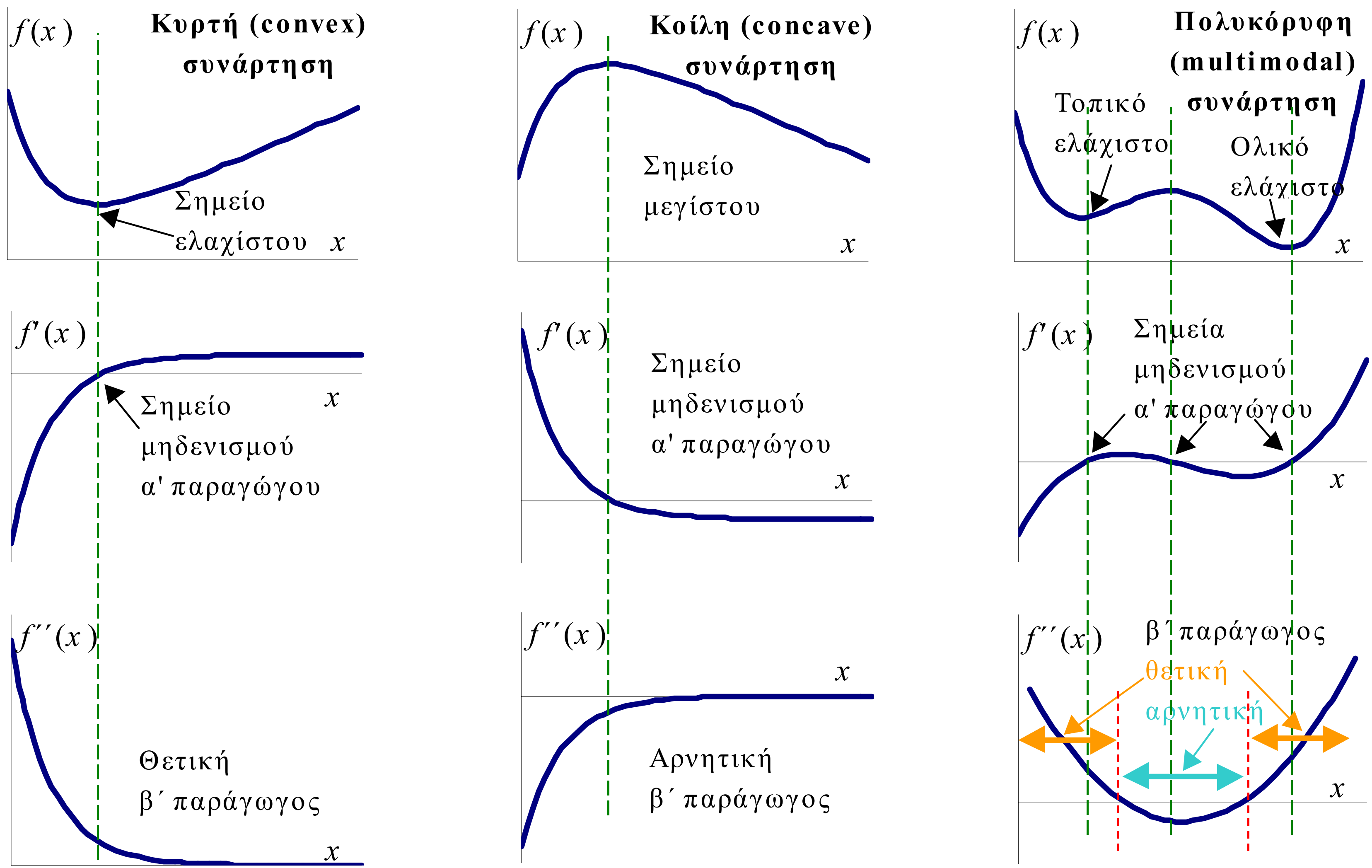
Διαχείριση Υδατικών Πόρων

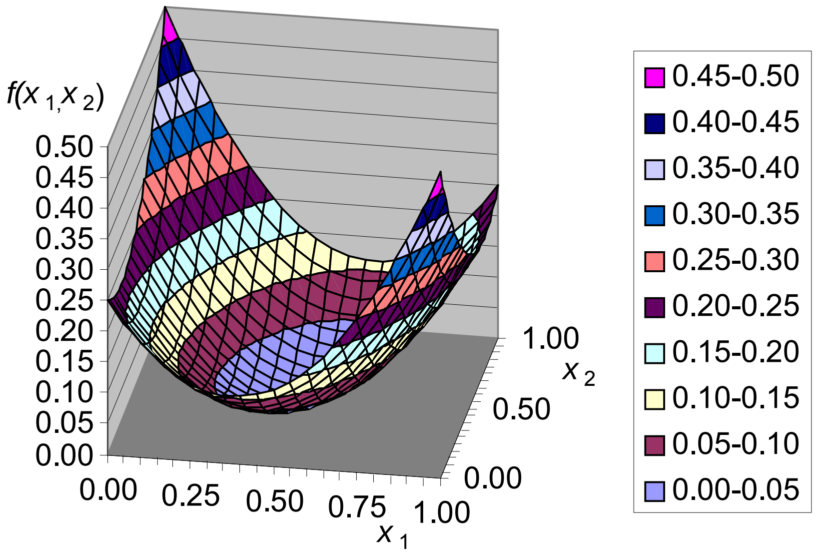
Εισαγωγή στη βελτιστοποίηση συστημάτων υδατικών πόρων

