Διαχείριση Υδατικών Πόρων

Εκτίμηση και διαχείριση αβεβαιότητας με τεχνικές προσομοίωσης

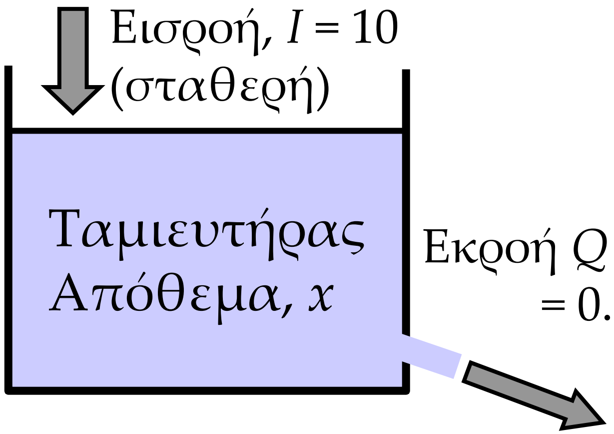
Δημήτρης Κουτσογιάννης
Τομέας Υδατικών Πόρων
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Η σημασία της πρόβλεψης στη διαχείριση υδατικών συστημάτων

- Θα έχουμε νερό την επόμενη χρονιά;
- Αν φτιάξουμε έναν ταμιευτήρα με άλφα διαστάσεις, πόσο νερό θα μας δίνει κάθε χρόνο;
- Ποιες πρέπει να είναι οι διαστάσεις ενός ταμιευτήρα για να μπορεί να μας δίνει βήτα ποσότητα νερού κάθε χρόνο;
- Αν σήμερα εφαρμόσουμε μια γάμα πολιτική απολήψεων από έναν ταμιευτήρα, ποιες θα είναι οι επιπτώσεις σε πέντε χρόνια;

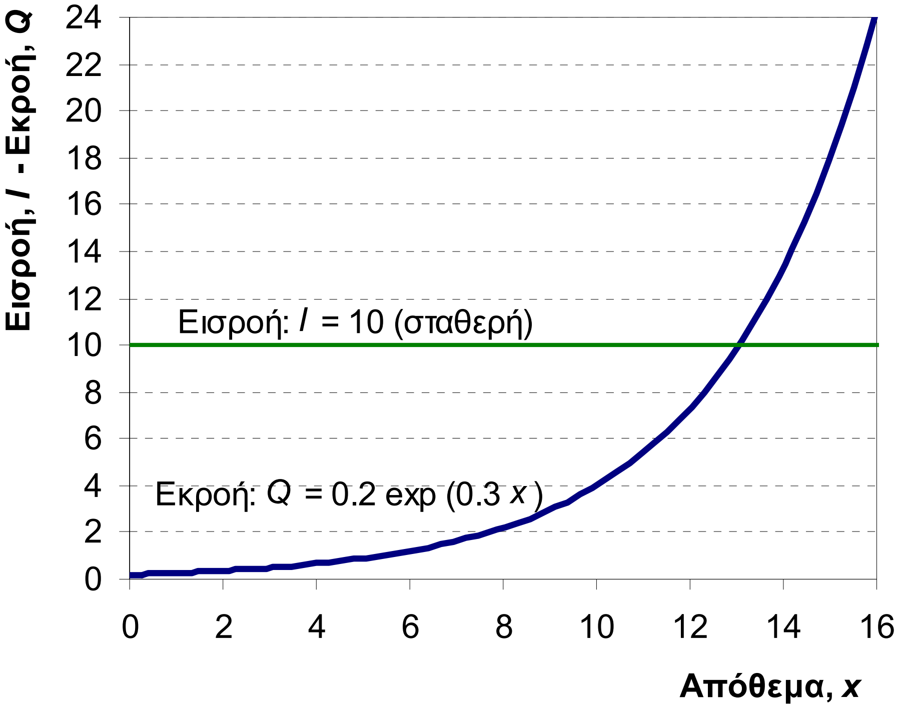
Στη διαχείριση υδατικών πόρων οι χρονικοί ορίζοντες μελέτης είναι πολυετείς

