στατιστικών μεγεθών
- Το μήκος και την αφετηρία της ιστορικής χρονοσειράς
- Τους συντελεστές βάρους (weight factors) ή τους περιορισμούς, που ο αναλυτής ενδεχομένως να αποφασίσει να εισάγει στο μαθηματικό μοντέλο βελτιστοποίησης
- Την ποιότητα – αξιοπιστία του χρησιμοποιούμενου αλγόριθμου βελτιστοποίησης

## Παράρτημα Ι: Προσδιορισμός των βέλτιστων παραμέτρων του (κλασικού) μη τυχαίου μοντέλου BL

### Π Ι - 1 Εισαγωγή

Για τη διαδικασία βελτιστοποίησης ελήφθησαν υπόψιν οι πέντε μεταβλητές,

$$\lambda, n, E[X] = \mu_x, \beta, E[C] = \mu_c \quad \text{Π Ι - 1.1}$$

Για το σκοπό αυτό, στο βασικό μαθηματικό μοντέλο, οι μεταβλητές  $\rho$ ,  $\gamma$  και  $E[X^2]$  αντικαταστάθηκαν από τις παρακάτω αναλυτικές εκφράσεις:

$$\rho = \lambda / n, \gamma = \beta / (\mu_c - 1), E[X^2] = 2E^2[X] \quad \text{Π Ι Ι - 1.2}$$

Η διαδικασία αυτή υπαγορεύεται από την τακτική των Rodriguez – Iturbe *et al.* (1987 β). Η σχετική ανάλυση βασίστηκε στην χρησιμοποιούμενη από τους προαναφερόμενους ωριαία ιστορική χρονοσειρά του βροχομετρικού σταθμού του Denver (Denver Int. Airport), για την περίοδο 15 Μαΐου – 16 Ιουνίου και για τα έτη 1945 – 1976 (32 έτη συνολικά). Ελήφθησαν υπόψιν τρεις διαφορετικές στάθμες συνάθροισης (6, 12 και 24 h) και στον παρακάτω πίνακα αναφέρονται τα βασικά στατιστικά χαρακτηριστικά των τεσσάρων χρονοσειρών.

h, h	$\mu$ , mm	$\sigma^2$ , mm <sup>2</sup>	$\gamma$	$\rho^{(1)}$	$\rho^{(2)}$	$\rho^{(3)}$	P[βροχή = 0]
1	0,0885	0,4030	10,9571	0,4800	0,3220	0,2679	0,9391
6	0,5313	5,9702	6,0296	0,3318	0,1285	0,0593	0,8559
12	1,0626	16,8829	4,6233	0,2301	0,0671	-0,0218	0,7801
24	2,1252	41,6067	3,3415	0,1571	-0,0258	-0,0473	0,6424

Βροχομετρικός σταθμός Denver Int. Airport / 15/05 – 16/06, 1945 - 1976

Πίνακας Π Ι - 1α : Στατιστικά χαρακτηριστικά βροχογραφικών δεδομένων σταθμού Denver

Χρησιμοποιήθηκαν συνολικά δώδεκα εξίσωσεις, τρεις για κάθε επίπεδο συνάθροισης,  $h$ : η εξίσωση της μέσης τιμής, η εξίσωση της διασποράς και η εξίσωση του συντελεστή αυτοσυσχέτισης 1<sup>ης</sup> τάξης  $\{\rho^{(1)} \cong \text{cov}^{(1)}/\text{var}\}$ . Οι Rodriguez – Iturbe *et al.* (1987 β) κατέληξαν στις παρακάτω βέλτιστες τιμές των μεταβλητών  $\lambda, n, E[X] = \mu_x, \beta, E[C] = \mu_c$ :

$\lambda$	0,00796	$h^{-1}$	Βροχομετρικός σταθμός Denver Int. Airport 15/05 – 16/06, 1945 - 1976
$n$	1,70000	$h^{-1}$	
$E[X] = \mu_x$	2,98560	mm/h	
$\beta$	0,60000	$h^{-1}$	
$E[C] = \mu_c$	6,33100		

Πίνακας Π Ι - 1β : Αποτελέσματα διαδικασίας βελτιστοποίησης για το μοντέλο BLRPM (Rodriguez – Iturbe *et al.*, 1987 β, σελ. 9654)

Για την εύρεση των τιμών αυτών χρησιμοποιήθηκε ο αλγόριθμος Davidson-Fletcher-Powell, χωρίς την προσθήκη περιορισμών στις τιμές των μεταβλητών. Η χρήση του συντελεστή αυτοσυσχέτισης,  $\rho^{(1)}$ , ως της τρίτης, ανά βαθμίδα συνάθροισης, χρησιμοποιούμενης εξίσωσης, εξαναγκάζει στη χρήση του πηλίκου  $\text{cov}(1)/\text{var}$ . Το γεγονός αυτό μπορεί να επιδεινώσει την αριθμητική αστάθεια του μαθηματικού μοντέλου βελτιστοποίησης.

Οι Rodriguez – Iturbe *et al.* (1987 α, β) δεν αποσαφηνίζουν την ακριβή έκφραση της αντικειμενικής συνάρτησης και το σύνολο των πραγματικών στατιστικών μεγεθών, που υπεισέρχονται σε αυτή. Επιπλέον, μεταξύ των δύο δημοσιεύσεων (1987 α, β) παρατηρείται μια ανακρίβεια ως προς τον αριθμό των συμμετεχόντων στην αντικειμενική συνάρτηση στατιστικών μεγεθών. Στην πρώτη δημοσίευση (1987 α) ο αριθμός τους παραμένει ασχολίαστος, ενώ στη δεύτερη (1987 β, σελ. 285) ο αριθμός τους αναφέρεται πως είναι έξι (μέση τιμή, διασπορά και αυτοσυνδιασπορά 1<sup>ης</sup> τάξεως για στάθμες συνάθροισης 6 και 12 h). Και στις δύο περιπτώσεις, αποδίδονται οι ίδιες τιμές των μεταβλητών απόφασης.

Συνεπώς, οι προαναφερόμενες βέλτιστες τιμές των μεταβλητών απόφασης στερούνται ταυτότητας και η αναπαραγωγή των αποτελεσμάτων μπορεί να στηριχτεί σε λογικές υποθέσεις. Μια πρόχειρη προσπάθεια αναπαραγωγής των αποτελεσμάτων καταρρίπτει την πιθανότητα του να έχουν ληφθεί υπόψιν μόνο έξι στατιστικά μεγέθη. Ο ισχυρισμός αυτός συνεπικουρείται και από το γεγονός ότι σε αυτή την περίπτωση δε λαμβάνονται υπόψιν τα στατιστικά χαρακτηριστικά της λεπτότερης χρονικής κλίμακας ( $h = 1$  h). Οι αναφερόμενες τιμές των μεταβλητών απόφασης δείχνουν να έχουν προκύψει επί τη βάση δώδεκα συνολικά στατιστικών μεγεθών, για τις τρεις υπό εξέταση στάθμες συνάθροισης και την ιστορική ωριαία χρονοσειρά, χωρίς ωστόσο να αποτελούν και σε αυτή την περίπτωση βέλτιστη λύση.

Έγινε προσπάθεια μετατροπής της αντικειμενικής συνάρτησης (από άθροισμα τετραγώνων κανονικοποιημένων αποκλίσεων σε άθροισμα τετραγώνων απολύτων αποκλίσεων) αλλά και στις δύο περιπτώσεις (παρά το ότι η δεύτερη δεν αποτελεί αποδεκτή τακτική λόγω των προβλημάτων κλίμακας) η βέλτιστη λύση, που προέκυψε υπερτερούσε των δημοσιευμένων αποτελεσμάτων.

Επιπρόσθετα, στην δημοσίευση των Rodriguez – Iturbe *et al.* (1987 α, σελ. 9645) αναφέρεται μήκος της ωριαίας χρησιμοποιούμενης χρονοσειράς ίσο με 27 έτη (1949 – 1976), ενώ στη δεύτερη δημοσίευση (1987 β) και για τα ίδια αποτελέσματα της βελτιστοποίησης αναφέρεται ένα υπό εξέταση χρονικό διάστημα δεδομένων ίσο με 26 έτη (1949 – 1975). Επίσης, η αναγραφόμενη χρονική αναφορά των στατιστικών χαρακτηριστικών της ιστορικής χρονοσειράς, όπως αναγράφονται στον Πίνακα 1 (Rodriguez – Iturbe *et al.*, 1987 α, σελ. 9646), αφορά στο διάστημα 1945 – 1976 (32 έτη).

Δεδομένα ωριαίας κλίμακας, που για τις ανάγκες της εργασίας αυτής εξασφαλίστηκαν από το NCDC (National Climatic Data Center, USA), αποκλείουν την περίπτωση, οι μετρήσεις που χρησιμοποιήθηκαν από τους Rodriguez – Iturbe *et al.* (1987 α, β), να αφορούν είτε το χρονικό διάστημα 1949-1975, είτε το διάστημα 1949-1976. Για τις ανάγκες της παρούσας ανάλυσης, ελήφθησαν υπόψιν τα ιστορικά στατιστικά δεδομένα του Πίνακα 1 (Rodriguez – Iturbe *et al.*, 1987 α, σελ. 9646), στα οποία στηρίζονται και τα σχετικά αποτελέσματα των προαναφερόμενων ερευνητών, και ως αξιόπιστη περίοδος προέλευσης των μετρήσεων το χρονικό διάστημα 1945 – 1976 (32 έτη).

Στον παρακάτω πίνακα αναφέρονται αναλυτικά τα αποτελέσματα της λύσης των Rodriguez – Iturbe *et al.* (1987 β) για τις δημοσιευμένες τιμές των μεταβλητών απόφασης.

	h = 1			h = 6		
	E[Y]	Var[Y]	Cov[Y]	E[Y]	Var[Y]	Cov[Y]
Αποτελέσματα βελτιστοποίησης :	0,0885	0,4093	0,2045	0,5310	6,0510	1,9634
Πραγματικά μεγέθη * :	(0,0885)	(0,4030)	(0,1934)	(0,5313)	(5,9702)	(1,9809)
Απόκλιση (%) :	0,01%	1,56%	5,72%	-0,05%	1,35%	-0,88%
	h = 12			h = 24		
	E[Y]	Var[Y]	Cov[Y]	E[Y]	Var[Y]	Cov[Y]
Αποτελέσματα βελτιστοποίησης :	1,0621	16,0288	4,2401	2,1241	40,5377	6,6160
Πραγματικά μεγέθη * :	(1,0626)	(16,8829)	(3,8848)	(2,1252)	(41,6067)	(6,5364)
Απόκλιση (%) :	-0,05%	-5,06%	9,15%	-0,05%	-2,57%	1,22%

\* Πραγματικά μεγέθη: Σύμφωνα με Πίνακα 1 (Rodriguez – Iturbe *et al.*, 1987 α, σελ. 9646)

Πίνακας Π Ι – 1γ Συγκριτικά αποτελέσματα διαδικασίας βελτιστοποίησης για το μοντέλο BLRPM (Βέλτιστες τιμές μεταβλητών απόφασης, σύμφωνα με τους Rodriguez – Iturbe *et al.*, 1987 β)

## Π Ι - 2 Αναπαραγωγή δημοσιευμένων αποτελεσμάτων για το μοντέλο BLRPM

Στην ανάλυση, που ακολουθεί, επιχειρείται μια πρόχειρη επιβεβαίωση των αποτελεσμάτων των Rodriguez – Iturbe *et al.* Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιήθηκε ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης του XL (GRG, Generalized Reduced Gradient Method). Συνολικά, διεξήχθησαν 5500 δοκιμές με

τυχαία αρχικά σημεία από την ομοιόμορφη κατανομή. Στις πρώτες 1000 δοκιμές τα τυχαία σημεία εκκίνησης ελήφθησαν στο διάστημα  $(0, 10]$ , στις επόμενες 1500 δοκιμές, στο διάστημα  $(0, 15]$  και στις τελευταίες 3000 δοκιμές τα τυχαία σημεία εκκίνησης ελήφθησαν στο διάστημα  $(0, 20]$ . Πρακτικά, ο αριθμός των δοκιμών για τα υπό εξέταση διαστήματα τιμών αντιστοιχεί σε μια ικανοποιητική πυκνότητα σημείων ανά άξονα, τουλάχιστον ίση με 100 (η πυκνότητα αυτή μπορεί, ωστόσο, να αποδειχθεί ανεπαρκής ή πλασματική, ιδωμένη ως σύνολο σημείων στον, πέντε διαστάσεων, χώρο έρευνας).

Παρά το ότι ο κλασικός αλγόριθμος Davidson-Fletcher-Powell (DFP), ο οποίος χρησιμοποιήθηκε από τους Rodriguez – Iturbe *et al.* (1987 β) αποτελεί ένα από τους ισχυρότερους NLP αλγόριθμους, ο αλγόριθμος GRG (Generalized Reduced Gradient) θεωρείται περισσότερο αποτελεσματικός (σχετικές αναφορές έχουν γίνει από τους Edgar & Himmelblau, 1988 και Reklaitis *et al.*, 1983).