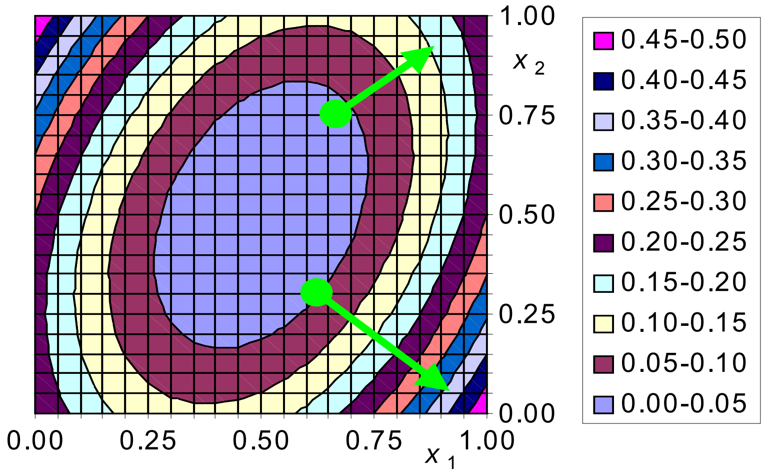
Δημήτρης Κουτσογιάννης
Τομέας Υδατικών Πόρων
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Η βελτιστοποίηση για απλή πραγματική στοχική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής



Η βελτιστοποίηση για απλή πραγματική στοχική συνάρτηση διανυσματικής μεταβλητής





Μεταβλητές ελέγχου: x_1, x_2, (χώρος δύο διαστάσεων)· συμπυκνώνονται σε μία **διανυσματική μεταβλητή**: $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$

Στοχική συνάρτηση (πραγματική):

$$f(\mathbf{x}) = (x_1 - 0.5)^2 + 0.5(x_2 - 0.5)^2 - 0.5(x_1 - 0.5)(x_2 - 0.5)$$

Το γράφημα της συνάρτησης στο πεδίο ($0 \le x_1 \le 1$, $0 \le x_2 \le 1$) φαίνεται στα διπλανά σχήματα (πάνω τριδιάστατη προοπτική απεικόνιση, κάτω διδιάστατη απεικόνιση με μορφή ισοτιμικών καμπυλών).

Κλίση:

$$\mathrm{grad}(f) = \nabla f = \left(\frac{df}{d\mathbf{x}}\right)^T = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}\right]^T =$$

$$[2(x_1 - 0.5) - 0.5\,(x_2 - 0.5),\ (x_2 - 0.5) - 0.5\,(x_1 - 0.5)]^T$$

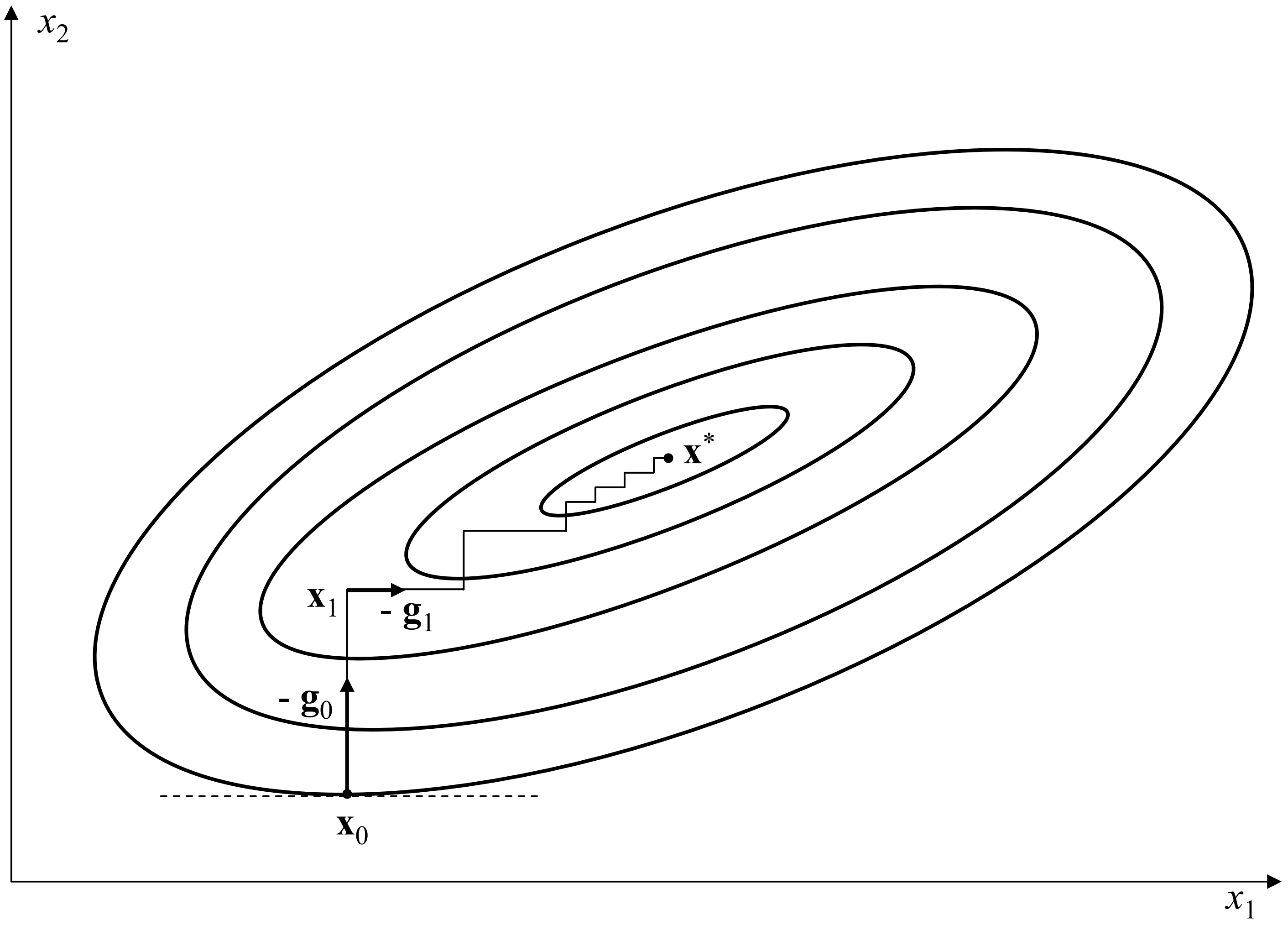
Παραδείγματα τιμών κλίσης:

Για $\mathbf{x} = [0.6, 0.3]^T$, $\mathrm{grad}(f) = [0.3, -0.25]^T$

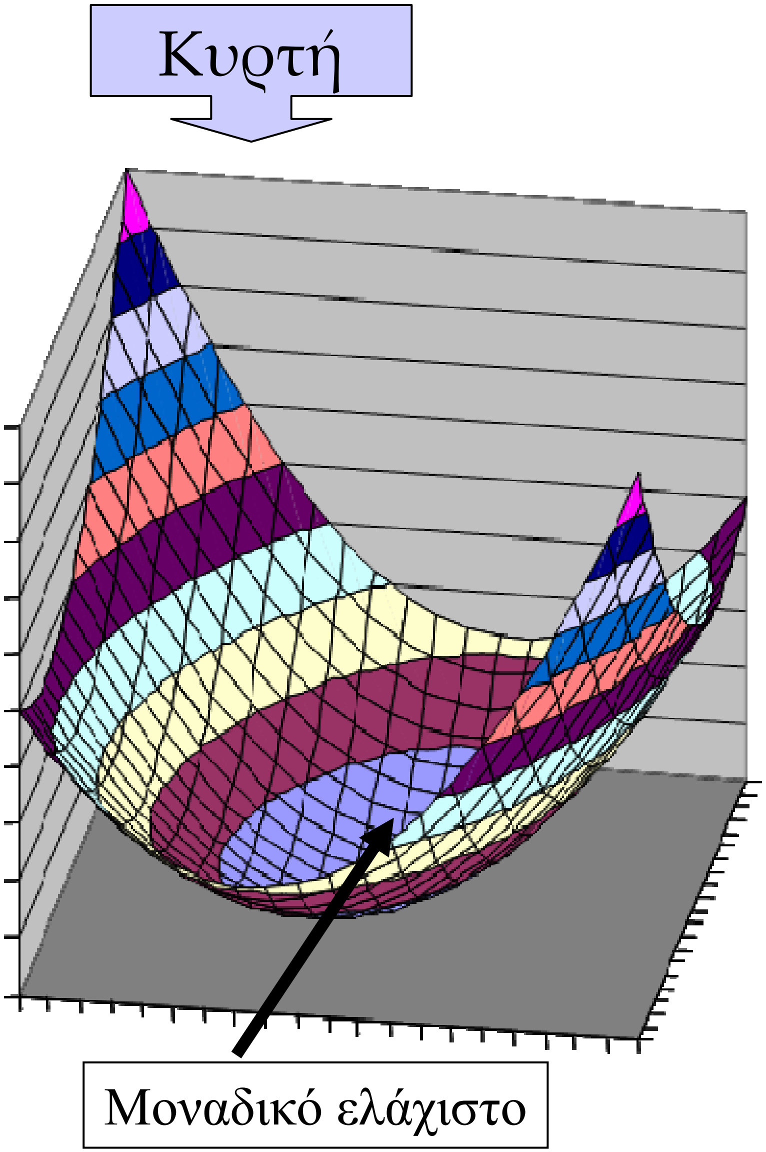
Για $\mathbf{x} = [0.65, 0.75]^T$, $\mathrm{grad}(f) = [0.175, 0.175]^T$