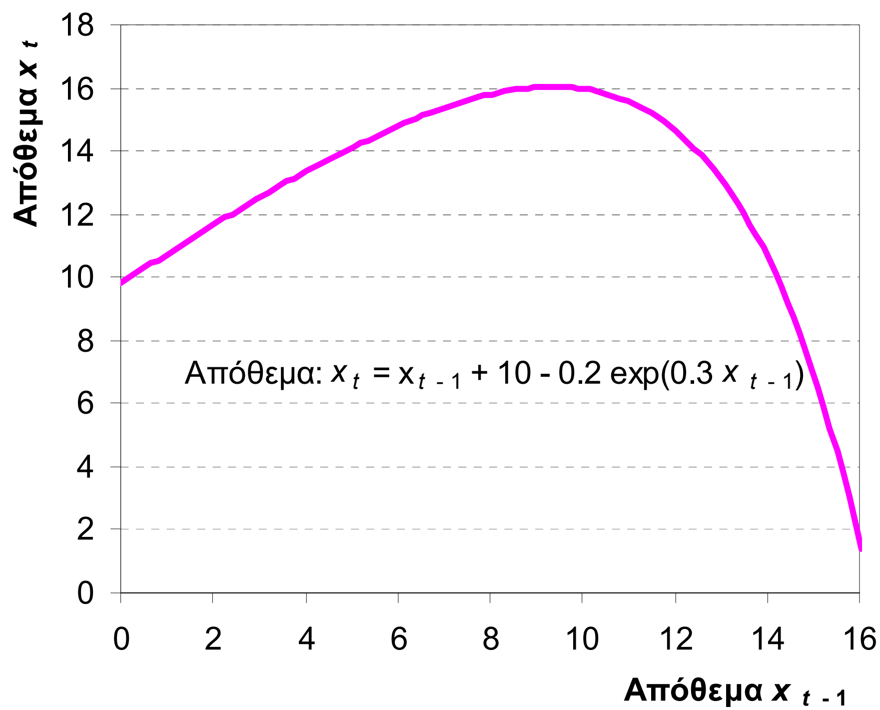
Δυνατότητες πρόβλεψης – Ένα απλό παράδειγμα



Εξίσωση εξέλιξης συστήματος

$$x_t = x_{t-1} + 10 - 0.2\, e^{0.3\, x_{t-1}}$$



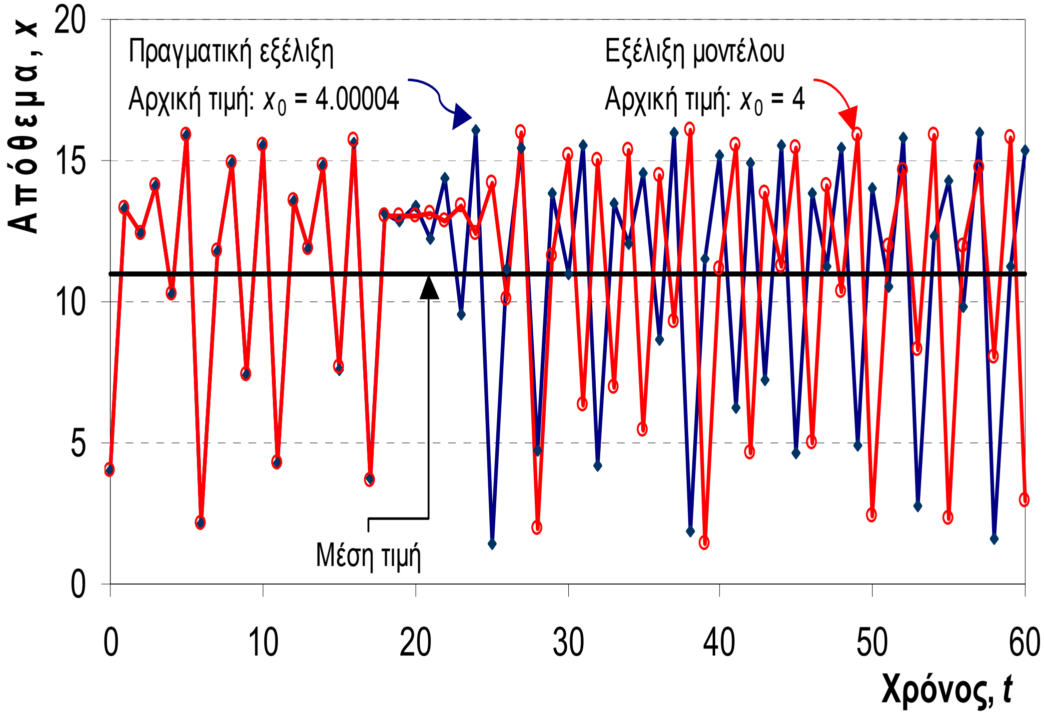


Απλοί αριθμητικοί υπολογισμοί του παραδείγματος

Εξίσωση εξέλιξης συστήματος

$$x_t = x_{t-1} + 10 - 0.2\, e^{0.3\, x_{t-1}}$$

Χρόνος	Απόθεμα	Απόθεμα
0	4.00004	4.00000
1	13.33601	13.33598
2	12.40761	12.40768
3	14.13587	14.13576
⋮	⋮	⋮
22	14.33236	12.87899
23	9.59670	13.35076
24	16.03737	12.37389
25	1.46130	14.18540