Τα σχετικά αποτελέσματα, που προέκυψαν από την εφαρμογή του αλγορίθμου GRG δίνονται στον πίνακα, που ακολουθεί:

	h = 1			h = 6		
	E[Y]	Var[Y]	Cov[Y]	E[Y]	Var[Y]	Cov[Y]
Αποτελέσματα βελτιστοποίησης :	0,0885	0,4101	0,1989	0,5312	5,9973	1,9661
Πραγματικά μεγέθη :	(0,0885)	(0,4030)	(0,1934)	(0,5313)	(5,9702)	(1,9809)
Απόκλιση (%) :	0,03%	1,75%	2,80%	-0,03%	0,45%	-0,75%
	h = 12			h = 24		
	E[Y]	Var[Y]	Cov[Y]	E[Y]	Var[Y]	Cov[Y]
Αποτελέσματα βελτιστοποίησης :	1,0623	15,9270	4,1650	2,1246	40,1838	6,3047
Πραγματικά μεγέθη :	(1,0626)	(16,8829)	(3,8848)	(2,1252)	(41,6067)	(6,5364)
Απόκλιση (%) :	-0,03%	-5,66%	7,21%	-0,03%	-3,42%	-3,54%

Πίνακας Π I – 2α : Συγκριτικά αποτελέσματα διαδικασίας βελτιστοποίησης για το μοντέλο BLRPM (Βελτιστοποίηση με χρήση του αλγορίθμου GRG – XL Solver)

Οι τιμές των μεταβλητών απόφασης και η εκατοστιαία απόκλισή τους, σε σχέση με τις βέλτιστες αναφερόμενες από τους Rodriguez – Iturbe *et al.* (1987 β) τιμές, έχουν ως εξής:

	$\mu_c$	$\mu_x = E[X]$	$\beta$	$\lambda$	n
Αλγόριθμος DFP - Rodriguez – Iturbe <i>et al.</i> (1987 β) :	6,33100	2,98560	0,60000	0,00796	1,70000
Αλγόριθμος GRG :	6,61037	3,05990	0,67018	0,00809	1,84837
Μεταβολή (%) :	4,413%	2,488%	11,697%	1,628%	8,728%

Πίνακας Π I – 2β : Τιμές των μεταβλητών απόφασης και συγκριτικά αποτελέσματα (Βελτιστοποίηση με χρήση του αλγορίθμου GRG – XL Solver)

Στον παραπάνω πίνακα παρατηρείται μία εγγύτητα των δύο λύσεων, γεγονός που ενισχύει την αρχική λογική υπόθεση, συμμετοχής δώδεκα συνολικά στατιστικών μεγεθών (μέσης τιμής, διασποράς και αυτοσυνδιασποράς 1<sup>ης</sup> τάξης) στην κατάσταση της αντικειμενικής συνάρτησης. Οι εκατοστιαίες αποκλίσεις των θεωρητικών από τα πραγματικά στατιστικά μεγέθη για τις δύο βέλτιστες λύσεις, την προτεινόμενη από τους Rodriguez – Iturbe *et al.* (1987 β) και την ευρεθείσα με χρήση του αλγορίθμου GRG, δίνονται συγκεντρωτικά στον παρακάτω πίνακα:



	h = 1			h = 6		
	E[Y]	Var[Y]	Cov[Y]	E[Y]	Var[Y]	Cov[Y]
Rodriguez – Iturbe <i>et al.</i> (1987 β) :	0,01%	1,56%	5,72%	-0,05%	1,35%	-0,88%
Αλγόριθμος GRG :	0,03%	1,75%	2,80%	-0,03%	0,45%	-0,75%

	h = 12			h = 24		
	E[Y]	Var[Y]	Cov[Y]	E[Y]	Var[Y]	Cov[Y]
Rodriguez – Iturbe <i>et al.</i> (1987 β) :	-0,05%	-5,06%	9,15%	-0,05%	-2,57%	1,22%
Αλγόριθμος GRG :	-0,03%	-5,66%	7,21%	-0,03%	-3,42%	-3,54%

Πίνακας Π I – 2γ : Εκατοστιαίες αποκλίσεις για τις δύο βέλτιστες λύσεις

Η μέση τιμή των απολύτων μεγεθών των εκατοστιαίων αποκλίσεων για την περίπτωση της λύσης των Rodriguez – Iturbe *et al.* (1987 β) είναι της τάξεως του 2,306%, ενώ για την περίπτωση του GRG αλγορίθμου βελτιστοποίησης είναι της τάξεως του 2,141%. Η τιμή αυτή αντιστοιχεί σε μία βελτίωση κατά 7,16%. Το γεγονός αυτό αποδεικνύει την υπεροχή της δεύτερης λύσης.

Το μαθηματικό μοντέλο βελτιστοποίησης, που χρησιμοποιήθηκε (αντικειμενική συνάρτηση και ανισωτικοί περιορισμοί) έχει ως εξής:

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^{12} \left[ 100(\theta_i - \pi_i) / \pi_i \right]^2 \right\}$$

$$\mu_c > 1$$

$$\left\{ \left( \frac{\beta}{\mu_c - 1} \right) - n \right\}^2 > 0$$

$$\beta, \mu_c, \lambda, n > 0$$

Π I – 2.1

$\theta_i$  : οι θεωρητικές τιμές των υπό εξέταση στατιστικών μεγεθών  
 $\pi_i$  : οι πραγματικές τιμές των υπό εξέταση στατιστικών μεγεθών

Στο σημείο αυτό κρίνεται σκόπιμη μια πρόχειρη αναφορά στην ευαισθησία των παραμέτρων του μοντέλου BLRPM. Στην παρούσα φάση και για το κλασικό μοντέλο Bartlett – Lewis δεν κρίνεται σκόπιμη η πραγματοποίηση μιας διεξοδικής ανάλυσης ευαισθησίας. Εξετάζονται ωστόσο δύο σενάρια: το πρώτο αφορά στο μήκος της χρησιμοποιούμενης ιστορικής χρονοσειράς, ενώ το δεύτερο αφορά στον αριθμό των συναθροισμένων χρονοσειρών, που λαμβάνονται υπόψιν.

Σενάριο 1<sup>ο</sup>: Επίπτωση του μήκους της ιστορικής χρονοσειράς στις τιμές των παραμέτρων

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, οι Rodriguez – Iturbe *et al.* στηρίχτηκαν την ανάλυση μιας ιστορικής χρονοσειράς 32 ετών (1945 – 1976) για την περίοδο 15-05 έως 16-06. Τα στατιστικά μεγέθη της ίδιας χρονοσειράς διαφοροποιούνται σε αξιολογικό βαθμό, εάν αγνοηθούν τα πρώτα τέσσερα έτη (η σχετική επιλογή των παραλειπομένων ετών έγινε τυχαία). Ενδεικτικά αποτελέσματα δίνονται στον παρακάτω πίνακα, για την ωριαία κλίμακα και μία στάθμη συνάθροισης (ημερήσια):

	h = 1 h			h = 24 h		
	E[Y]	Var[Y]	Cov[Y] <sup>1</sup>	E[Y]	Var[Y]	Cov[Y] <sup>1</sup>
1945 – 1976	0,0885	0,4030	0,1934	2,1252	41,6067	6,5365
1949 - 1976	0,0902	0,4290	0,1732	2,1656	43,0423	6,7217
Απόκλιση (%)	1,92%	6,45%	-10,44%	1,90%	3,45%	2,83%

Πίνακας Π Ι – 2δ : Στατιστικά μεγέθη για διαφορετικά μήκη της ίδιας χρονοσειράς

Οι παραπάνω αποκλίσεις είναι ικανές να τροποποιήσουν δραστικά τις τιμές των παραμέτρων του μοντέλου Bartlett – Lewis. Η διαδικασία βελτιστοποίησης επαναλήφθηκε σύμφωνα με τα νέα δεδομένα της μικρότερης χρονοσειράς (1949 – 1976). Η μέση τιμή των απολύτων μεγεθών των εκατοστιαίων αποκλίσεων για την περίπτωση της λύσης του GRG αλγορίθμου βελτιστοποίησης και για την περίοδο 1949 – 1976 είναι της τάξεως του 1,35%. Τα σχετικά αποτελέσματα – τιμές των μεταβλητών απόφασης - διαμορφώθηκαν ως εξής:

	$\mu_c$	$\mu_x = E[X]$	$\beta$	$\lambda$	n
Αλγόριθμος DFP (1945 – 1976) Rodriguez – Iturbe <i>et al.</i> (1987 β)	6,33100	2,98560	0,60000	0,00796	1,70000
Αλγόριθμος GRG (1945 – 1976)	6,61037	3,05990	0,67018	0,00809	1,84837
Αλγόριθμος GRG (1949 – 1976)	10,20537	4,12491	1,28981	0,00755	3,52347
Μεταβολή (%) – Συγκριτικά με DFP	61,20%	38,16%	114,97%	-5,15%	107,26%

Πίνακας Π Ι – 2ε : Παράμετροι του μοντέλου BLRPM για διαφορετικά μήκη της ιστορικής χρονοσειράς

Είναι σαφές το ότι σε κάθε περίπτωση κρίνεται απαραίτητη η χρήση όλων των διαθέσιμων αξιόπιστων ιστορικών δεδομένων – μετρήσεων και συνεπώς, στην πραγματικότητα δεν υφίσταται κανένας λόγος παράλειψης μέρους αυτών (όπως έγινε στην προηγούμενη περίπτωση με την παράλειψη των τεσσάρων πρώτων ετών). Ωστόσο, οι παρατηρούμενες μεγάλες διαφοροποιήσεις των παραμέτρων συνδέουν άρρηκτα τις τιμές τους με το μήκος της χρονοσειράς (για την προαναφερόμενη περίπτωση, θα μπορούσε να υποθεθεί πως τα δεδομένα της τετραετίας 1945-1948 δεν υπάρχουν).

Σενάριο 2<sup>ο</sup>: Επίπτωση του αριθμού των συναθροισμένων χρονοσειρών στις τιμές των παραμέτρων

Ένα επιπλέον σενάριο, το οποίο κρίνεται σκόπιμο να εξεταστεί, είναι η περίπτωση κατά την οποία αγνοείται η συναθροισμένη χρονοσειρά των 6 h. Κατά αυτό τον τρόπο, η διαδικασία βελτιστοποίησης λαμβάνει υπόψιν τη μέση τιμή, τη διασπορά και τη αυτοσυνδιασπορά 1<sup>ης</sup> τάξεως της ωριαίας ιστορικής χρονοσειράς και των δύο συναθροισμένων χρονοσειρών 12 και 24 h. Τα σχετικά αποτελέσματα έχουν ως εξής:

$\lambda$	0,00812	$h^{-1}$
n	1,81760	$h^{-1}$
$E[X] = \mu_x$	3,07100	mm/h
$\beta$	0,63871	$h^{-1}$
$E[C] = \mu_c$	6,44806	

Πίνακας Π Ι – 2στ : Αποτελέσματα διαδικασίας βελτιστοποίησης για τις χρονοσειρές 1, 12 και 24 h

	$\mu_c$	$\mu_x = E[X]$	$\beta$	$\lambda$	$n$
Αλγόριθμος GRG (χρονοσειρές 1, 6, 12 & 24 h) :	6,61037	3,05990	0,67018	0,00809	1,84837
Αλγόριθμος GRG (χρονοσειρές 1, 12 & 24 h) :	6,44806	3,07100	0,63871	0,00812	1,81760
Μεταβολή (%) :	-2,46%	0,36%	-4,70%	0,37%	-1,66%

Πίνακας Π Ι – 2ζ : Συγκριτικά αποτελέσματα βελτιστοποίησης με και χωρίς τη χρονοσειρά 6 h

Για τη συναθροισμένη χρονοσειρά των 6 h, και επί τη βάσει των παραπάνω παραμέτρων, τα τρία βασικά στατιστικά μεγέθη διαμορφώνονται ως εξής:

	h = 24 h		
	E[Y]	Var[Y]	Cov[Y] <sup>1</sup>
Πραγματικά μεγέθη :	0,5313	5,9702	1,9809
Θεωρητικά μεγέθη :	0,5311	5,9910	1,9432
Απόκλιση (%) :	-0,04%	0,35%	-1,90%

Πίνακας Π Ι – 2η : Στατιστικά μεγέθη συναθροισμένης χρονοσειράς 6 h

Η μεταβολή στις τιμές των παραμέτρων του μοντέλου κρίνεται ως μη σημαντική, ενώ τα πραγματικά στατιστικά χαρακτηριστικά της μη συμμετέχουσας χρονοσειράς των 6 h, παρουσιάζουν αξιόλογη εγγύτητα, σε σχέση με τα προσομοιωμένα μεγέθη.