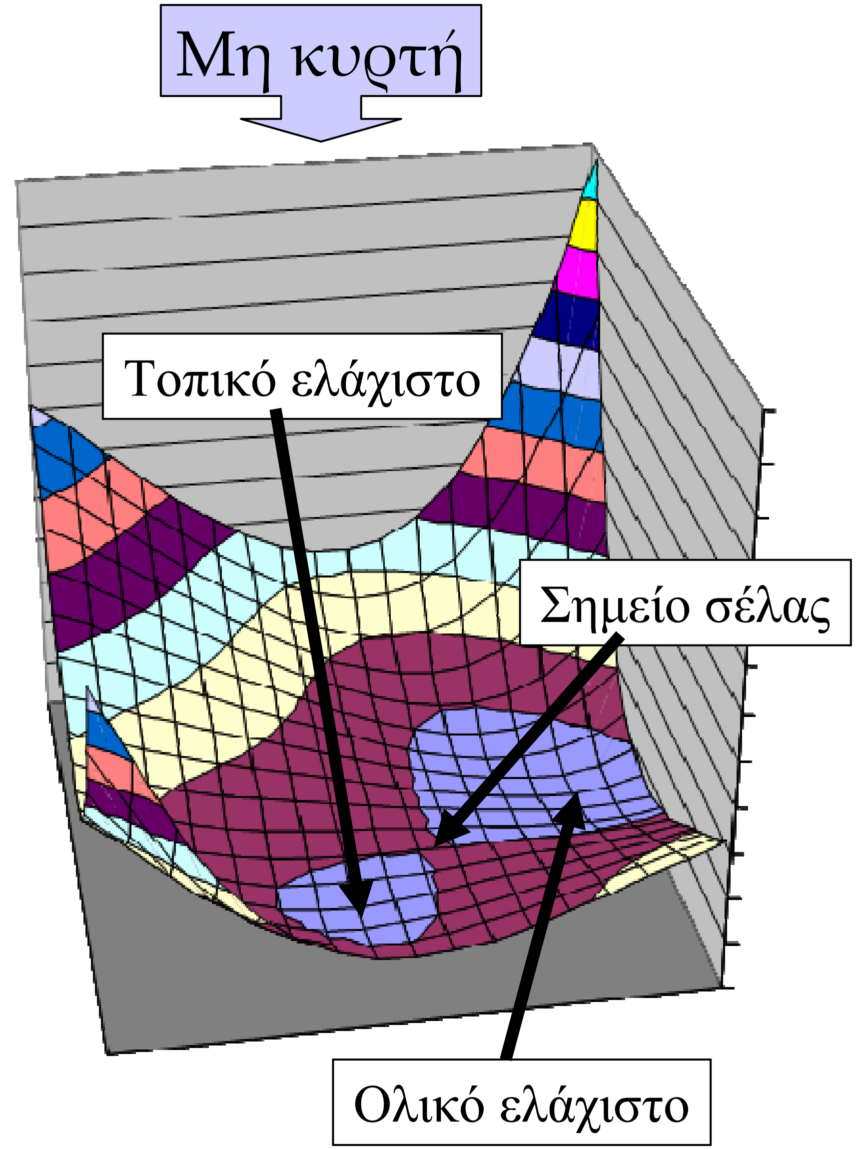
Συνθήκη ακροτάτου: $\mathrm{grad}(f) = \mathbf{0}$