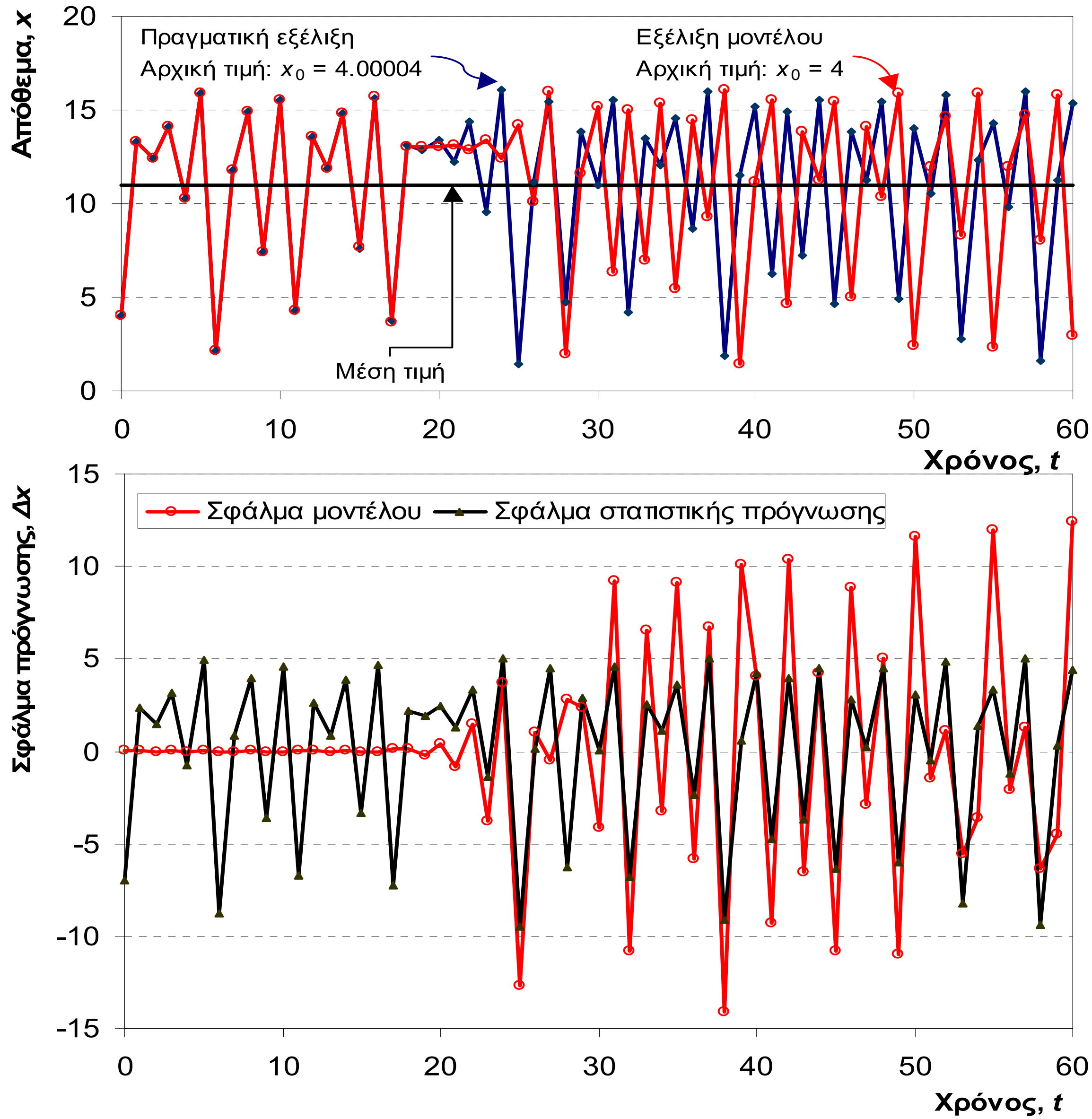
Συνέχεια και τέλος παραδείγματος

Ποιά είναι η καλύτερη πρόγνωση;

(α) του μοντέλου, με αρχική τιμή $x_0 = 4$ (αντί της πραγματικής αλλά άγνωστης τιμής $x_0 =$ 4.00004)

ή

(β) η στατιστική, π.χ. χρησιμοποιώντας τη μέση τιμή $\overline{x} = 11$



Συμπέρασμα

Όπως διατυπώθηκε από το γάλλο μαθηματικό Henri Poincare (≈1900)

"Ακόμα και αν οι φυσικοί νόμοι δεν είχαν άλλα μυστικά από εμάς, θα μπορούσαμε να ξέρουμε την αρχική κατάσταση μόνο κατά προσέγγιση. Αν αυτό μας επιτρέπει να προβλέψουμε τη μεταγενέστερη κατάσταση με τον ίδιο βαθμό προσέγγισης, αυτό αρκεί να πούμε ότι το φαινόμενο είχε προβλεφθεί, ότι υπόκειται σε νόμους. Όμως, το ζήτημα δεν είναι πάντοτε έτσι: υπάρχει περίπτωση οι πολύ λεπτές διαφορές στις αρχικές συνθήκες να παράγουν πολύ μεγαλύτερες διαφορές στα τελικά φαινόμενα, ένα ελάχιστο σφάλμα στην αρχή να προκαλεί ένα τεράστιο σφάλμα στο τέλος. Η πρόβλεψη τότε γίνεται αδύνατη κι έτσι έχουμε το φαινόμενο της τύχης."