## Παράρτημα II: Ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης προσομοιωμένης απόπτωσης (Simulated annealing, SA)

### Π II - 1 Εισαγωγή

Ο αλγόριθμος προσομοιωμένης απόπτωσης (simulated annealing algorithm, SA) αποτελεί ένα αλγόριθμο βελτιστοποίησης πιθανοτικής (probabilistic) αποδοχής των τιμών της αντικειμενικής συνάρτησης. Η λειτουργία του επιτρέπει την συστηματική αποδοχή κινήσεων των μεταβλητών επίλυσης, προς κατευθύνσεις, που δε βελτιώνουν υποχρεωτικά τις τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης. Η αποδοχή των κινήσεων αυτών στηρίζεται, αφενός μεν, στη χρήση τυχαίων αριθμών με ομοιόμορφη συνάρτηση κατανομής στο διάστημα  $[0, 1)$ , αφετέρου στην εισαγωγή μίας παραμέτρου ελέγχου,  $T$ , η οποία καλείται «θερμοκρασία» (temperature). Η θεωρητική διατύπωση του αλγόριθμου SA έχει επαρκώς τεκμηριωθεί για προβλήματα διακριτών μεταβλητών επίλυσης (discrete variable – combinatorial - optimization), ενώ παράλληλα, έχουν προταθεί αρκετές μέθοδοι εφαρμογής του σε προβλήματα συνεχών (μη διακριτών) μεταβλητών.

Αν η  $f(\mathbf{x})$  αποτελεί μία αποδεκτή τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης,  $f$ , για τιμές των μεταβλητών επίλυσης,  $\mathbf{x} := x_1, x_2, \dots, x_n$ , όπου ο ακέραιος δείκτης,  $n$ , συμπίπτει με τον αριθμό των διαστάσεων του προβλήματος βελτιστοποίησης, τότε η λύση,  $f(\mathbf{x}')$ , όπου,  $\mathbf{x}' := x_1 + \delta x_1, x_2 + \delta x_2, \dots, x_n + \delta x_n$ , γίνεται αποδεκτή ή απορρίπτεται σύμφωνα με την παρακάτω μεθοδολογία:

Αν  $f(\mathbf{x}') < f(\mathbf{x})$ , τότε η κίνηση,  $\mathbf{x}' := x_1 + \delta x_1, x_2 + \delta x_2, \dots, x_n + \delta x_n$ , γίνεται αποδεκτή.

Αν  $f(\mathbf{x}') > f(\mathbf{x})$  και  $e^{[-f(\mathbf{x}') + f(\mathbf{x})] / T} > q$ , τότε η κίνηση,  $\mathbf{x}'$ , γίνεται επίσης αποδεκτή.

Η μεταβλητή,  $q$ , αποτελεί μία τυχαία μεταβλητή από την ομοιόμορφη κατανομή και για το διάστημα  $[0, 1)$ .

Το κριτήριο  $e^{[-f(\mathbf{x}') + f(\mathbf{x})] / T} > q$  είναι γνωστό ως κριτήριο Metropolis και εκφράζει την πιθανότητα αποδοχής μίας νέας κίνησης,  $\mathbf{x}'$ , σε σχέση με την αμέσως προηγούμενη,  $\mathbf{x}$ . Σύμφωνα με το αυτό κριτήριο, είναι εφικτή η αποδοχή κινήσεων, που δε βελτιώνουν, κατ' ανάγκη, την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Η πιθανότητα αυτή αποδοχής, ελέγχεται και σταδιακά μειώνεται, μέσω της παραμέτρου ελέγχου,  $T$  (θερμοκρασίας). Τα μεγέθη,  $\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_n$ , ορίζουν το μητρώο διαταραχών,  $\delta \mathbf{x}$ , και προκύπτουν με ένα συστηματικό τρόπο, σε σχέση με την ακριβώς προηγούμενη αποδεκτή κίνηση. Ο χαρακτήρας του αλγόριθμου είναι μαρκοβιανός και, συνεπώς, στερείται οποιασδήποτε δυνατότητας μνήμης της καλύτερης κίνησης.

Η αρχική εισαγωγή και τεκμηρίωση της μεθοδολογίας του αλγόριθμου SA (Kirkpatrick *et al.*, 1983) αφορούσε προβλήματα διακριτών (μη-συνεχών) μεταβλητών επίλυσης. Ακόλουθες εργασίες, κυρίως των van Laarhoven και Aarts, προσπάθησαν να δώσουν λύσεις στο ερώτημα του ακριβή, συστηματικού, τρόπου μείωσης της θερμοκρασίας,  $T$ , με απώτερο στόχο την επιτάχυνση του αλγόριθμου βελτιστοποίησης και τη μείωση του υπολογιστικού φόρτου. Οι σχετικές, πιο δημοφιλείς, προτεινόμενες εξισώσεις έχουν ημι-εμπειρικό χαρακτήρα. Παράλληλα, διερευνήθηκε η πιθανή εφαρμογή του αλγόριθμου σε προβλήματα συνεχών μεταβλητών. Οι σχετικές προτεινόμενες μέθοδοι μπορούν να χωριστούν σε δύο βασικές κατηγορίες: στην πρώτη βρίσκονται οι μέθοδοι, που αυτοτελώς, διατηρούν όλα τα εγγενή χαρακτηριστικά του αρχικώς διατυπωμένου, αλγόριθμου SA. Στη δεύτερη κατηγορία, ανήκουν οι υβριδικές μέθοδοι, συνδυασμού του αλγόριθμου SA και μίας δεύτερης κλασσικής, υπό την έννοια της αποδοχής μόνο των τιμών, που βελτιώνουν την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, μεθόδου βελτιστοποίησης.

Η προσπάθεια αυτή επανέφερε στο προσκήνιο τις παλαιότερες μεθόδους βελτιστοποίησης «απευθείας έρευνας» (direct search), με κυριότερη από αυτές τη μέθοδο απλόκου (Simplex). Από το συνδυασμό των μεθόδων απλόκου και SA, προέκυψε ένας νέος υβριδικός αλγόριθμος βελτιστοποίησης, ο αλγόριθμος προσομοιωμένης απόπτωσης - απλόκου (simulated annealing – simplex algorithm). Ο αλγόριθμος αυτός απέδωσε πολύ ικανοποιητικά αποτελέσματα και αποτελεί μία από τις πιο δημοφιλείς επιλογές, της κατηγορίας των συνδυαστικών – υβριδικών αλγόριθμων SA.

## Π II - 2 Αντικείμενο της εργασίας - Σχολιασμός

Απώτερος στόχος της εφαρμογής του προτεινόμενου αλγόριθμου, αποτελεί η εφαρμογή του στο πρόβλημα προσδιορισμού των βέλτιστων παραμέτρων του τροποποιημένου τυχαίου μοντέλου Bartlett – Lewis. Η μη αναλυτική διατύπωση μέρους των εξισώσεων του μοντέλου και η πολυπλοκότητα του συνόλου των εξισώσεων υποδεικνύουν τη χρήση ενός ισχυρού αλγόριθμου «απευθείας έρευνας» (direct search). Οι αλγόριθμοι αυτού του είδους χρησιμοποιούν μόνο τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης, χωρίς τη χρήση παραγώγων.

Δεδομένης της συστηματικής διερεύνησης και εξέτασης υβριδικών SA (κυρίως του υβριδικού αλγόριθμου προσομοιωμένης απόπτωσης – απλόκου) και γενετικών αλγόριθμων βελτιστοποίησης από τον τομέα Υδατικών Πόρων, αποφασίστηκε η διερεύνηση εφαρμογής ενός εναλλακτικού SA αλγόριθμου βελτιστοποίησης. Απώτερος στόχος ήταν η μείωση των απαιτούμενων παραμέτρων του αλγόριθμου βελτιστοποίησης και η αντιμετώπιση των προβλημάτων, που απορρέουν από την αναγκαιότητα της ρύθμισής τους.

Υπό αυτό το πλαίσιο, εξετάστηκε η μέθοδος των Vanderbilt και Louie (1983). Εν συνεχεία, τροποποιήθηκε, προς την κατεύθυνση εγκατάλειψης του μαρκοβιανού χαρακτήρα της. Η προσπάθεια κατέληξε σε ένα νέο τροποποιημένο αλγόριθμο βελτιστοποίησης, ο οποίος βασίζεται στην παραγωγή ομαδοποιημένων κινήσεων.

Η εξαντλητική εξέταση των δυνατοτήτων του νέου αλγόριθμου θεωρείται εκτός των χρονικών πλαισίων αυτής της διπλωματικής εργασίας. Ο νέος αλγόριθμος εξετάστηκε σε προβλήματα διαστάσεων μικρότερων ή ίσων του έξι και η αποτελεσματικότητά του κρίθηκε επαρκώς ικανοποιητική (σχετικές αναφορές ακολουθούν). Στην εξέταση Rozenbrock απέδωσε ποσοστά επιτυχίας άνω του 90%. Ο περιορισμός των υπό εξέταση προβλημάτων στις έξι διαστάσεις απορρέει από την εξέταση του συγκεκριμένου προβλήματος βελτιστοποίησης, του τροποποιημένου, δηλαδή, τυχαίου μοντέλου Bartlett – Lewis, το οποίο και αντιστοιχεί στον προαναφερόμενο αριθμό διαστάσεων.

Η νέα, υπό εξέταση, μέθοδος βελτιστοποίησης χρησιμοποιεί ένα κεντροβαρικό σύστημα ανάπτυξης κινήσεων, που προσομοιάζει, ως ένα βαθμό, τα χαρακτηριστικά του αμιγώς Μαρκοβιανού μηχανισμού. Παράλληλα, επιτρέπει την εισαγωγή ενός συντελεστή βάρους, ο οποίος και αποτελεί μνήμη της διεργασίας ως προς την καλύτερη κίνησή της. Η αναγκαιότητα εξέτασης ενός νέου τροποποιημένου μοντέλου βελτιστοποίησης βασίζεται στις παρακάτω πρακτικές παραμέτρους.

1. Η νέα μέθοδος αποτελεί μία εναλλακτική των υβριδικών αλγόριθμων απόπτωσης – απλόκου (simulated annealing – simplex) εξεταζόμενη προσέγγιση του προβλήματος της βελτιστοποίησης συναρτήσεων συνεχών μεταβλητών. Συνεπώς, η εγκατάλειψη του κλασσικού Μαρκοβιανού μοντέλου παραγωγής κινήσεων δεν αποτελεί ανασταλτικό παράγοντα για την εξέταση μιας νέας μεθόδου.
2. Η επιτυχία του κλασσικού αλγόριθμου προσομοιωμένης απόπτωσης, στην εξεύρεση του ολικά βέλτιστου σημείου, είναι επαρκώς θεωρητικά τεκμηριωμένη μόνο για την περίπτωση του προβλήματος διακριτών μεταβλητών και κάτω από συγκεκριμένες προϋποθέσεις (van Laarhoven και Aarts, 1989).
3. Από τη φύση του, το Μαρκοβιανό μοντέλο δε διατηρεί καμία μνήμη των προηγούμενων κινήσεων. Ακόμα και αν η κλασσική μέθοδος επιτύχει στην εξεύρεση του ολικά βέλτιστου σημείου, ενέχει πάντα την πιθανότητα παράκαμψης του στα πρώιμα στάδια της διαδικασίας βελτιστοποίησης. Παράλληλα, και σε σχέση με τη μέθοδο των Vanderbilt και Louie (1983), οι νέες διαταραχές διατηρούν την ανισοτροπία του γενεσιουργού τους χώρου. Ωστόσο, η νέα μαρκοβιανή αλυσίδα μπορεί να επεκταθεί ανεξέλεγκτα, μονομερώς ή ισομερώς, κατά τις δύο πιθανές κατευθύνσεις κάθε ιδιοδιανύσματος. Συνεπώς, η αποτελεσματικότητα της κλασσικής μεθόδου είναι δυνατό να αντισταθμιστεί από υψηλό υπολογιστικό φόρτο.

Πιο αναλυτικά, και όσον αφορά καθένα από τα προαναφερόμενα σημεία,

1. Οι συνδυαστικοί αλγόριθμοι ανόπτησης – απλόκου (simulated annealing – simplex) θεωρούνται γενικά επιτυχείς. Ωστόσο, το κυριότερο μειονέκτημά τους είναι η δυσχέρεια τεκμηριωμένης παραμετροποίησης. Αν η παραμετροποίηση του αμιγώς αλγόριθμου προσομοιωμένης ανόπτησης είναι ήδη περίπλοκη και τις περισσότερες φορές υπό πειραματική διερεύνηση, η εισαγωγή νέων παραμέτρων λόγω της μεθόδου απλόκου, περιπλέκει ακόμα περισσότερο το νέο υβριδικό μηχανισμό παραγωγής διαταραχών,  $\delta\mathbf{x}$ . Οι σχετικές με το ζήτημα αυτό δημοσιεύσεις, προτείνουν συγκεκριμένους τρόπους συνδυασμού των παραμέτρων και των δύο μεθόδων. Ωστόσο, δεν είναι ακόμα εμφανής μία γενικά αποδεκτή μεθοδολογία επίλυσης του προβλήματος αυτού.