Εντοπισμός ελαχίστου με τη μέθοδο της πιο απότομης κατάβασης

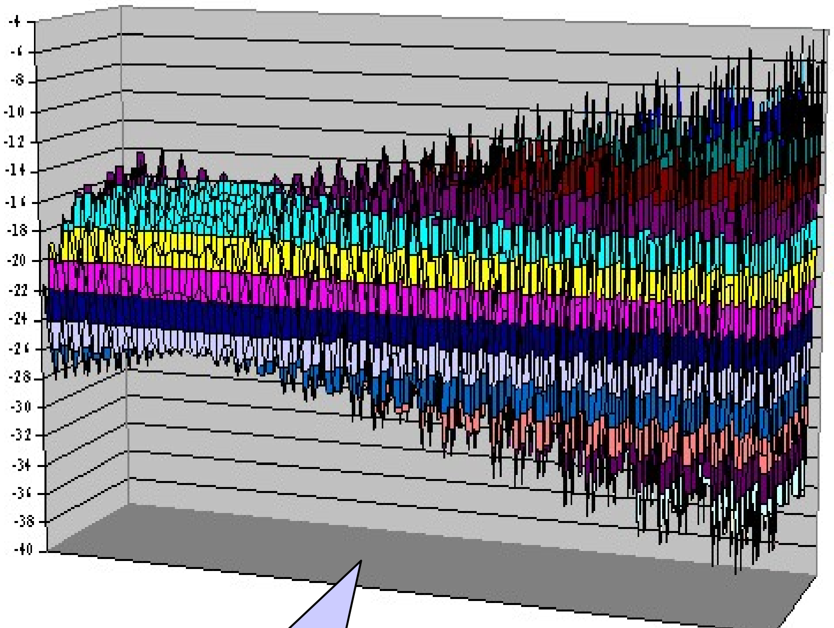


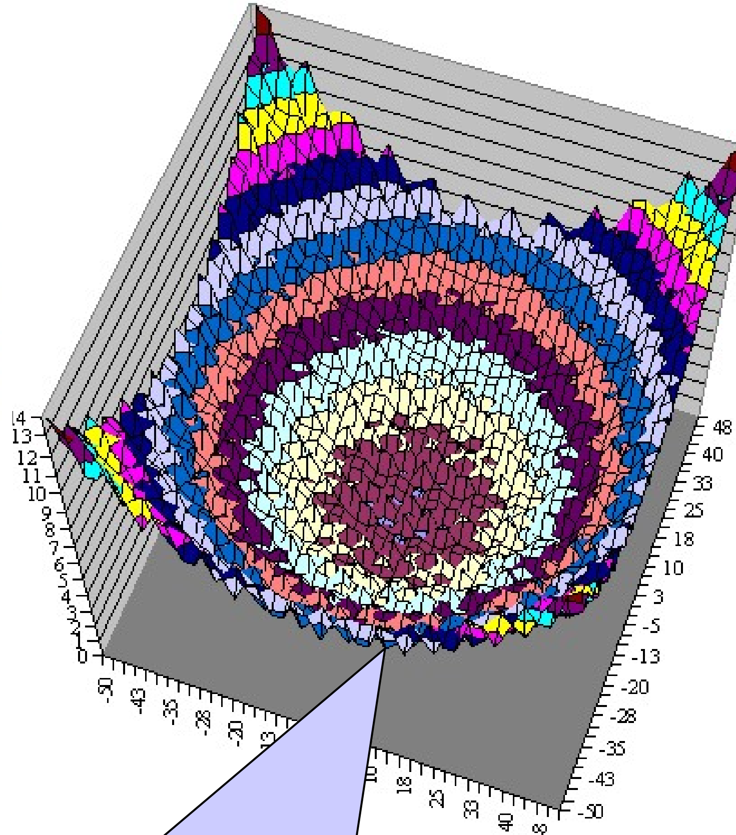
Κυρτές και μη κυρτές διανυσματικές συναρτήσεις





Παραδείγματα έντονα μη κυρτών (πολυκόρυφων) διανυσματικών συναρτήσεων





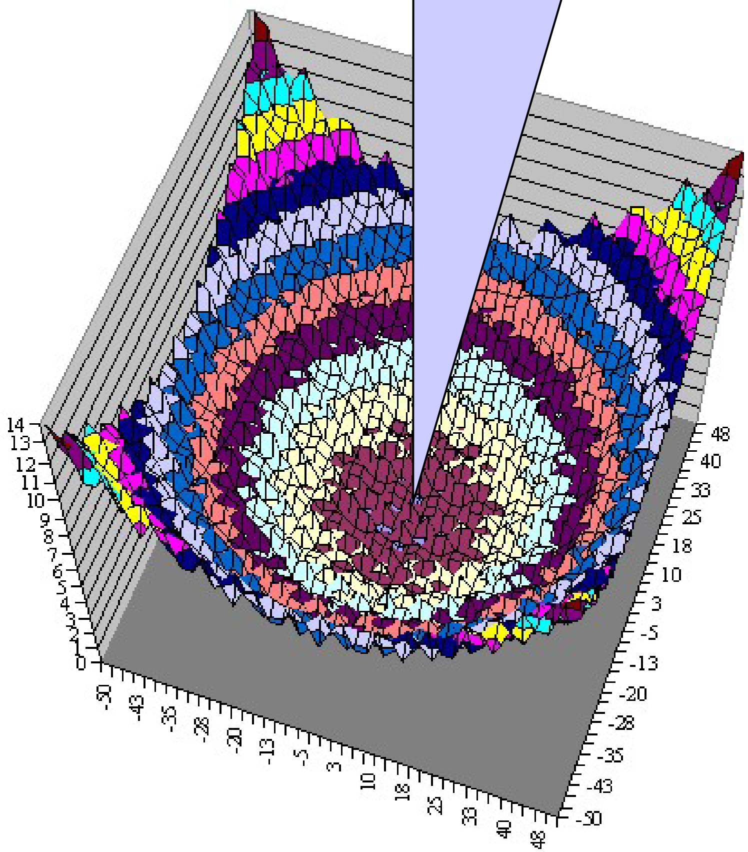
Συνάρτηση Michalewicz
$f(x_1, x_2) = -21.5 + x_1 \sin(4\pi\, x_1) + x_2 \sin(20\pi\, x_2)$