Χάος

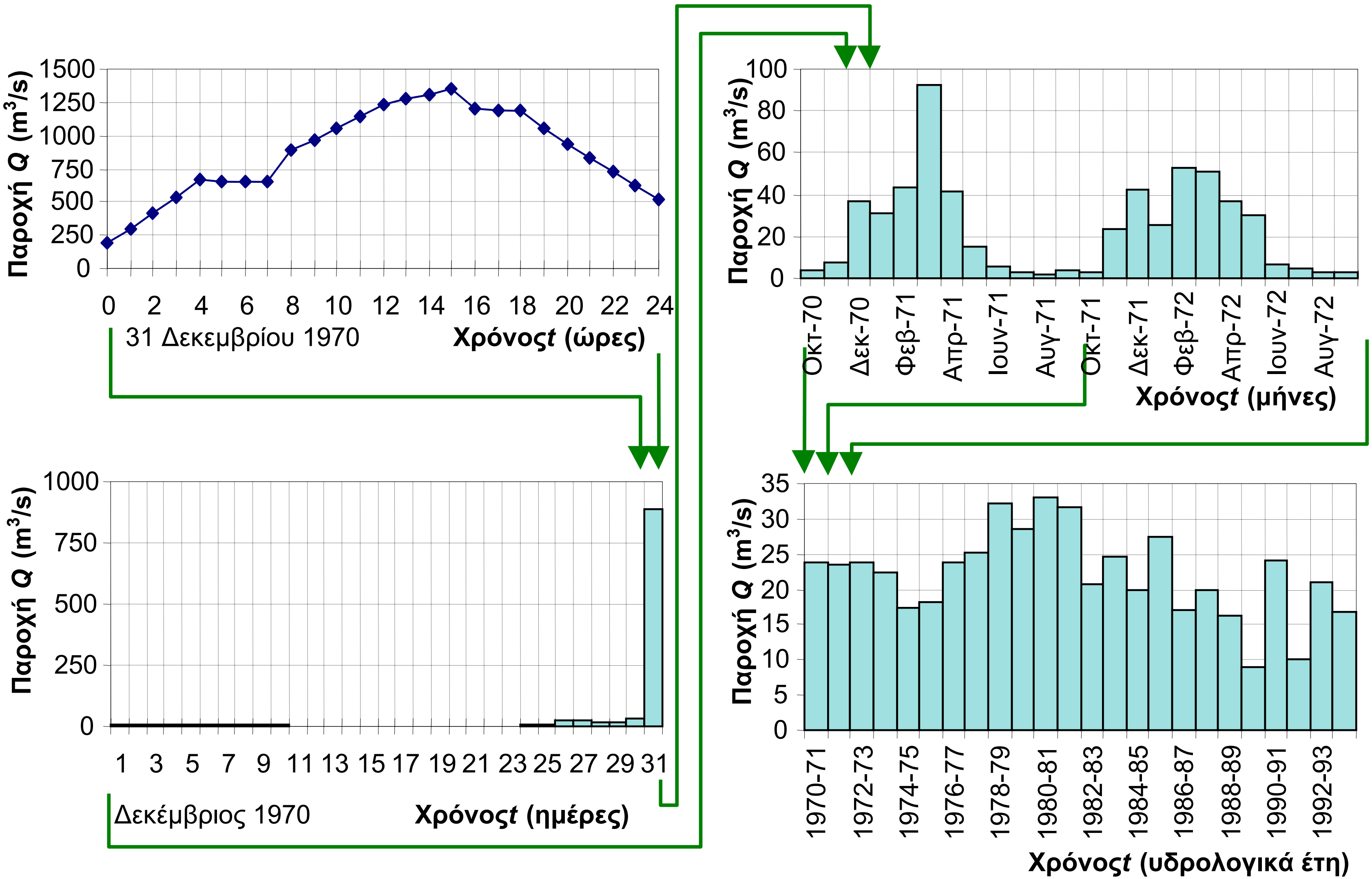
Γενικές αρχές στην αντιμετώπιση της διαχείρισης υδατικών πόρων

... και όχι μόνο

1. Αποδοχή της αβεβαιότητας
   - Αδυναμία μακροπρόθεσμης ακριβούς (ντετερμινιστικής) πρόγνωσης
   - Χρήση προγνώσεων πιθανοτικού – στατιστικού τύπου (ποσοτικοποίηση της αβεβαιότητας)
2. Αποδοχή της διακινδύνευσης (του ρίσκου)
   - Αδυναμία εξασφάλισης πλήρους ασφάλειας (δεν μπορούμε να βάλουμε όρια στη φύση)
   - Ποσοτικοποίηση με βάση τη θεωρία πιθανοτήτων
   - Υιοθέτηση ανεκτού επιπέδου διακινδύνευσης, σε όρους πιθανότητας (π.χ. 1%)