Η λειτουργία της μεθόδου απλόκου στους αλγόριθμους αυτούς είναι απλή. Δεδομένης της εξέτασης του προβλήματος βελτιστοποίησης συναρτήσεων συνεχών μεταβλητών, η χρήση ενός συστηματικού τρόπου παραγωγής κινήσεων αποτελεί αναγκαιότητα. Οι διαταραχές,  $\delta\mathbf{x}$ , καλούνται να καλύψουν έναν ομοιογενή χώρο,  $n$ , διαστάσεων, εν αντιθέσει με την πραγματοποίηση κινήσεων πάνω σε ένα πλέγμα διακριτών τιμών,  $n$ , διαστάσεων.

Όπως θα αναφερθεί εκτενώς σε επόμενη παράγραφο, δύο είναι τα βασικά ερωτήματα, που χρήζουν απάντησης. Το πρώτο αφορά την κατεύθυνση των διαταραχών,  $\delta\mathbf{x}$ , ενώ το δεύτερο αφορά το μέγεθός τους. Και στα δύο αυτά ερωτήματα, η μέθοδος απλόκου παρέχει επαρκείς απαντήσεις. Συνεπώς, η χρησιμότητα της μεθόδου απλόκου έγκειται ακριβώς στην υιοθέτηση ενός συστηματικού τρόπου πραγματοποίησης κινήσεων. Αυτό είναι και το πρωτεύον χαρακτηριστικό των υβριδικών αλγορίθμων προσομοιωμένης ανόπτησης – απλόκου.

Υπό αυτή την έννοια, θεωρητικά θα μπορούσαν στο μέλλον να εξεταστούν και άλλες μέθοδοι απευθείας αναζήτησης (direct search) βελτιστοποίησης για την παραγωγή παρεμφερών υβριδικών αλγορίθμων. Η μέθοδος απλόκου, ωστόσο, στην προτεινόμενη από τους Nelder & Mead εκδοχή της (Nelder, J. A., and R. Mead, “A Simplex Method for Function Minimization”, *Computer J.*, 7, 308-313, 1965) παρέχει μια μεγαλύτερη ευχέρεια στην διερεύνηση συναρτήσεων βεβαρημένης τοπογραφίας. Ως εναλλακτική μέθοδος απευθείας αναζήτησης (direct search) θα μπορούσε επίσης να εξεταστεί η Hooke-Jeeves Pattern Search Method, καθώς και η Powell’s Conjugate Direction Method.

Ο υβριδικός αλγόριθμος προσομοιωμένης ανόπτησης – απλόκου δεν είναι συνεπής ως προς το κλασσικό Μαρκοβιανό μοντέλο της στοχαστικής μεθόδου SA. Συνεπώς, δεν ικανοποιείται η πρόταση,

$$P ( X_t = j | X_0 = I_0, X_1 = i_1, \dots, X_{t-1} = i_{t-1} ) = P ( X_t = j | X_{t-1} = i_{t-1} ) \quad \Pi \text{ II} - 1.1$$

2. Ο κλασσικός αλγόριθμος προσομοιωμένης ανόπτησης συγκλίνει στο ολικά βέλτιστο σημείο με μοναδιαία πιθανότητα, για θεωρητικά άπειρο αριθμό διαδοχικών μαρκοβιανών αλυσίδων, κάθε μία εκ των οποίων αποτελείται από άπειρες διαταραχές και για τιμή της παραμέτρου ελέγχου συνεχώς ελαττούμενη με κατώτερο όριο το μηδέν. Η πρόταση αυτή είναι σχεδόν αυταπόδεικτη. Ο αλγόριθμος πρακτικά θεωρείται πως τείνει ασυμπτωτικά προς τη μοναδιαία πιθανότητα εξεύρεσης του ολικά βέλτιστου σημείου, κάτω από συγκεκριμένες προϋποθέσεις πραγματοποίησης του μηχανισμού παραγωγής κινήσεων και του μηχανισμού απόρριψης ποσοστού αυτών. Συνεπώς, η φύση του αλγόριθμου είναι, όπως είναι επόμενο, υπό προϋποθέσεις προσεγγιστική.

Ο μαρκοβιανός χαρακτήρας του αλγόριθμου εξασφαλίζει τη μετατροπή των NP (NP -hard) προβλημάτων σε P. Σε προβλήματα, δηλαδή, των οποίων η επίλυση μπορεί να πραγματοποιηθεί στα πλαίσια ενός πολυωνυμικού, ως προς τον αριθμό των μεταβλητών, χρόνου. Το χαρακτηριστικό αυτό σε συνδυασμό με τη επαρκή θεωρητική αιτιολόγηση της συμπεριφοράς του αλγόριθμου, συντελεί στη γενικότερη αποδοχή της μεθόδου.

3. Η μέθοδος των Vanderbilt και Louie (1983) σχετικά με το πρόβλημα βελτιστοποίησης συναρτήσεων συνεχών μεταβλητών, προτείνει έναν επαρκή και θεωρητικά τεκμηριωμένο μηχανισμό παραγωγής κινήσεων, στα πλαίσια του Μαρκοβιανού μοντέλου της μεθόδου. Συνεπώς, η μέθοδος αυτή μπορεί να θεωρηθεί ως εναλλακτική των υβριδικών μεθόδων προσομοιωμένης απόπτησης - απλόκου.

Ως πιο συνεπής στις αρχές της κλασσικής μεθόδου, η θεωρητική της τεκμηρίωση καθιστά πιο ευχερή την παραμετροποίηση των υπό εξέταση προβλημάτων. Ο αριθμός των ρυθμιζόμενων παραμέτρων δεν αυξάνεται, ενώ αποφεύγεται η χρήση επιπρόσθετων εμπειρικών ή ημιεμπειρικών κανόνων παραμετροποίησης. Υπό αυτή την έννοια, η μέθοδος των Vanderbilt και Louie (1983) μπορεί να θεωρηθεί ως πιο γενικευμένη, συγκριτικά με τους συνδυαστικούς αλγόριθμους προσομοιωμένης απόπτησης - απλόκου .

Ο μαρκοβιανός χαρακτήρας της μεθόδου και η απουσία μνήμης δημιουργεί την υποψία βεβαρημένου υπολογιστικού φόρτου. Μια πιθανή απόκλιση από το μαρκοβιανό χαρακτήρα της διαδικασίας θα μπορούσε, ενδεχομένως, να επιταχύνει σημαντικά το χρόνο έρευνας. Αυτό είναι και το αντικείμενο διερεύνησης της ενότητας αυτής.

Πιο συγκεκριμένα, η μέθοδος των Vanderbilt και Louie (1983) τροποποιείται σε ένα κεντροβαρικό, «δενδρικό» σύστημα ανάπτυξης κινήσεων. Ένας συντελεστής βάρους εξασφαλίζει μια ελεγχόμενη μνήμη στη διαδικασία βελτιστοποίησης.

### **Π II - 3 Η μέθοδος προσομοιωμένης απόπτησης (simulated annealing) των Vanderbilt και Louie (1983)**

Σύμφωνα με τους Van Laarhoven και Aarts (1989), η μέθοδος αυτή αποτελούσε τουλάχιστον μέχρι το 1989, την πιο θεωρητικά τεκμηριωμένη και ολοκληρωμένη μέθοδο εφαρμογής του αλγόριθμου προσομοιωμένης απόπτησης στην περίπτωση του συνεχούς προβλήματος μη διακριτών μεταβλητών. Οι Vanderbilt και Louie (1983) ασχολήθηκαν με το πρόβλημα εξεύρεσης ενός συστηματικού τρόπου παραγωγής νέων σημείων σε κάθε επαναληπτικό, υπό νέα τιμή της παραμέτρου ελέγχου, στάδιο επιλογής κινήσεων. Πιο συγκεκριμένα, προβληματίστηκαν πάνω στα δύο βασικά ερωτήματα του μηχανισμού παραγωγής σημείων: το πρώτο αφορά στην κατεύθυνσή των διαταραχών, ενώ το δεύτερο ερώτημα αφορά στο μέγεθός τους,  $\delta x$ .

Μικρές σε μέγεθος διαταραχές αποδεικνύονται ανεπαρκείς στην κάλυψη του επιθυμητού πεδίου τιμών, ενώ μεγάλο ποσοστό των κινήσεων γίνονται αποδεκτές. Η διαδικασία επιβραδύνεται και καθώς η παράμετρος ελέγχου («θερμοκρασία») μειώνεται, ο αλγόριθμος τείνει τελικά να παγιδευτεί σε κάποιο τοπικό ακρότατο. Μεγάλες σε μέγεθος διαταραχές οδηγούν σε μειωμένα ποσοστά των αποδεκτών κινήσεων και γενικότερα σε ένα ανώμαλο μη συστηματικό τρόπο έρευνας, κατά τον οποίο το ολικό βέλτιστο σημείο μπορεί να παρακαμφθεί ή κοντά στο βέλτιστο ευρεθέντα σημεία να αδυνατούν να δημιουργήσουν αποδεκτές κινήσεις βελτίωσης της αντικειμενικής συνάρτησης.

Η μέθοδος των Vanderbilt και Louie (1983) προσδιορίζει τόσο την κατεύθυνση, όσο και το μέγεθος των διαταραχών χρησιμοποιώντας την εμπειρία των αποδεκτών κινήσεων της αμέσως προηγούμενης επαναληπτικής διεργασίας. Το μοντέλο παραμένει Μαρκοβιανό ενώ ταυτόχρονα προτείνεται ένα αυτορυθμιζόμενο σύστημα παραγωγής διαταραχών, βασιζόμενο στις αποδεκτές κινήσεις του προέκυψαν από την προηγούμενη τιμή της θερμοκρασίας.

Η παραμορφωσιμότητα (ανισοτροπία) του χώρου των αποδεκτών κινήσεων εκφράζεται μέσω του σχετικού μητρώου συνδιασπορών για το σύνολο των,  $n$ , ανεξάρτητων μεταβλητών. Οι Vanderbilt και Louie (1983) υπέθεσαν σωστά πως το παραπάνω μητρώο από μόνο του παρέχει πολύτιμη πληροφόρηση για την επιθυμητή κατεύθυνση των επόμενων διαταραχών. Εφόσον λυθεί το πρώτο πρόβλημα της κατεύθυνσης των κινήσεων, το δεύτερο ερώτημα, που αφορά το μέγεθος των διαταραχών, μπορεί να απαντηθεί μέσω ενός μονοπαραμετρικού μοντέλου επέκτασης του ανισότροπου χώρου,  $\Omega$ , των προηγούμενων αποδεκτών κινήσεων. Απαιτείται συνεπώς η χρήση ενός συντελεστή επέκτασης,  $x_s$ .

Η ανισοτροπία του χώρου και ο συντελεστής επέκτασης, ο οποίος διατηρείται ενιαίος ως προς κάθε διάσταση, έχουν ως αποτέλεσμα την παραγωγή διαταραχών μεγαλύτερου μεγέθους προς τις επιθυμητές κατευθύνσεις και μικρότερου μεγέθους προς τις μη παραγωγικές. Το μέγεθος και η κατεύθυνση των διαταραχών επαναρυθμίζεται με την έναρξη κάθε νέας ομάδας υπολογισμών, σύμφωνα με το μητρώο συνδιασπορών των αποδεκτών κινήσεων της προηγούμενης ομάδας.

Η μέθοδος αυτή δεν αποτελεί υβρίδιο δύο μεθόδων. Ο αλγόριθμος διατηρεί τα εγγενή θεωρητικά χαρακτηριστικά του. Όπως θα αποδειχτεί στη συνέχεια, ο μηχανισμός παραγωγής διαταραχών είναι σχετικά απλός. Παράλληλα διατηρεί μια άκρως θεωρητική, από μαθηματική άποψη, υπόσταση, χωρίς την απαίτηση χρησιμοποίησης εμπειρικών κανόνων ή μεθόδων. Παράλληλα, ενέχει και μειονεκτήματα, κυρίως όσον αφορά στην εύρεση ενός μητρώου,  $\mathbf{Q}$ , το οποίο πολλαπλασιαζόμενο με το ανάστροφό του,  $\mathbf{Q}^T$ , θα ισούται με ένα, στατιστικά ορισμένο, τετραγωνικό, συμμετρικό μητρώο,  $\mathbf{s}$ .

Σε αυτή την περίπτωση απαιτείται το συμμετρικό τετραγωνικό μητρώο,  $\mathbf{s}$ , να είναι θετικά ορισμένο. Όσον αφορά σε αυτή την απαίτηση παρουσιάζονται προβλήματα, κατά ομολογία των Vanderbilt και Louie (1983), ιδιαίτερα σε συνδυασμό με τον αριθμό,  $N$ , των αποδεκτών σημείων και την εγγύτητα ως προς το βέλτιστο σημείο. Τα προβλήματα αυτά επιλύονται, είτε με την προσωρινή αύξηση του αριθμού των προσδιορισθέντων σημείων,  $N$ , είτε με τον περιορισμό των πληροφοριών, που κληρονομούνται από τη μία μετάβαση στην επόμενη. Στη διπλωματική αυτή εργασία επιλέχθηκε η πρώτη λύση λόγω απλότητας αλλά και δεδομένου του ότι αποδείχτηκε αξιόπιστη και μη ιδιαίτερα επιβαρυντική ως προς τον υπολογιστικό φόρτο, αλλά και ως προς τη θεωρητική υπόσταση της διαδικασίας.