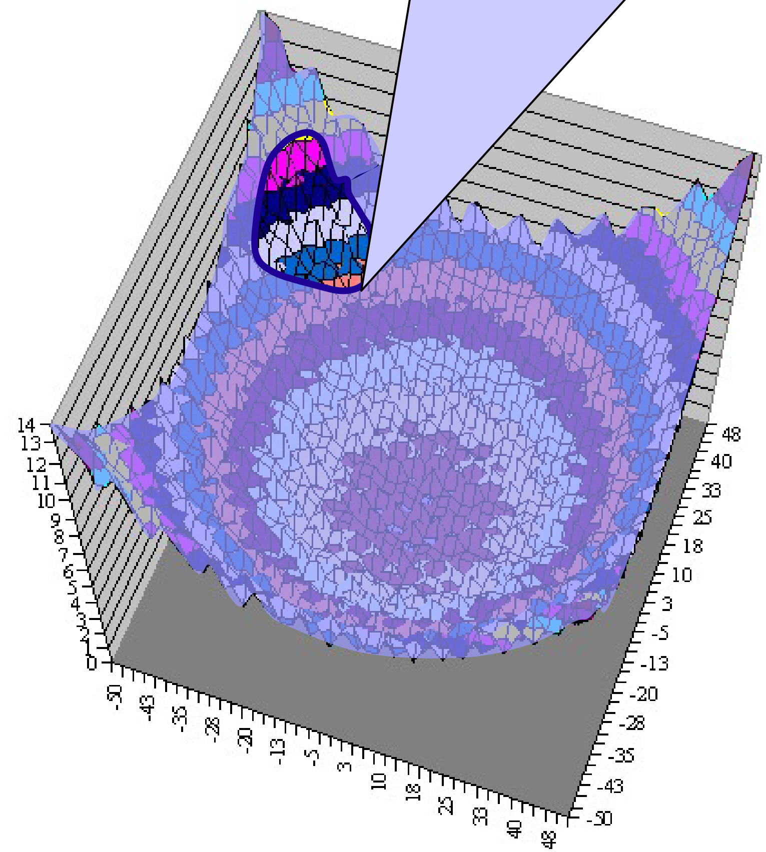
Συνάρτηση Griewank (για $n = 2$)
$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_{12} + x_2^2 + \dots + x_n^2)/400 - \cos(x_1/\sqrt{1}) \cos(x_2/\sqrt{2}) \dots \cos(x_n/\sqrt{n}) + 1$

Η έννοια των περιορισμών και της εφικτής περιοχής

Ελαχιστοποίηση χωρίς περιορισμούς: το ολικό ελάχιστο είναι εδώ

Εισαγωγή περιορισμού με εφικτή περιοχή τη μη γραμμοσκιασμένη: το ολικό ελάχιστο μετατίθεται εδώ