Στη διαχείριση των υδατικών πόρων έχουν ιδιαίτερη σημασία τα μαθηματικά της αβεβαιότητας

Η πραγματική διακύμανση των υδρολογικών μεγεθών σε διάφορες χρονικές κλίμακες



Δεδομένα: Παροχή Ευήνου στη θέση Πόρος Ρηγανίου – Πηγή: Κουτσογιάννης και Ξανθόπουλος (1999)

Η συμπεριφορά των υδρολογικών μεγεθών (διακύμανση στο χρόνο)

- Τυχαία συμπεριφορά, αλλά σύνθετη
- Κανονικοί κύκλοι στην κλίμακα των εποχών του έτους (εποχιακή διακύμανση)
- Τυχαίες διακυμάνσεις (ακανόνιστοι κύκλοι) σε άλλες χρονικές κλίμακες
- Χρονική και χωρική εξάρτηση
- Εμμονή σε όλες τις κλίμακες

Διαφοροποίηση της συμπεριφοράς των υδρολογικών μεταβλητών από απλά τυχαία φαινόμενα

Ρουλέτα	**Παροχή ποταμού**
Διακριτό και πεπερασμένο σύνολο δυνατών τιμών (0, 1, ..., 36)	Συνεχές και άπειρο σύνολο δυνατών τιμών, από 0 μέχρι +∞. Ο ρυθμός με τον οποίο τείνει στο άπειρο δεν είναι ο ελάχιστος δυνατός (Φαινόμενο Νώε)
Σταθερή συμπεριφορά στο χρόνο	Μεταβαλλόμενη συμπεριφορά (κανονική μεταβολή με τις εποχές – ακανόνιστη σε άλλες κλίμακες)
Γνωστή *a priori* πιθανότητα εμφάνισης κάθε τιμής (1/37)	Κατανομή πιθανοτήτων εμπειρικά διαπιστωμένη από μετρήσεις
Το αποτέλεσμα κάθε ρίψης δεν εξαρτάται από την ιστορία των προηγούμενων ρίψεων	Κάθε τιμή εξαρτάται από όλη την ιστορία των προηγούμενων τιμών (Εμμονή: Βραχυπρόθεσμη, μακροπρόθεσμη)

Δυσκολία στον τρόπο εκτίμησης πιθανοτήτων σύνθετων γεγονότων

- Παράδειγμα: Αν (α) χαρακτηρίσουμε ως ξηρό έτος κάθε έτος στο οποίο ο ετήσιος όγκος απορροής ενός ποταμού είναι μικρότερος ή ίσος των 3 km^3, και (β) γνωρίζουμε ότι η πιθανότητα ενός ξηρού έτους είναι 1/10, ποιά είναι η πιθανότητα δύο διαδοχικά χρόνια να είναι ξηρά;

Απάντηση:
Δεν είναι εύκολο να δοθεί με κλασικές μαθηματικές μεθόδους

- Αντίστοιχο παράδειγμα στη ρουλέτα: ποια είναι η πιθανότητα σε δύο διαδοχικές ρίψεις να έχουμε αποτέλεσμα μικρότερο ή ίσο του 3;

Απάντηση:
$(4/37)^2$

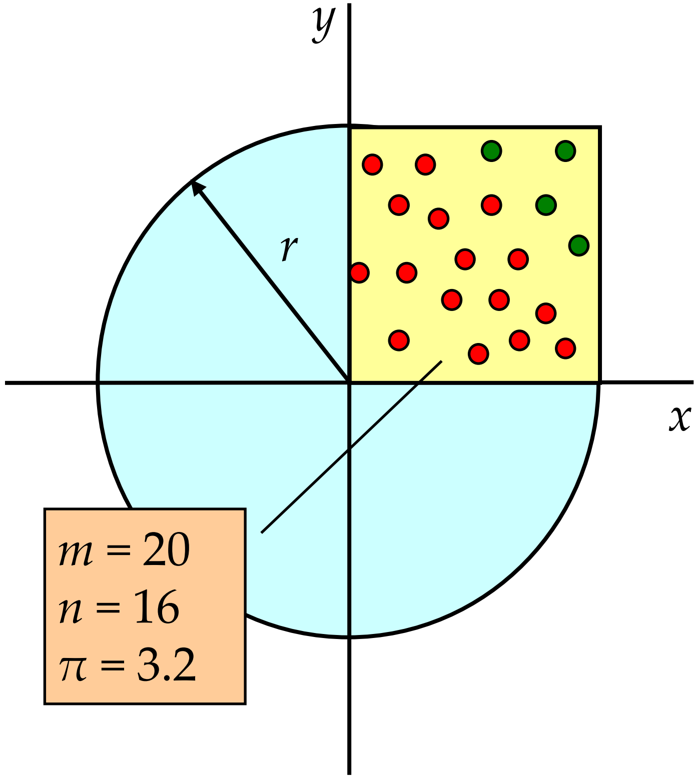
Επιστημονικοί κλάδοι που επιστρατεύονται για την απάντηση στο προηγούμενο ερώτημα