Στην εργασία των Vanderbilt και Louie (1983) υιοθετήθηκε μια γεωμετρική μείωση της θερμοκρασίας, επί τη βάση ενός εμπειρικά, ανά περίπτωση, προσδιοριζόμενου μειωτικού συντελεστή. Όσον αφορά στην επιλογή του απαιτούμενου αριθμού προσδιορισθέντων σημείων,  $M$ , οι Vanderbilt και Louie (1983) προτείνουν ένα διαδεδομένο εμπειρικό κανόνα και συνδέουν τον αριθμό αυτό αποκλειστικά και μόνο με τις διαστάσεις του προβλήματος. Για αριθμό διαστάσεων μεγαλύτερο του οκτώ, επισημαίνουν την ανάγκη πειραματικού προσδιορισμού του πλήθους των απαιτούμενων σημείων,  $M$ .

Η μαθηματική τεκμηρίωση του αλγόριθμου έχει ως εξής:

Οι συντεταγμένες των αποδεκτών τιμών της αντικειμενικής συνάρτησης,  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , ορίζουν το μητρώο συνδιασπορών,  $\mathbf{S}$ :

$$\mathbf{S}^{(n)} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1n} \\ S_{21} & S_{22} & \dots & S_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_{n1} & S_{n2} & & S_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{var}(x_1) & \text{cov}(x_1, x_2) & \dots & \text{cov}(x_1, x_n) \\ \text{cov}(x_2, x_1) & \text{var}(x_2) & \dots & \text{cov}(x_2, x_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \text{cov}(x_n, x_1) & \text{cov}(x_n, x_2) & & \text{cov}(x_n, x_n) \end{bmatrix}, S_{ij} = S_{ji}, \quad \forall i \neq j$$

Ακολούθως, οι πληροφορίες που παρέχει το μητρώο συνδιασπορών επιχειρείται να μετατραπούν σε κινήσεις. Κάθε νέα ομάδα  $n$  διαταραχών, όπου,  $n$ , είναι ο αριθμός των διαστάσεων του προβλήματος, αντιστοιχείται σε ένα τετραγωνικό συμμετρικό μητρώο,  $\mathbf{s}$ . Η σύνδεση του μητρώου αυτού με το μητρώο συνδιασπορών,  $\mathbf{S}$ , γίνεται μέσω της εξίσωσης,

$$\langle S_{\text{free}} \rangle = \beta \mathbf{M} \mathbf{s} \quad \text{Π II - 2.1}$$

όπου, ο συμβολισμός  $\langle S_{\text{free}} \rangle$  υποδηλώνει μία μέση εκτίμηση του μητρώου συνδιασπορών για το σύνολο των τυχαίων μεταβλητών.

Κατά τους Vanderbilt και Louie (1983), ο αριθμός,  $\beta$ , αποτελεί μία εκτίμηση του αριθμητικού μέσου των τυχαίων μεταβλητών. Αρχικώς προτείνεται η τιμή  $\beta = 1/6$ , ενώ τελικά και λαμβάνοντας υπόψιν αντί του αριθμητικού, το γεωμετρικό μέσο, καταλήγουν στην τιμή  $\beta = 0,11$ .



Οι σχετικές δοκιμές, ενισχύουν την καταλληλότητα της τιμής,  $\beta = 0,11$  σε σχέση με την τιμή,  $\beta = 1/6$ . Ωστόσο, η εξαγωγή και των δύο αυτών τιμών κρίνεται ως μη επαρκώς αιτιολογημένη. Αναλυτικά σχόλια ακολουθούν στο τέλος της ενότητας, όπου και προτείνονται συγκεκριμένες τροποποιήσεις της μεθόδου.

Συμπεριλαμβανομένου και του συντελεστή επέκτασης,  $x_s$ , το νέο μητρώο,  $\mathbf{s}$ , υπολογίζεται σύμφωνα με την εξίσωση:

$$\mathbf{s} = \frac{x_s}{\beta} \mathbf{M} \quad \text{Π II - 2.2}$$

Για το συντελεστή επέκτασης, προτείνεται η τιμή,  $x_s = 3$ . Ο ανισότροπος χώρος επεκτείνεται κατά  $\sqrt{x_s}$ , προς κάθε κατεύθυνση, ενώ,  $M$ , είναι ο αριθμός των συνολικών κινήσεων, αποδεκτών και απορριπτέων. Το συμμετρικό μητρώο,  $\mathbf{s}$ , τίθεται ίσο με το γινόμενο ενός κάτω τριγωνικού μητρώου,  $\mathbf{Q}$ , με το ανάστροφό του.

$$\mathbf{s} = \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T \quad \text{Π II - 2.3}$$

Τελικά, το μητρώο κάθε μιας από τις συνολικά,  $N$ , διαταραχές,  $\delta \mathbf{x}$ , ισούται με

$$\delta \mathbf{x}^{(nx1)} = \mathbf{Q}^{(nxn)} \mathbf{u}^{(nx1)} \quad \text{Π II - 2.4}$$

όπου,  $\mathbf{u}^{(nx1)}$ , αποτελεί ένα  $(n \times 1)$  μητρώο τυχαίων μεταβλητών από την πρότυπη κανονική κατανομή,  $N(0,1)$ .

### Π II - 3 Αξιολόγηση των βασικών παραδοχών της μεθόδου - Παρατηρήσεις

1. Η μέθοδος παραμένει συνεπής στο πρότυπο του Μαρκοβιανού μοντέλου,

$$P(X_t = j | X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_{t-1} = i_{t-1}) = P(X_t = j | X_{t-1} = i_{t-1}) \quad \text{Π II - 3.1}$$

2. Η σύνδεση του μητρώου συνδιασπορών,  $\mathbf{S}$ , με το μητρώο,  $\mathbf{s}$ , γίνεται με ένα τρόπο όχι επαρκώς αιτιολογημένο, ενώ παρά τη συνέπεια του μοντέλου ως προς τη Μαρκοβιανή φύση του αλγόριθμου, δημιουργείται ένας προβληματισμός ως προς το μηχανισμό παραγωγής κινήσεων, ιδιαίτερα στα πρώτα στάδια του αλγόριθμου, όπου και τα ποσοστά αποδεκτών κινήσεων είναι μεγάλα. Σε αυτή την περίπτωση, η διαδικασία προσομοιάζει στη συμπεριφορά ενός «τυχαίου περιπάτου» (random walk) και εκεί τίθενται συγκεκριμένα ερωτήματα.

Πιο συγκεκριμένα, ας εξεταστεί ένα απλό υποθετικό παράδειγμα, σύμφωνα με τις παρακάτω παραδοχές

- Δισδιάστατη αντικειμενική συνάρτηση,  $f(x_1, x_2)$
- Ισότροπη παραγωγή κινήσεων, περιμετρικά του αρχικού σημείου εκκίνησης, σύμφωνα με ένα κλασικό μοντέλο λευκού θορύβου. Η ισότροπη αυτή παραγωγή κινήσεων θεωρείται ως μία πιθανή πραγματική εξέλιξη στα πλαίσια του προαναφερόμενου τυχαίου περιπάτου (random walk).

Ως προς την πρώτη παραδοχή του δισδιάστατου χώρου, η εξίσωση των Vanderbilt και Louie (1983), καταργεί μια σημαντική παράμετρο του υπό εξέταση ζητήματος. Πιο συγκεκριμένα, αν γίνει προς στιγμήν αποδεκτό ένα σταθερό μέσο βήμα παραγωγής κινήσεων,  $(l)$ , τότε η μέση εκτιμώμενη απόσταση της τελευταίας κίνησης σε σχέση με την πρώτη,  $d_{rms}$ , θα έπρεπε να είναι ανάλογη της τετραγωνικής ρίζας του συνολικού αριθμού των κινήσεων,  $d_{rms} = l\sqrt{M}$ .

Η προτεινόμενη εξίσωση,  $s = \frac{x_s}{\beta M} S$ , ουσιαστικά καταργεί αυτή την εξάρτηση. Η

απόσταση,  $d_{rms}$ , παραμένει ανεξάρτητη του αριθμού των πραγματοποιηθέντων κινήσεων,  $M$ , ενώ το μέσο μέγεθος της συνολικά πραγματοποιούμενης διαδρομής,  $L$ , καθίσταται ανάλογο της τετραγωνικής ρίζας,  $\sqrt{M}$ .

Οι παρατηρήσεις αυτές επιβεβαιώνονται και με τη βοήθεια της δεύτερης παραδοχής, της ισότροπης δηλαδή παραγωγής κινήσεων, οπότε και το μητρώο συνδιασπορών απλοποιείται. Από τα προαναφερόμενα προκύπτει πως η λύση των Vanderbilt και Louie (1983), προκαλεί μια σημαντική εγγύτητα του συνόλου των παραγομένων κινήσεων ως προς το σημείο εκκίνησης. Η εξάρτηση αυτή καταργεί εν μέρει τη Μαρκοβιανή φύση του μοντέλου. Η συμπεριφορά αυτή, πιο ελεύθερα ερμηνευόμενη, σημαίνει πως η Μαρκοβιανή αλυσίδα καθίσταται μη ομογενής.

3. Σε σύνδεση με τα προαναφερόμενα, προκύπτει επίσης το ότι το μέγεθος των διαταραχών,  $\delta x$ , ανά διάσταση,  $i = 1, 2, \dots, n$ , είναι αντιστρόφως ανάλογο της τετραγωνικής ρίζας του συνολικού αριθμού των σημείων της Μαρκοβιανής αλυσίδας,  $M$ . Συνεπώς, η αύξηση του μήκους της αλυσίδας συνεπάγεται μείωση του μεγέθους των επιβαλλόμενων διαταραχών. Το γεγονός αυτό αποτελεί βασική προϋπόθεση για τη σωστή λειτουργία του συντελεστή επέκτασης,  $x_s$ . Η Μαρκοβιανή αλυσίδα θα πρέπει να καλύψει τον ίδιο χώρο, ανεξαρτήτως του αριθμού των μελών της.

Από τις παραπάνω παρατηρήσεις, προκύπτει το συμπέρασμα πως η μέθοδος των Vanderbilt και Louie (1983) εισάγει ορισμένες ενδιαφέρουσες καινοτομίες. Εκτός από την πιο προφανή, που είναι η αλληλοσύνδεση των μελλοντικών διαταραχών με τις πρώτες και δεύτερες ροπές των προηγούμενων αποδεκτών κινήσεων, ειπήςέρχονται και ορισμένα νέα χαρακτηριστικά, που κυρίως αφορούν τη Μαρκοβιανή φύση του μοντέλου. Η μέθοδος περιορίζει τις μεγάλες τελικές αποστάσεις από το σημείο εκκίνησης και συνεπώς αποκλίνει από τα χαρακτηριστικά του κλασικού δισδιάστατου τυχαίου περιπάτου (random walk).

Το γεγονός αυτό είναι ένα επιθυμητό χαρακτηριστικό, ιδιαίτερα όσον αφορά στα πρώτα στάδια της διαδικασίας βελτιστοποίησης ή στα πολυδιάστατα προβλήματα με μεγάλο απαιτούμενο αριθμό προσδιορισθέντων σημείων,  $M$ . Η Μαρκοβιανή αλυσίδα τείνει να δεσμεύεται από το σημείο εκκίνησης της, αποτρέποντας κατά αυτό τον τρόπο τις ιδιαίτερα τυχαίες απομακρυσμένες από αυτό διαδρομές. Ως εκ τούτου, η έρευνα του χώρου,  $n$ , διαστάσεων γίνεται με ένα πιο συστηματικό και ομοιόμορφο τρόπο.

Επιπρόσθετα, η μείωση του μεγέθους των διαταραχών, αυξανόμενου του μήκους της μαρκοβιανής αλυσίδας εισάγει κατά ένα τρόπο και την έννοια της απαιτούμενης «πυκνότητας» των κινήσεων μέσα στον επιθυμητό χώρο έρευνας,  $n$ , διαστάσεων. Ο έλεγχος της επέκτασης του χώρου έρευνας, οφείλεται σε αυτό το χαρακτηριστικό.

#### Π II - 4 Η μεταβλητότητα της παραμέτρου, $\beta$

Η προτεινόμενη μέθοδος ως αυτορυθμιζόμενη, στηρίζεται σε τρεις βασικές προϋποθέσεις:

- Τον αυτοματοποιημένο προσδιορισμό της κατεύθυνσης των κινήσεων
- Την επέκταση του χώρου έρευνας
- Την συστηματική αναπροσαρμογή του μεγέθους των κινήσεων στο νέο διεσταλμένο χώρο έρευνας

Οι απαιτήσεις αυτές ικανοποιούνται χρησιμοποιώντας:

- Το μητρώο συνδιασποράς των μεταβλητών,  $S$ , ως εκφραστή της ανισοτροπίας του χώρου,  $n$ , διαστάσεων,  $\Omega$ . Η κατεύθυνση των μελλοντικών κινήσεων υπαγορεύεται από την παραμορφωσιμότητα του χώρου των προηγηθεισών αποδεκτών κινήσεων.
- Ένα συντελεστή επέκτασης,  $x_s$ , όπου τυπικά  $x_s > 1$ . Ο πραγματικός βαθμός επέκτασης κάθε διάστασης ισούται με  $\sqrt{x_s}$ .
- Έναν κανόνα αναπροσαρμογής του μεγέθους των κινήσεων, ο οποίος και θα καθορίζει το βήμα κάθε κίνησης λαμβάνοντας υπόψιν τόσο την εντροπία των προηγούμενων αποδεκτών κινήσεων, όσο και τον επιθυμητό βαθμό επέκτασης.