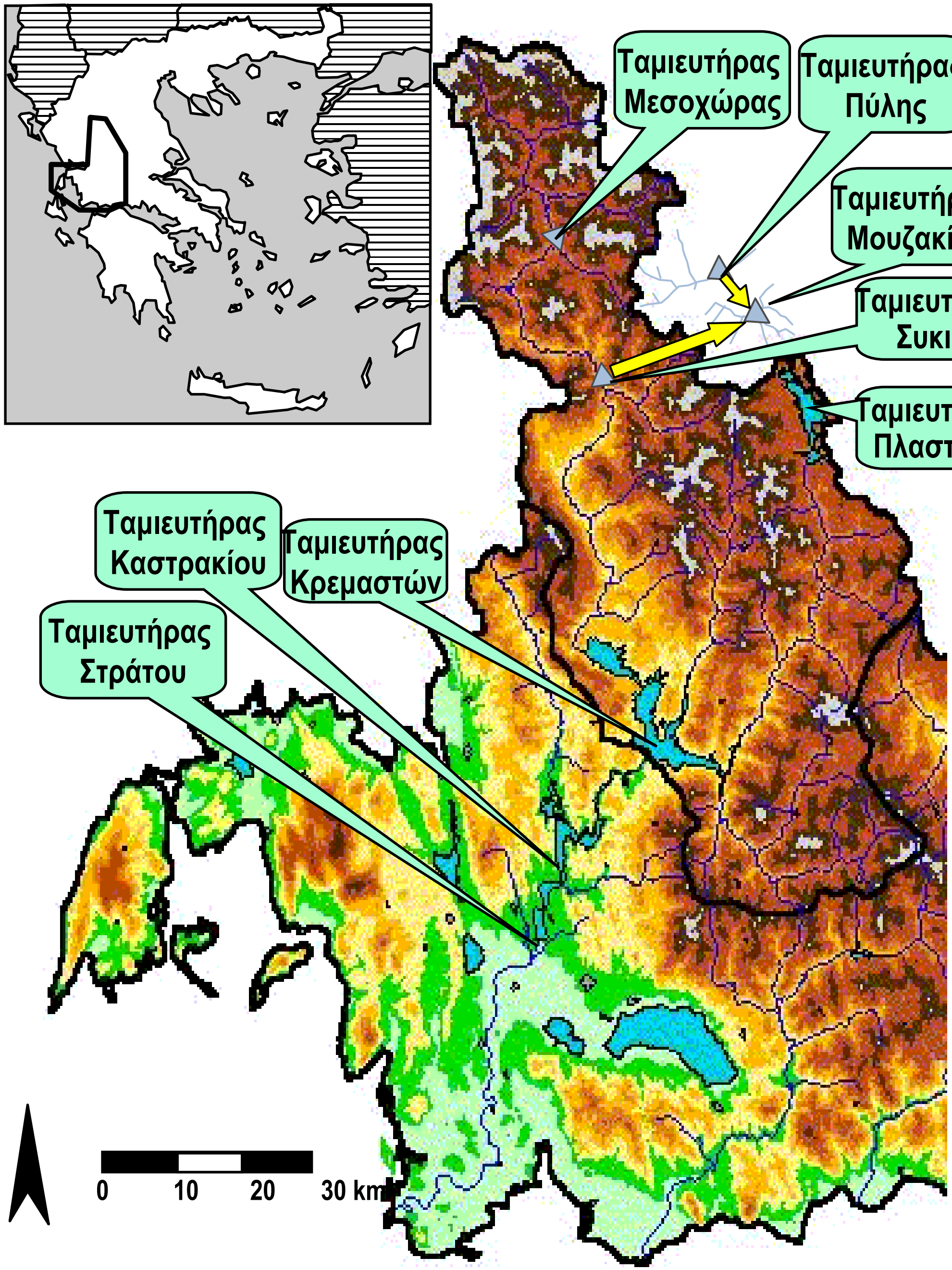


Εντοπισμός ολικού ακροτάτου σε πολυκόρυφες διανυσματικές συναρτήσεις

- Δεν υπάρχει εγγυημένη μεθοδολογία εντοπισμού του ολικού ακροτάτου
- Μέθοδοι κλασικών μαθηματικών (π.χ. της πιο απότομης κατάβασης) ➔ εγκλωβισμός σε τοπικά ακρότατα
- Μέθοδοι διακριτοποίησης και απαριθμητικής αναζήτησης ➔ «κατάρα» της διαστατικότητας
- Μέθοδοι τυχαίας αναζήτησης ➔ αργή & μη αντικειμενική διαδικασία
- Μέθοδοι συνδυασμού κλασικών μαθηματικών και τυχαίας αναζήτησης ➔ η πιο πρόσφορη μέθοδος αλλά δεν εγγυάται τον εντοπισμό της βέλτιστης λύσης
- Παράδειγμα: Προσομοιωμένη ανόπτηση ➔ προσδιορίζουμε την κατεύθυνση κατάβασης αλλά επιτρέπουμε να κινηθούμε και ανάποδα (με δεδομένη πιθανότητα) για να αποφύγουμε τον εγκλωβισμό

Παρατηρήσεις για προβλήματα βελτιστοποίησης υδατικών πόρων

- Τα προβλήματα περιλαμβάνουν πολλές μεταβλητές ελέγχου
- Η στοχική συνάρτηση δεν είναι δεδομένη. Συχνά υπάρχουν πολλές που συνδέονται με την οικονομικότητα, την αξιοπιστία, την ποιότητα του νερού, κ.ά.
- Περιορισμοί υπάρχουν πάντα
- Τόσο η στοχική συνάρτηση, όσο και οι περιορισμοί δεν έχουν απλές μαθηματικές εκφράσεις. Συνήθως μπορούν να προσδιοριστούν τιμές τους για δεδομένες τιμές των μεταβλητών ελέγχου μέσα από αριθμητικές διαδικασίες (π.χ. προσομοίωση)
- Τα προβλήματα είναι συνήθως μη κυρτά και οι στοχικές συναρτήσεις πολυκόρυφες. Εξαίρεση: γραμμικά προβλήματα
- Το ουσιαστικότερο (και ξεχωριστό για κάθε πρόβλημα) μέρος είναι η κατάστρωση του προβλήματος. Για το αλγοριθμικό μέρος προσφέρονται σήμερα πολλές επιλογές