1. **Θεωρία πιθανοτήτων**: Θεμέλιο των υπολογισμών
2. **Στατιστική**: Εκτίμηση της κατανομής πιθανότητας με βάση ένα δείγμα μετρήσεων της παροχής
3. **Θεωρία στοχαστικών ανελίξεων**: Μαθηματική περιγραφή της εξάρτησης των μεγεθών στο χρόνο
4. **Προσομοίωση**: Υπολογιστική μαθηματική τεχνική – Βασίζεται στον πειραματισμό πάνω σε συνθετικές σειρές

Ιστορία της στοχαστικής προσομοίωσης (ή μεθόδου Monte Carlo)

- Συνδυάζεται με την ανάπτυξη των των μαθηματικών και της φυσικής στα μέσα του 20ου αιώνα αλλά και των υπολογιστών
- Ανακαλύφθηκε από τον πολωνό μαθηματικό Stanislaw Ulam (εργαζόταν στην ομάδα του Los Alamos) το 1946 (Metropolis, 1989, Eckhardt, 1989)
- Αμέσως μετά, η μέθοδος χρησιμοποιήθηκε για την επίλυση προβλημάτων συγκρούσεων ουδετερονίων από τους φυσικούς και μαθηματικούς του Los Alamos (John von Neumann, Nicholas Metropolis, Enrico Fermi), αφού κωδικοποιήθηκε στον πρώτο υπολογιστή ENIAC
- Η «επίσημη» ιστορία της μεθόδου ξεκινά με τη δημοσίευση των Metropolis and Ulam (1949)
- Από τη δεκαετία του 1970 η προσομοίωση χρησιμοποιείται σε προβλήματα υδατικών πόρων (παρόλο που τα πρώτα βήματα έγιναν τη δεκαετία του 1950 – Barnes, 1954)
- Η έρευνα για τις στοχαστικές μεθόδους στους υδατικούς πόρους εξακολουθεί και εντείνεται

Ένα απλό παράδειγμα για την έκταση των εφαρμογών της προσομοίωσης



Υπολογισμός του αριθμού π

1. Μέσω μιας γεννήτριας τυχαίων ομοιόμορφων αριθμών παράγονται m ζεύγη (x, y) στο διάστημα [0, 1]
2. Μετριούνται τα σημεία εκείνα τα οποία βρίσκονται μέσα στο τεταρτοκύκλιο, ήτοι τα σημεία για τα οποία ισχύει $x^2 + y^2 \leq 1$
3. Αν n το πλήθος των σημείων αυτών, τότε ο λόγος n / m αποτελεί μέτρο εκτίμησης του αριθμού $\pi / 4$ (λόγος των εμβαδών του τεταρτοκυκλίου προς το τετράγωνο)
4. Η ακρίβεια εκτίμησης του π εξαρτάται από το πλήθος m