Συνεπώς, μία εξίσωση τελικά θα προσδιορίζει ταυτόχρονα την επέκταση του χώρου έρευνας, την κατεύθυνση αλλά και το μέγεθος των επιβαλλόμενων διαταραχών. Ο συντελεστής επέκτασης και η ανισοτροπία του χώρου θα συντελούν στη δημιουργία μεγαλύτερων κινήσεων κατά τις διευθύνσεις χαμηλής εντροπίας.

Σύμφωνα με τους Vanderbilt και Louie (1983), η εξίσωση αυτή είναι της μορφής,  $s = \frac{x_s}{\beta M} S$ ,

όπου, το συμμετρικό τετραγωνικό μητρώο,  $s$ , καθορίζει το μέγεθος και την κατεύθυνση κάθε διαταραχής της νέας μαρκοβιανής αλυσίδας. Συνεπώς, οι δεύτερες ροπές των προηγούμενων αποδεκτών κινήσεων συνολικά, καθορίζουν μέσω της προαναφερόμενης εξίσωσης κάθε μία από τις μελλοντικές,  $M$ , διαταραχές.

Όσον αφορά στην παράμετρο,  $\beta$ , τα πειραματικά αποτελέσματα επιβεβαιώνουν σε μεγάλο βαθμό την επιλογή της τιμής  $\beta = 0,11$ . Η αιτιολόγηση της τιμής αυτής, καθώς και της ίδιας της βασικής εξίσωσης,  $s = \frac{x_s}{\beta M} S$ , παραμένει ελλιπής στη σχετική δημοσίευση των Vanderbilt και Louie (1983).

Εκ πρώτης όψεως, η επιλογή του μεγέθους,  $\beta$ , ως παραμέτρου και όχι μεταβλητής δημιουργεί υποψίες ως προς την ύπαρξη ενός ισχυρά εμπειρικού ή απλοποιημένου χαρακτήρα της προτεινόμενης εξίσωσης. Στην ανάλυση, που ακολουθεί, επιχειρείται μία πιο συστηματική διερεύνηση της παραμετροποίησης του αλγόριθμου.

Κατ' αρχήν, εξετάζεται το πρόβλημα μονοδιάστατα, λαμβάνοντας υπόψιν την ύπαρξη,  $N$ , σημείων, με συντεταγμένες,  $x_1, x_2, \dots, x_N$ , κατά την υπό εξέταση διάσταση,  $x - x'$ .

Ακολούθως ορίζονται τα μεγέθη,

$$\begin{aligned} \Delta x_i &= x_{i+1} - x_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \\ \Delta \bar{X}_i &= x_i - E[x] \end{aligned} \quad \text{Π II - 4.1}$$

όπου  $\Delta \bar{X}_i$ , είναι η κανονικοποιημένη μεταβλητή,  $x$ . Τα μεγέθη,  $\Delta x_i$ , αντιστοιχούν στις κινήσεις της υπό εξέταση υποθετικής Μαρκοβιανής μονοδιάστατης αλυσίδας,  $x_1, x_2, \dots, x_N$ .

Μέσω του αθροίσματος των τετραγώνων των υπο εξέταση σημείων της αλυσίδας, επιχειρείται μία σύνδεση μεταξύ των κινήσεων,  $x_1, x_2, \dots, x_N$  και των κανονικοποιημένων μεταβλητών,  $\Delta \bar{X}_i$ .

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \Delta x_i^2 &= \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \dots + \Delta x_N^2 = (\Delta \bar{X}_2 - \Delta \bar{X}_1)^2 + (\Delta \bar{X}_3 - \Delta \bar{X}_2)^2 + \dots + (\Delta \bar{X}_N - \Delta \bar{X}_{N-1})^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^N \Delta x_i^2 &= 2 \sum_{i=1}^N \Delta \bar{X}_i^2 - (\Delta \bar{X}_1^2 + \Delta \bar{X}_N^2) - 2 \sum_{i=1}^N \Delta \bar{X}_i \Delta \bar{X}_{i+1} \end{aligned} \quad \text{Π II - 4.2}$$

Ο τελευταίος όρος του αθροίσματος τροποποιείται μέσω του συντελεστή αυτοσυσχέτισης,  $r_1$ ,

$$\sum_{i=1}^N \Delta \bar{X}_i \Delta \bar{X}_{i+1} = r_1 \sum_{i=1}^N \Delta \bar{X}_i^2 \quad \text{Π II - 4.3}$$

Η τελική εξίσωση διαμορφώνεται ως εξής,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \Delta x_i^2 &= 2 \sum_{i=1}^N \Delta \bar{X}_i^2 - (\Delta \bar{X}_1^2 + \Delta \bar{X}_N^2) - 2r_1 \sum_{i=1}^N \Delta \bar{X}_i^2 = 2 \sum_{i=1}^N \Delta \bar{X}_i^2 (1-r_1) - 2r_1 \sum_{i=1}^N \Delta \bar{X}_i^2 \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^N \Delta x_i^2 &\cong 2 \sum_{i=1}^N \Delta \bar{X}_i^2 (1-r_1) = 2N \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta \bar{X}_i^2 (1-r_1) = 2N(1-r_1) \text{var}(x) \end{aligned} \quad \text{Π II - 4.4}$$

Συνεπώς,

$$\sum_{i=1}^N \Delta x_i^2 = 2N(1-r_1) \text{var}(x) \quad \text{Π II - 4.5}$$

Επί τη βάση της εξίσωσης αυτής, το μέγεθος των διαταραχών συναρτάται με τα στατιστικά χαρακτηριστικά του συνόλου των κινήσεων, και πιο συγκεκριμένα με το συντελεστή αυτοσυσχέτισης και τη ροπή δεύτερης τάξης. Αν είναι επιθυμητή η παραγωγή,  $M$ , νέων κινήσεων στα στατιστικά πλαίσια των προηγούμενων,  $N$ , κινήσεων, τότε,

$$\forall M \neq N, \quad \sum_{i=1}^M \Delta x_i^2 = \sum_{i=1}^N \Delta x_i^2 = 2N(1-r_1) \text{var}(x) \quad \text{Π II - 4.6}$$

Σύμφωνα με το μοντέλο των Vanderbilt και Louie (1983), το μέγεθος των διαταραχών τίθεται ίσο με το γινόμενο ενός τετραγωνικού πίνακα,  $[Q]$  με ένα μητρώο  $[u]$ , τυχαίων μεταβλητών,  $u_i = N(0,1)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , από την πρότυπη κανονική κατανομή. Ο πίνακας  $[Q]$  είναι η μεταβλητή υπό διερεύνηση.

Συνεπώς, και όσον αφορά στο υπό εξέταση μονοδιάστατο πρόβλημα,

$$\begin{aligned} [\Delta x] &= [Q] [u] \Rightarrow \sum_{i=1}^M \Delta x_i^2 = Q^2 \sum_{i=1}^M u_i^2 = Q^2 M \bar{u}^2 \\ u &= N(0,1), \quad \bar{u}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 f(u) du \end{aligned} \quad \text{Π II - 4.7}$$

Η αρχική εξίσωση,  $\sum_{i=1}^M \Delta x_i^2$ , διαμορφώνεται στην ακόλουθη,

$$\sum_{i=1}^M \Delta x_i^2 = Q^2 M \bar{u}^2 = \sum_{i=1}^N \Delta x_i^2 = 2N(1-r_1) \text{var}(x) \quad \text{Π II - 4.8}$$

Συνεπώς, για το μονοδιάστατο πρόβλημα, προκύπτει η ακόλουθη χαρακτηριστική εξίσωση,

$$\text{var}(x) = Q^2 M \left( \frac{\bar{u}^2}{2N(1-r_1)} \right) = Q^2 M \beta^* \quad \text{Π II - 4.9}$$

$$\beta^* = \left( \frac{\bar{u}^2}{2N(1-r_1)} \right) \quad \text{Π II - 4.10}$$

Από τις εξισώσεις αυτές διαφαίνεται η μεταβλητότητα του συντελεστή,  $\beta$ . Το μέγεθος του αποτελεί μεταβλητή και όχι παράμετρο της διαδικασίας. Υπό την παραδοχή και εξέταση ενός μέσου μεγέθους του τετραγώνου των τυχαίων μεταβλητών,  $u_i$ , το μέγεθος του συναρτάται άμεσα με το συντελεστή αυτοσυσχέτισης,  $r_1$ , και τον αριθμό,  $N$ , των σημείων, που παράγουν τον υπό εξέταση χώρο. Ο αριθμός αυτός,  $N$ , είναι ουσιαστικά ο αριθμός των αποδεκτών κινήσεων, που δημιουργούν και τα στατιστικά δεδομένα του μηχανισμού παραγωγής των μελλοντικών διαταραχών.

## Π II - 5 Διατύπωση του τελικώς χρησιμοποιούμενου αλγόριθμου βελτιστοποίησης

Η ανασφάλεια σχετικά με την παραδοχή της τιμής της παραμέτρου,  $\beta$ , καθώς και, ο εν γένει, μαρκοβιανός χαρακτήρας της μεθόδου των Vanderbilt και Louie (1983) δημιουργεί τη υποψία ενός μη συστηματικού τρόπου έρευνας της «τοπογραφίας» της συνάρτησης. Οι κινήσεις του μαρκοβιανού μοντέλου μπορούν να προκαλέσουν τον προσανατολισμό προς μη αποδεκτές κατευθύνσεις, ιδιαίτερα στα πρώτα στάδια του αλγόριθμου, όπου και ένα μεγάλο ποσοστό των κινήσεων, που δε βελτιώνουν την τιμή της συνάρτησης, γίνεται αποδεκτό. Πρακτικά, θεωρείται δύσκολος ο εκ νέου προσανατολισμός προς τη κατεύθυνση του ολικά βέλτιστου σημείου, στα προχωρημένα στάδια της διαδικασίας βελτιστοποίησης. Ωστόσο, φαίνεται λογική η διαπίστωση της ταχύτερης σύγκλισης της μαρκοβιανής διεργασίας προς το βέλτιστο σημείο, όταν η συνάρτηση επιδεικνύει την κατάλληλη «τοπογραφία» και σε συναρτήσεις ενός τοπικού ακρότατου (όπως για παράδειγμα η συνάρτηση Rozenbrock).

Στην περίπτωση του τροποποιημένου τυχαίου μοντέλου Bartlett – Lewis, μία πρόχειρη διερεύνηση της αντικειμενικής συνάρτησης, βάσει των αναλυτικών εξισώσεων της μέσης τιμής, της διασποράς και της αυτοσυνδιασποράς, υπέδειξε την ύπαρξη πολλών, παραπλήσιου μεγέθους, τοπικών ακρότατων. Η διερεύνηση αυτή διεξήχθη με τη μη πιθανοτική (συμβατική) μέθοδο GRG (Generalized Reduced Gradient method). Η συμπεριφορά της συνάρτησης υποδεικνύει την αναγκαιότητα ενός πιο συστηματικού τρόπου διεξαγωγής των διαταραχών (και κατ' επέκταση των αποδεκτών κινήσεων). Επιπλέον, η χρονική επιβάρυνση, που απορρέει από τον υπολογισμό των απλών και διπλών ολοκληρωμάτων, δεν επιτρέπει τη διαξαγωγή πολλών δοκιμών (επαναλήψεων) της διαδικασίας βελτιστοποίησης.