Τελικό παράδειγμα: Μελέτη του υδροσυστήματος Αχελώου-Θεσσαλίας

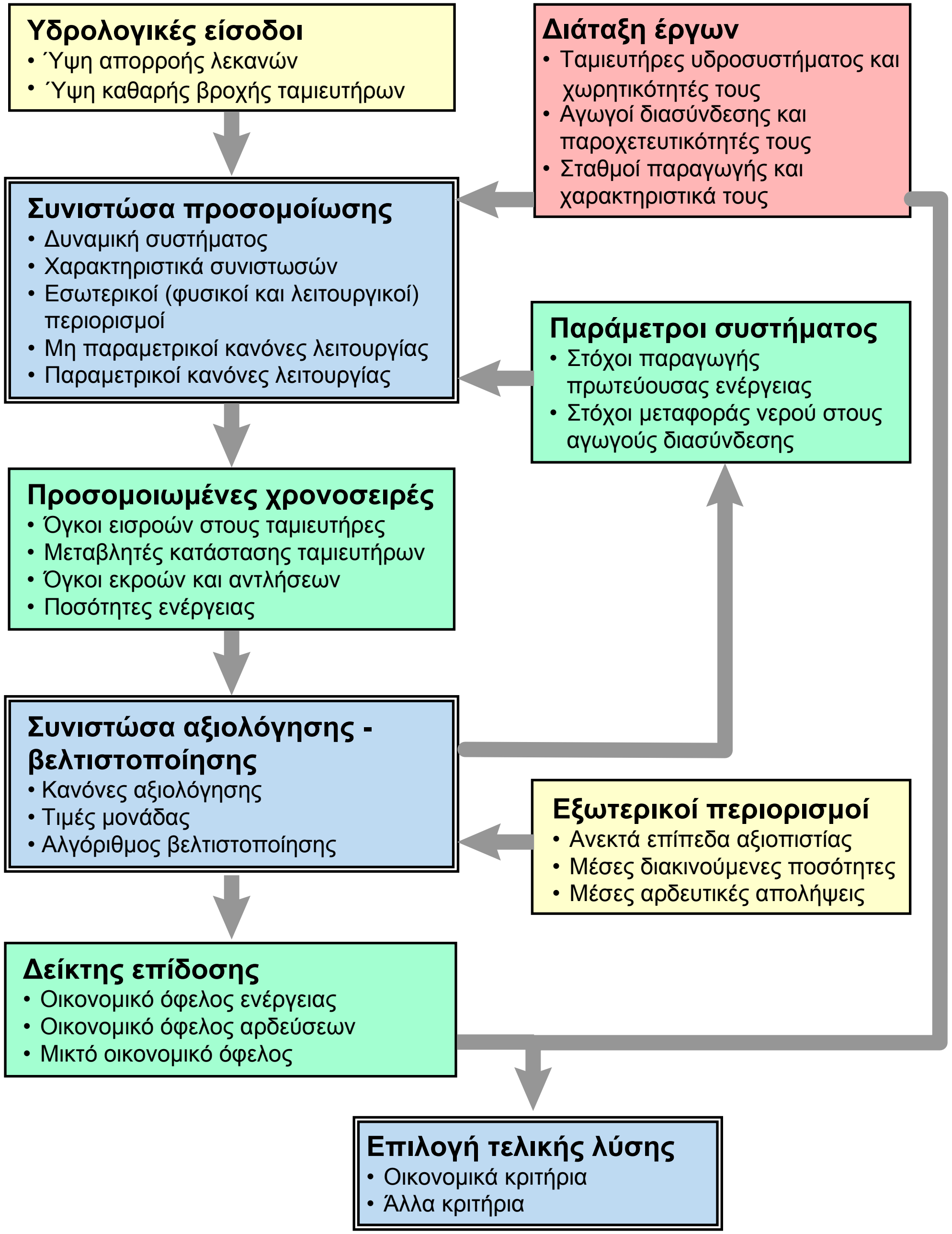
- 5 ταμιευτήρες στον Αχελώο (+Πλαστήρα)
- Σενάριο εκτροπής στη Θεσσαλία με 2 επιπλέον ταμιευτήρες
- 7 υδροηλεκτρικοί σταθμοί (κατά μέγιστο)
- Σύστημα αγωγών εκτροπής
- Κύρια χρήση: Υδροηλεκτρική ενέργεια
- Δευτερεύουσα χρήση: άρδευση
- Περιβαλλοντικές δεσμεύσεις

Σχηματοποίηση του υδροσυστήματος Αχελώου - Θεσσαλίας

Η σχηματοποίηση βοηθά:

- Στην κατανόηση της λειτουργίας του συστήματος
- Στην οργάνωση των πληροφοριών
- Στην αναγνώριση των ουσιωδών στοιχείων
- Στην κατασκευή του μαθηματικού μοντέλου

Πηγή: Κουτσογιάννης, Δ., Μελέτη λειτουργίας ταμιευτήρων, *Γενική διάταξη έργων εκτροπής Αχελώου προς Θεσσαλία*, Ανάδοχος: Ειδική Υπηρεσία Δημοσίων Έργων Αχελώου - Γενική Γραμματεία Δημοσίων Έργων - Υπουργείο Περιβάλλοντος, Χωροταξίας και Δημόσιων Έργων, Συνεργαζόμενοι: Γ. Καλαούζης, ELECTROWATT, Π. Μαρίνος, Δ. Κουτσογιάννης, 420 σελίδες, 1996.



Διάρθρωση του συνολικού μαθηματικού μοντέλου του υδροσυστήματος Αχελώου-Θεσσαλίας

Στόχος του μοντέλου: Επαναθεώρηση της Γενικής Διάταξης των Έργων Εκτροπής του Αχελώου προς τη Θεσσαλία (Ρυθμιστικοί όγκοι, υδροηλεκτρικοί σταθμοί) με στόχο τη μεγιστοποίηση του οικονομικού οφέλους από παραγωγή ενέργειας και γεωργική αξιοποίηση