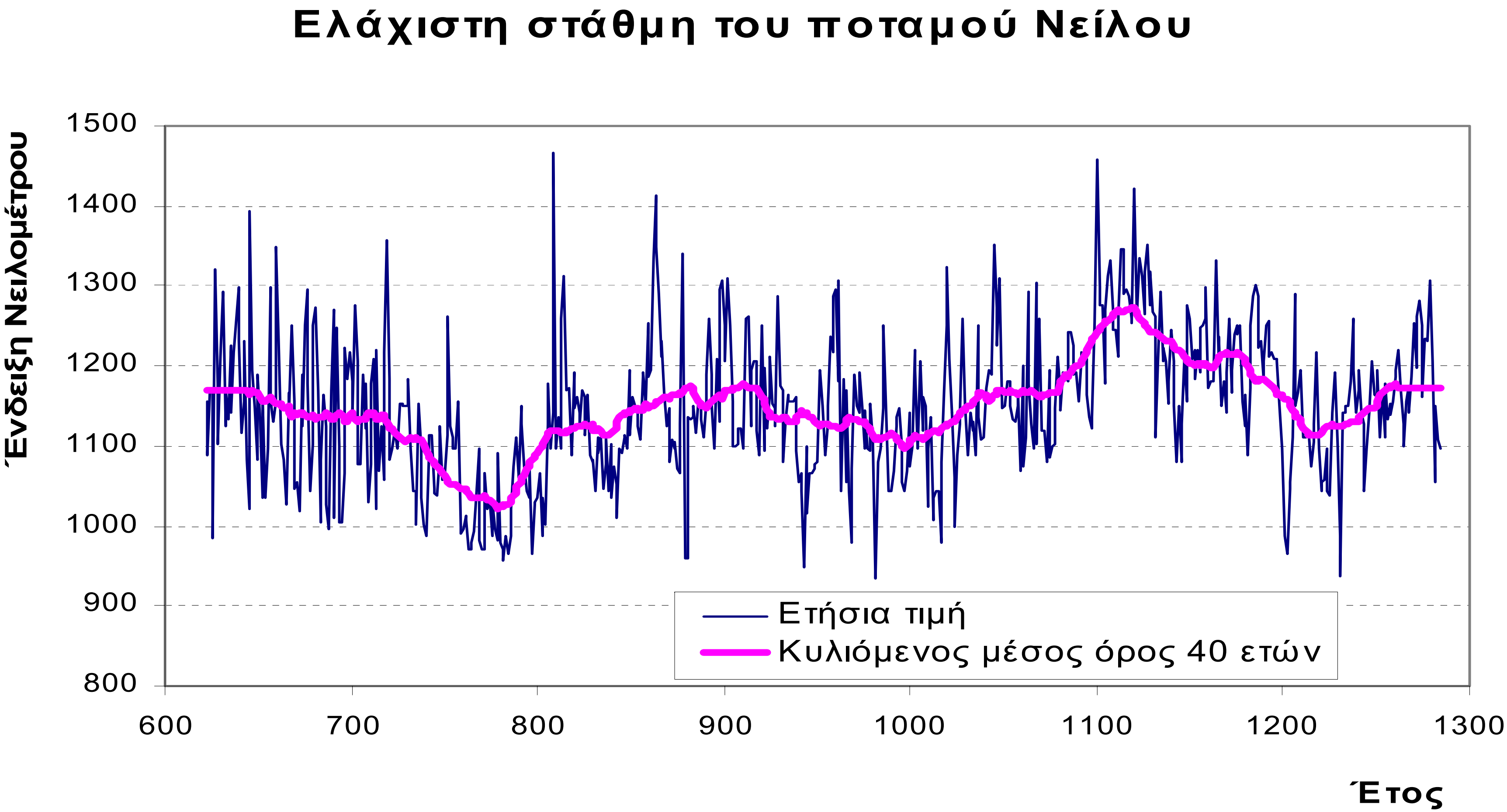
Υδρολογική (γεωφυσική) εμμονή

- Η «περίεργη» (σε σχέση με τις τυχαίες διεργασίες) συμπεριφορά των υδρολογικών και άλλων γεωφυσικών διεργασιών ανακαλύφθηκε από τον άγγλο μηχανικό **E. H. Hurst** (1950) στα πλαίσια της μελέτης του Υψηλού Φράγματος Aswan στο Νείλο ⇒ **Φαινόμενο Hurst**
- Ο πολωνο-γάλλος μαθηματικός και μηχανικός **B. Mandelbrot** (1965) συσχέτισε το φαινόμενο Hurst με τη βιβλική ιστορία για τις επτά παχιές και τις επτά ισχνές αγελάδες ⇒ **Φαινόμενο Ιωσήφ**
- Στατιστικά, το φαινόμενο συνδέεται με συσχετίσεις στο χρόνο, ακόμη και για πολύ μεγάλες χρονικές αποστάσεις ⇒ **Μακρά μνήμη, μακροπρόθεσμη εμμονή, εξάρτηση μακράς εμβέλειας**
- Το φαινόμενο μπορεί να κατανοηθεί ως επαλληλία τυχαίων διακυμάνσεων σε πολλές χρονικές κλίμακες (**D. Koutsoyiannis**, 2002) ⇒ **Διακύμανση πολλών κλιμάκων**
- Ως αποτέλεσμα, οι χρονοσειρές εμφανίζουν ομοιοθετικές ιδιότητες στην αλλαγή χρονικής κλίμακας ⇒ **Ομοιοθετική συμπεριφορά**
- Το φαινόμενο μπορεί να εξηγηθεί με βάση την αρχή της μέγιστης εντροπίας, εφαρμοζόμενη σε πολλές χρονικές κλίμακες (**D. Koutsoyiannis**, 2005)
- Το φαινόμενο διαπιστώθηκε ότι είναι «πανταχού παρόν», όχι μόνο σε γεωφυσικές διεργασίες (π.χ. κλιματικές, υδρολογικές) αλλά και σε τεχνολογικές (π.χ. δίκτυα υπολογιστών) και οικονομικές (π.χ. χρηματιστηριακές)
- Το φαινόμενο έχει δυσμενείς συνέπειες στην αξιοποίηση υδατικών πόρων (αύξηση αβεβαιότητας)