Για αυτούς τους λόγους, ο μαρκοβιανός χαρακτήρας της μεθόδου των Vanderbilt και Louie (1983) εγκαταλείπεται. Η ίδια μέθοδος, τροποποιημένη, χρησιμοποιείται για την καθοδήγηση ενός κεντροβαρικού συστήματος κινήσεων. Τα βασικά στάδια του νέου, τροποποιημένου αλγόριθμου έχουν ως εξής:

- Επιλέγεται ένα σημείο του χώρου και γύρω από αυτό δημιουργείται,  $N$ , αριθμός κινήσεων, στα πλαίσια της λογικής ενός λευκού θορύβου, για τις,  $n$ , διαστάσεις του προβλήματος.
- Βάσει των κινήσεων αυτών επιχειρείται η αρχική ρύθμιση της θερμοκρασίας, σύμφωνα με ένα ελάχιστο όριο αποδοχής (συνήθως αυτό είναι της τάξεως του 90 – 95%).
- Για τη συγκεκριμένη αρχική θερμοκρασία και βάσει των αποδεκτών κινήσεων,  $M$ , σε κάθε διάσταση, υπολογίζεται το μητρώο συνδιασπορών,  $S$ , διαστάσεων,  $n \times n$ .
- Υπολογίζεται το μητρώο,  $s$ , βάσει του συντελεστή επέκτασης,  $x_s$ , σύμφωνα με την εξίσωση,

$$s = x_s S \quad \text{Π II – 5.1}$$

- Υπολογίζεται το τετραγωνικό μητρώο,  $Q$ ,  $n \times n$ , σύμφωνα με την εξίσωση,

$$s = QQ^T \quad \text{Π II – 5.2}$$

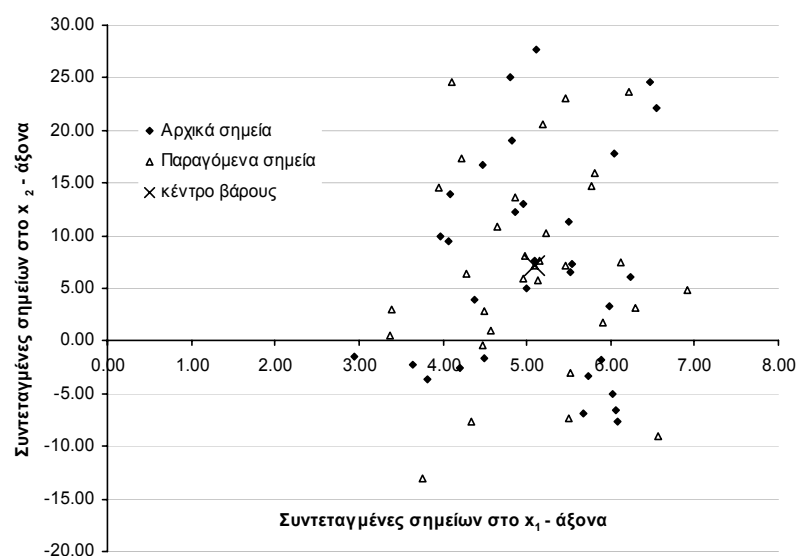
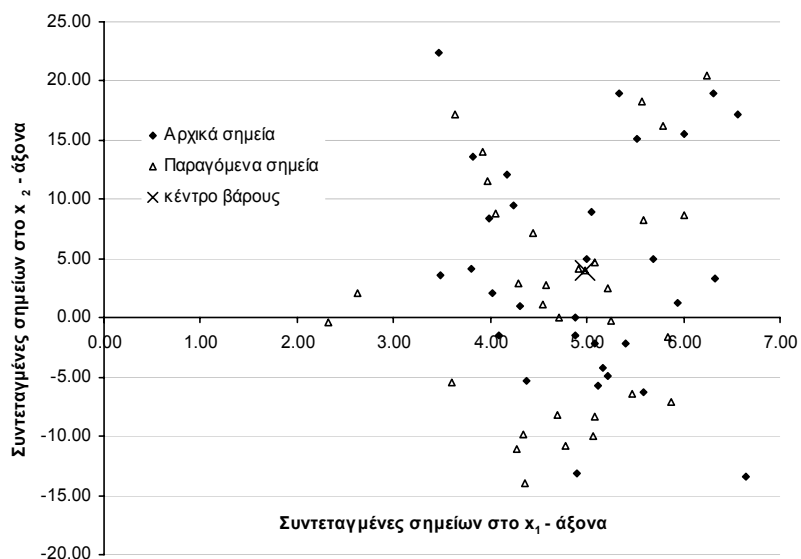
- Υπολογίζεται,  $N$ , αριθμός,  $n \times 1$ , τετραγωνικών μητρώων,  $u$ , με αριθμούς από την κανονική κατανομή  $N(0,1)$ .
- Υπολογίζεται το μητρώο μεταβολής,  $dx$ , σύμφωνα με την εξίσωση,

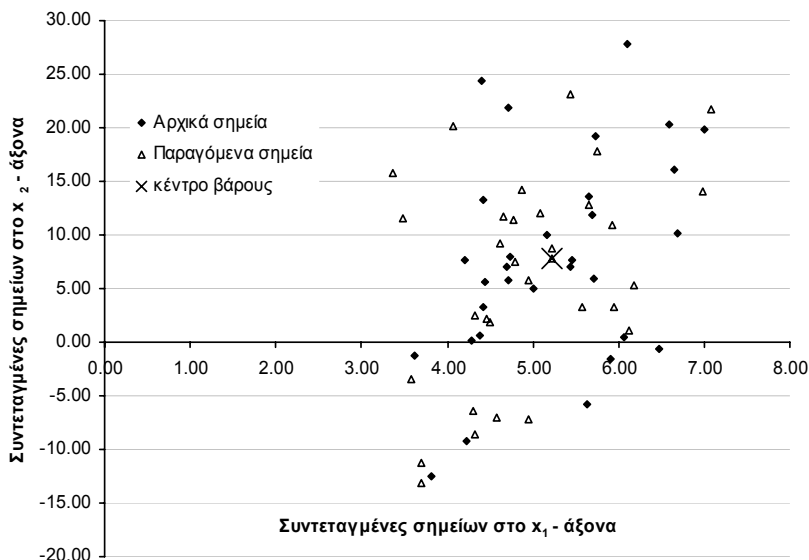
$$dx = Q u \quad \text{Π II – 5.3}$$

- Υπολογίζεται το κέντρο βάρους των προηγούμενων αποδεκτών κινήσεων,  $M$ .
- Η θερμοκρασία μειώνεται σύμφωνα με την επιλεγόμενη συνάρτηση μείωσης.
- Οι νέες κινήσεις,  $N$ , προκύπτουν σε σχέση με το κέντρο βάρους των προηγούμενων αποδεκτών κινήσεων, στο οποίο προστίθενται οι διαταραχές,  $dx$ .

- Βάσει της νέας θερμοκρασίας, απορρίπτονται κάποιες κινήσεις και για τις αποδεκτές κινήσεις υπολογίζεται εκ νέου το μητρώο συνδιασπορών.
- Η διαδικασία επαναλαμβάνεται με τον υπολογισμό του νέου μητρώου,  $s$ .

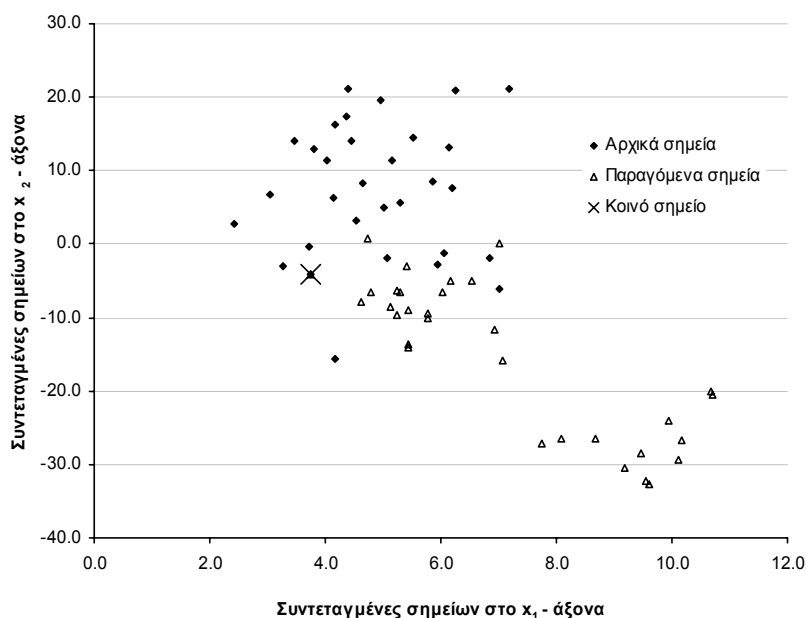
Τα παρακάτω διαγράμματα δείχνουν με ένα παραστατικό τρόπο τον τρόπο με τον οποίο παράγονται νέες κινήσεις, σύμφωνα με την «τοπογραφία» των προηγούμενων.





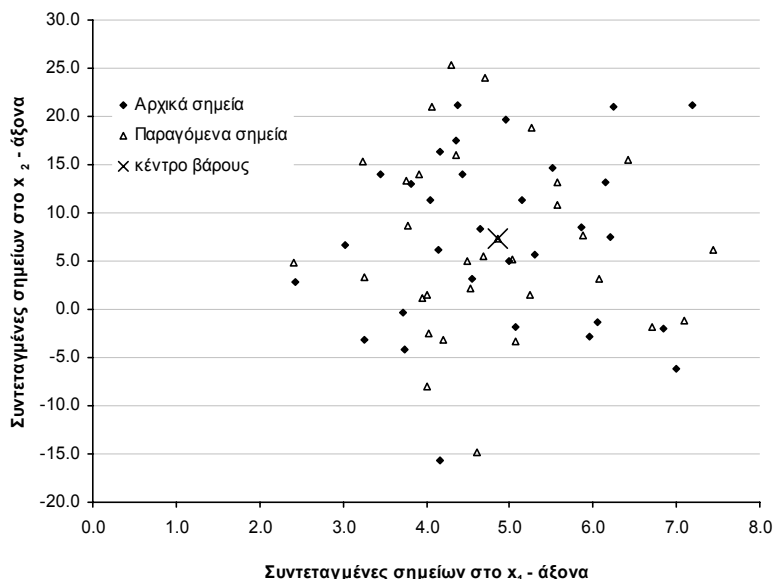
Διαγράμματα Π II – 5α, β και γ : Αναπαράσταση της ταύτισης του γενεσιουργού και του παραγόμενου χώρου κινήσεων

Όλα τα διαγράμματα, Π II – 5α, β και γ, αντιστοιχούν σε μοναδιαίο συντελεστή επέκτασης,  $x_s = 1$ , και ως εκ τούτου ο γενεσιουργός και ο παραγόμενος χώρος ταυτίζονται. Το σύνολο των σημείων είναι τριάντα δύο και το κέντρο βάρους των παραγόμενων και των γενεσιουργών σημείων πρακτικά ταυτίζεται. Στο διάγραμμα Π II – 5δ, αναπαρίσταται η δημιουργία ενός νέου συνόλου κινήσεων, με τη μέθοδο των Vanderbilt και Louie (1983), δηλαδή μέσω ενός μαρκοβιανού μηχανισμού παραγωγής κινήσεων. Ο συντελεστής επέκτασης,  $x_s$ , είναι ίσος με τη μονάδα. Από το διάγραμμα, είναι εμφανής ο μονομερής προσανατολισμός των νέων κινήσεων, ο οποίος και στα πρώτα στάδια του αλγόριθμου, θα προκαλούσε, μία πολύ πιθανή, μετατόπιση του ενδιαφέροντος και των υπόλοιπων σταδίων, προς εκείνη την περιοχή.



Διαγράμματα Π II – 5δ : Αναπαράσταση της ταύτισης του γενεσιουργού και του παραγόμενου χώρου κινήσεων

Εν αντιθέσει με την συμπεριφορά του μαρκοβιανού μοντέλου, το νέο, κεντροβαρικό μοντέλο προκαλεί έναν πιο συστηματικό τρόπο έρευνας της περιοχής και κατά κάποιον τρόπο, εξαντλεί τον περιμετρικό, του κέντρου βάρους, χώρο έρευνας. Η συμπεριφορά αυτή, αποτυπώνεται παραστατικά στο διάγραμμα Π II – 5ε. Ο γενεσιουργός χώρος (το σύνολο των αρχικών σημείων) παραμένει ο ίδιος με αυτόν του διαγράμματος Π II – 5δ.



Διαγράμματα Π II – 5ε : Αναπαράσταση της ταύτισης του γενεσιουργού και του παραγόμενου χώρου κινήσεων

Ο νέος αλγόριθμος συγκλίνει στο βέλτιστο σημείο, μέσω της συνεχούς παραγωγής και απόρριψης τιμών της αντικειμενικής συνάρτησης. Η σταδιακή μείωση της θερμοκρασίας εξασφαλίζει τη σύγκλιση. Η ομοιόμορφη επέκταση του γενεσιουργού χώρου, μέσω του συντελεστή επέκτασης,  $x_s$ , και η εκάστοτε αποδοχή σημείων προκαλεί την ομαδική μετακίνηση των παραγόμενων σημείων προς την κατεύθυνση του ολικά βέλτιστου σημείου. Τα παραγόμενα σημεία ακολουθούν την ακριβή τοπογραφία της συνάρτησης με ένα πιθανοτικό τρόπο, αρχικά, ο οποίος, με τη μείωση της θερμοκρασίας σε χαμηλές τιμές, γίνεται απολύτως ντετερμινιστικός, εγκλωβίζοντας τη διαδικασία γύρω από το ολικά βέλτιστο σημείο.

Η όλη διεργασία στερείται μνήμης και, ιδιαίτερα προς τα τελευταία στάδια του αλγόριθμου, είναι δυνατός ο υπολογισμός του κέντρου βάρους με ένα συντελεστή βάρους, στον οποίο θα έχουν μεγαλύτερο ποσοστό συμμετοχής, οι συντεταγμένες της καλύτερης κίνησης. Κατά αυτό τον τρόπο επιτυγχάνεται μία μετατόπιση του επόμενου σημείου παραγωγής κινήσεων προς τις συντεταγμένες του βέλτιστου σημείου του προηγούμενου συνόλου αποδεκτών κινήσεων. Ο καλύτερος τρόπος για να γίνει αυτό είναι η εισαγωγή τυχαίων αριθμών (ομοιόμορφη κατανομή) στη συνάρτηση υπολογισμού του κέντρου βάρους. Κατά αυτό τον τρόπο, διατηρείται ο στοχαστικός χαρακτήρας της διεργασίας.

Μία ισχυρή μνήμη, ως προς την καλύτερη κίνηση, μετατρέπει τον αλγόριθμο σε ένα συμβατικό αλγόριθμο σύγκλισης προς το πλησιέστερο τοπικό ακρότατο. Μία τέτοια συμπεριφορά είναι ιδιαίτερα επιθυμητή προς τα τελικά στάδια της διαδικασίας και, ως εκ τούτου, μία αριθμητική πρόοδος, σε σχέση με τον αριθμό των επαναλήψεων αλλά και την τυπική απόκλιση των αποδεκτών τιμών της συνάρτησης, μπορεί να κλιμακώσει την ενίσχυση της μνήμης. Όπως είναι αναμενόμενο, ακόμα και στα πρώιμα στάδια της διαδικασίας μία ισχυρή μνήμη επιταχύνει την εξεύρεση του ολικά βέλτιστου σημείου, σε συναρτήσεις ενός ακρότατου ή πολλαπλών τοπικών ακρότατων, όπου το ολικά βέλτιστο σημείο αντιστοιχεί σε αξιόλογη σχετική μείωση της τιμής της συνάρτησης.

Όσον αφορά στον επιλεγόμενο κανόνα μείωσης της θερμοκρασίας, υιοθετήθηκε η εξίσωση των van Laarhoven και Aarts (1985, σελ. 215) την οποία ο κανόνας ισχύει:



$$T_{k+1} = T_k \left( 1 + \frac{\ln(1 + \delta) T_k}{3\sigma_k} \right) \quad \text{Π II – 5.4}$$

όπου,  $T_k$ , είναι η τιμή της θερμοκρασίας στο,  $k$ , στάδιο και  $\sigma_k$ , είναι η τυπική απόκλιση των αποδεκτών τιμών της συνάρτησης στο,  $k$ , στάδιο.

Για την περίπτωση του συγκεκριμένου προβλήματος, εφαρμόστηκε με επιτυχία και ο απλός κανόνας (“simple”, Kirkpatrick *et al.* 1983),

$$T_{k+1} = T_k(a), \quad a \in [0.5, 0.99] \quad \text{Π II – 5.5}$$

Ο κανόνας αυτός έχει αρχικά προταθεί από τους Kirkpatrick *et al.* (1983) και λόγω της απλότητάς του έχει υιοθετηθεί σε πολλές περιπτώσεις.

Ο κανόνας αυτός, για τιμή της παραμέτρου,  $a = 0.99$ , μπορεί να εφαρμοστεί στα τελευταία στάδια της διαδικασίας βελτιστοποίησης, εξασφαλίζοντας μία αργή μείωση της θερμοκρασίας, στην περίπτωση ύπαρξης πολλών τοπικών ακρότατων στη γειτονιά του ολικά βέλτιστου σημείου. Κατά αυτό τον τρόπο, μειώνεται η πιθανότητα εγκλωβισμού της διαδικασίας σε κάποιο από αυτά, όταν η τιμή της θερμοκρασίας και η γενικότερη σύγκλιση, που έχει επιτευχθεί, δεν επιτρέπει την εύκολη παράκαμψή τους.

Για την αρχική τιμή της θερμοκρασίας,  $T_0$ , εφαρμόστηκε ο απλός και πιο δημοφιλής κανόνας, (Kirkpatrick *et al.* 1983) σύμφωνα με τον οποίο, η αρχική τιμή της θερμοκρασίας καθορίζεται από το σταδιακό διπλασιασμό μίας αυθαίρετα επιλεγμένης αρχικής τιμής, μέχρις ότου το ποσοστό αποδοχής να υπερβεί το 80%. Ο διπλασιασμός πραγματοποιείται για να εξασφαλιστεί μία τιμή της θερμοκρασίας, μεγάλη αρκετά, ώστε να αποτρέψει την παγίδευση σε ένα τοπικό ελάχιστο, στα πρώτα στάδια του αλγόριθμου.

Όσον αφορά στον αριθμό,  $N$ , των παραγόμενων, σε κάθε επανάληψη, σημείων, και προκειμένου να εξασφαλιστεί η απαραίτητη βεβαιότητα παραγωγής ικανού αριθμού αποδεκτών κινήσεων, για αργή μείωση της θερμοκρασίας και μεγάλο αριθμό επαναλήψεων (αργή σύγκλιση), εφαρμόστηκε ο εμπειρικός κανόνας,

$$N \geq 50 \cdot n \quad \text{Π II – 5.6}$$

που,  $n$ , είναι ο αριθμός των διαστάσεων του προβλήματος. Ο κανόνας αυτός υιοθετείται και από τους Vanderbilt και Louie (1983), στη μορφή,  $N \geq 15 \cdot n$ , για την περίπτωση του μαρκοβιανού μοντέλου.

Η δοκιμή του αλγόριθμου βασίστηκε, κυρίως, στην εξίσωση Rosenbrock, έξι διαστάσεων:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_6) = \sum_{i=1}^5 \left[ 100 (x_i^2 - x_{i+1})^2 + (1 - x_i)^2 \right] \quad \text{Π II – 5.7}$$

Η επιλογή αυτή βασίστηκε στην γενικώς αποδεκτή δυσκολία (Kvasnicka και Pospichal, 1997) των γενετικών και SA αλγόριθμων να εντοπίσουν το μοναδικό ελάχιστο αυτής της συνάρτησης ( $f_{\min} = 0$ ,  $x_i = 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, 6$ ). Η επιτυχία του αλγόριθμου κυμαίνεται στο 90%, για τιμές των μεταβλητών επίλυσης στο διάστημα  $-5 < x_i < 5$ .

Για τον προσδιορισμό του μητρώου,  $Q$ , (εξίσωση Π II – 5.2) χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος Choleski. Ο συντελεστής επέκτασης,  $x_s$ , για το πρόβλημα των έξι διαστάσεων, κυμάνθηκε στην τιμή 1.15, ενώ ο αρχικά παραγόμενος λευκός θόρυβος αντιστοιχεί σε τυπική απόκλιση,  $\sigma_0 = 0.1$ . Οι τιμές των παραμέτρων αυτών αφορούν στο πρόβλημα βελτιστοποίησης του τροποποιημένου, τυχαίου μοντέλου Bartlett – Lewis.

Ο υπολογισμός των απλών ολοκληρωμάτων βασίστηκε στη μέθοδο Gauss – Legendre. Ο υπολογισμός των διπλών ολοκληρωμάτων βασίστηκε στο συνδυασμό των μεθόδων Romberg,

Gauss-Legendre και του τραπεζοειδή κανόνα (trapezoidal rule). Για τον υπολογισμό των απλών ολοκληρωμάτων κρίθηκε απαραίτητη η διάσπασή τους, σύμφωνα με το μετασχηματισμό:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{1/b}^{1/a} \frac{1}{t^2} f\left(\frac{1}{t}\right) dt \quad \text{Π II – 5.8}$$

Η τακτική αυτή είναι απαραίτητη, λόγω του ορίσματος των ολοκληρωμάτων (0 και  $\infty$ ). Η ακρίβεια υπολογισμού των ολοκληρωμάτων και η βελτιστοποίηση των απαιτούμενων πράξεων υπολογισμού τους, έγιναν με γνώμονα τα δημοσιευμένα αποτελέσματα για το κλασικό τυχαίο μοντέλο Bartlett – Lewis, για την περίπτωση του Denver και με χρήση των εξισώσεων του νέου τροποποιημένου μοντέλου Bartlett – Lewis, για τιμή της παραμέτρου,  $\kappa_2 = 0$  (τιμή για την οποία το τροποποιημένο μοντέλο εκπίπτει στο κλασικό τυχαίο μοντέλο)

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Aarts E. H. L. and P. J. M. Van Laarhoven, Statistical cooling: A general approach to combinatorial optimization problems, *Philips J. Res.*, 40, 193 - 226, 1985.
- Box G. E. P., G. M. Jenkins and G. C. Reinsel, Time series analysis: Forecasting and control, 3<sup>rd</sup> edition, Prentice Hall, London, 1994
- Bras R. L. and I. Rodriguez-Iturbe, Random functions and hydrology, Dover Publications, London, 1993
- Chapra S. C. and R. P. Canale, Numerical methods for engineers, McGraw-Hill, 4<sup>th</sup> edition, New York, 2002.
- Edgar T. F. and D. M. Himmelblau, Optimization of chemical process, McGraw Hill, New York, 1989.
- Foufoula – Georgiou E. and Guttorp P., Compatibility of continuous rainfall occurrence models with discrete rainfall observations, *Water Resources Research*, 22, 1316 – 1322, 1986.
- Foufoula – Georgiou E. and Lettenmaier D. P., Continuous-time versus discrete-time point process models for rainfall occurrence series, *Water Resources Research*, 22, 531 – 542, 1986.
- Isham S., D. Entekhabi and R. L. Bras, Parameter estimation and sensitivity analysis for the modified Bartlett – Lewis rectangular pulses model of rainfall, *Journal of Geophysical Research*, 95, 2093 - 2100, 1990.
- Kalivas J. H., Optimization using variations of simulated annealing, *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, 15, 1 - 12, 1992.
- Kirkpatrick S., C. D. Gelatt, Jr. and M. P. Vecchi, Optimization by simulated annealing, *Science*, 220, 671 - 681, 1983.
- Kirkpatrick S., Optimization by simulated annealing: Quantitative studies, *Journal of Statistical Physics*, 34, 975 - 986, 1983.
- Maron M. J. and R. J. Lopez, Numerical analysis: A practical approach, Wadsworth, 3<sup>rd</sup> edition, Belmont – California, 1991.
- Mooney C. Z., Monte Carlo simulation, Sage Publications, 1997.
- Onof C., H. S. Wheather and J. V. Isham, Note on the analytical expression of the inter-event time characteristics for Bartlett – Lewiss type rainfall models, *Journal of Hydrology*, 157, 197 - 210, 1994.
- Onof C., R. E. Chandler, A. Kakou, P. Northrop, H. S. Wheather and J. V. Isham, Rainfall modeling using Poisson-cluster processes, *Stochastic Environmental and Risk Assessment*, 14, 384 - 411, 2000.
- Papoulis A., Probability, random variables and stochastic processes, 3<sup>rd</sup> edition, McGraw-Hill, New York, 1991
- Rodriguez – Iturbe I., V. K. Gupta and E. Waymire, Scale considerations in the modeling of temporal rainfall, *Water Resources Research*, 20, 1611-1619, 1984.
- Rodriguez – Iturbe I., D. R. Cox, F.R.S. and V. Isham, Some models for rainfall based on stochastic point processes, *Proc. R. Soc. Lond. A* 417, 269 - 288, 1987 *α*.

- Rodriguez – Iturbe I., B. Febres De Power and J. B. Valdes, Rectangular pulses point process models for rainfall: analysis of empirical data, *Journal of Geophysical Research*, 92, 9645 - 9656, 1987 β.
- Rodriguez – Iturbe I., D. R. Cox, F.R.S. and V. Isham, A point process model for rainfall: further developments, *Proc. R. Soc. Lond. A* 417, 283 - 298, 1988.
- Shaw E. M., Hydrology in practice, 3<sup>rd</sup> edition, Chapman & Hall, London, 1994.
- Van Laarhoven P. J. M. and E. H. L. Aarts, Simulated Annealing: Theory and applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1988.
- Vanderbilt D. and S. G. Louie, A Monte Carlo simulated annealing approach to optimization over continuous variables, *Journal of Computational Physics*, 56, 259 - 271, 1983.
- Vanmarcke E., Random fields: Analysis and synthesis, The MIT Press, 1983
- Velghe T., P. A. Troch, F. P. De Troch and J. Van de Velde, Evaluation of cluster-based rectangular pulses point process models for rainfall, *Water Resources Research*, 30, 2847 - 2857, 1994.
- Verhoest N., P. A. Troch and F. P. De Troch, On the applicability of Bartlett-Lewis rectangular pulses models in the modeling of design storms at a point, *Journal of Hydrology*, 202, 108 - 120, 1997.
- Waymire E. and V. K. Gupta, The mathematical structure of rainfall representations: 1. A review of the stochastic rainfall models, *Water Resources Research*, 17, 1261-1272, 1981.
- Κουτσογιάννης Δ., Μοντέλο επιμερισμού σημειακής βροχόπτωσης, Διδακτορική διατριβή, Ε.Μ.Π., Τ.Υ.Π.Υ.Θ.Ε., Αθήνα, 1988.
- Μαρίνος – Κουρής Δ. Και Ζ. Β. Μαρούλης, Σχεδιασμός χημικών βιομηχανιών, Παπασωτηρίου, Αθήνα, 1993
- Μιμίκου Μ. Α., Τεχνολογία υδατικών πόρων, Παπασωτηρίου, Αθήνα, 1994.