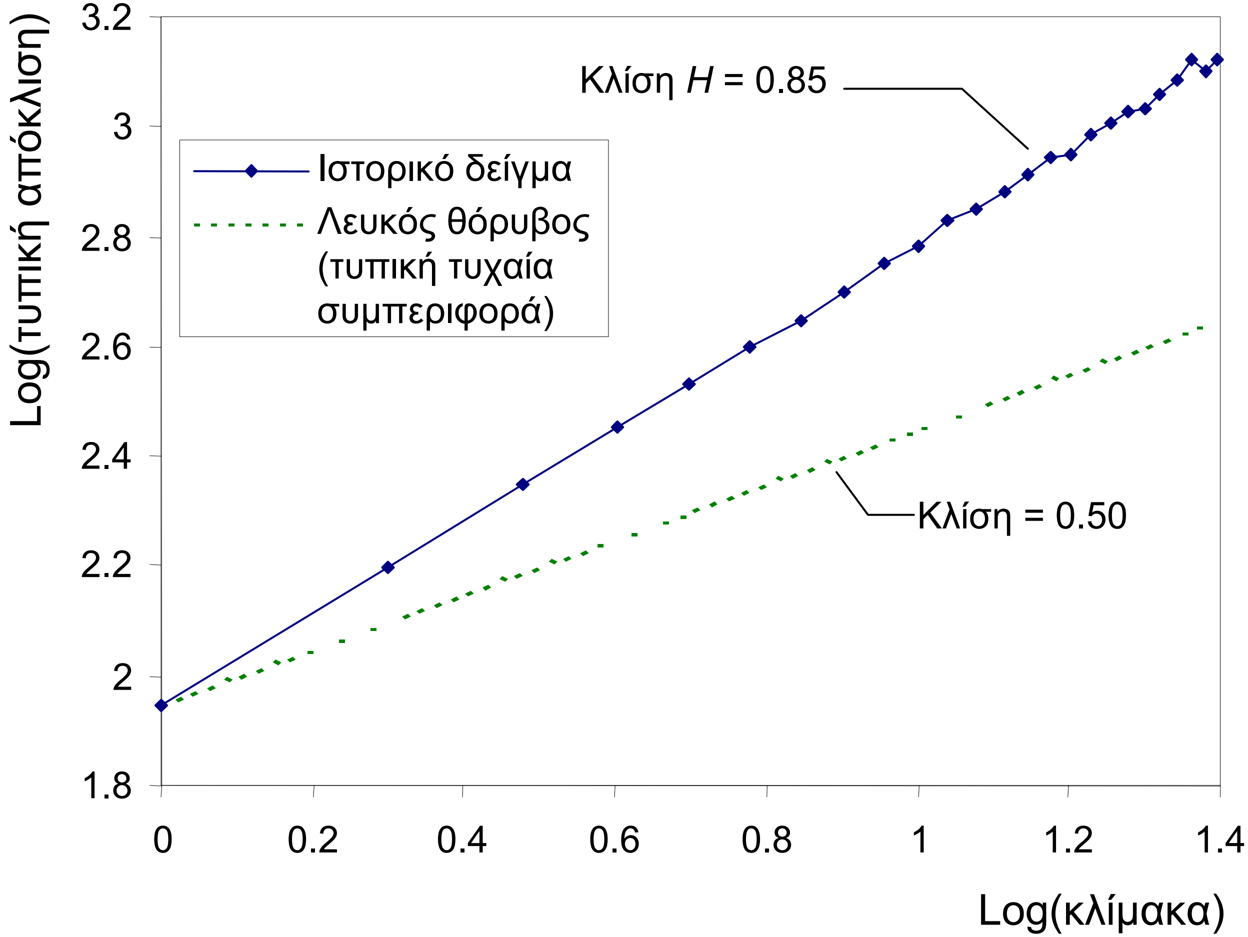
Μαθηματική περιγραφή της υδρολογικής εμμονής

- Το μαθηματικό μοντέλο που χρησιμοποιείται για την περιγραφή του φαινομένου είναι σήμερα γνωστό ως *στοχαστική ανέλιξη αυτο-όμοια* (Self-Similar) ή *απλής ομοιοθεσίας* (Simple Scaling· συντομογραφία SSS Process = Simple Scaling Stochastic Process)
- Την ανέλιξη SSS εισήγαγε για τη μοντελοποίηση της τύρβης ο ρώσος Μαθηματικός **A. Kolmogorov** (1940) που την αποκάλεσε «*σπείρα του Wiener*» (Wiener Spiral)
- Σημαντική στη μελέτη της ανέλιξης SSS είναι η συμβολή του αμερικανού μαθηματικού **J. Lamperti** (1962) που την αποκάλεσε «*ημι-ευσταθή ανέλιξη*» (Semi-Stable process)
- Η σύνδεση της ανέλιξης SSS με το φαινόμενο Hurst έγινε από τον πολωνο-γάλλο μαθηματικό και μηχανικό **B. Mandelbrot** (1965), που την αποκάλεσε «*κλασματικό θόρυβο Brown*» (fractional Brownian noise).

Υδρολογική εμμονή: Διαπίστωση με βάση τη χρονοσειρά του Νειλομέτρου



Υδρολογική εμμονή: Διαπίστωση και ποσοτικοποίηση με βάση τη χρονοσειρά του Νειλομέτρου

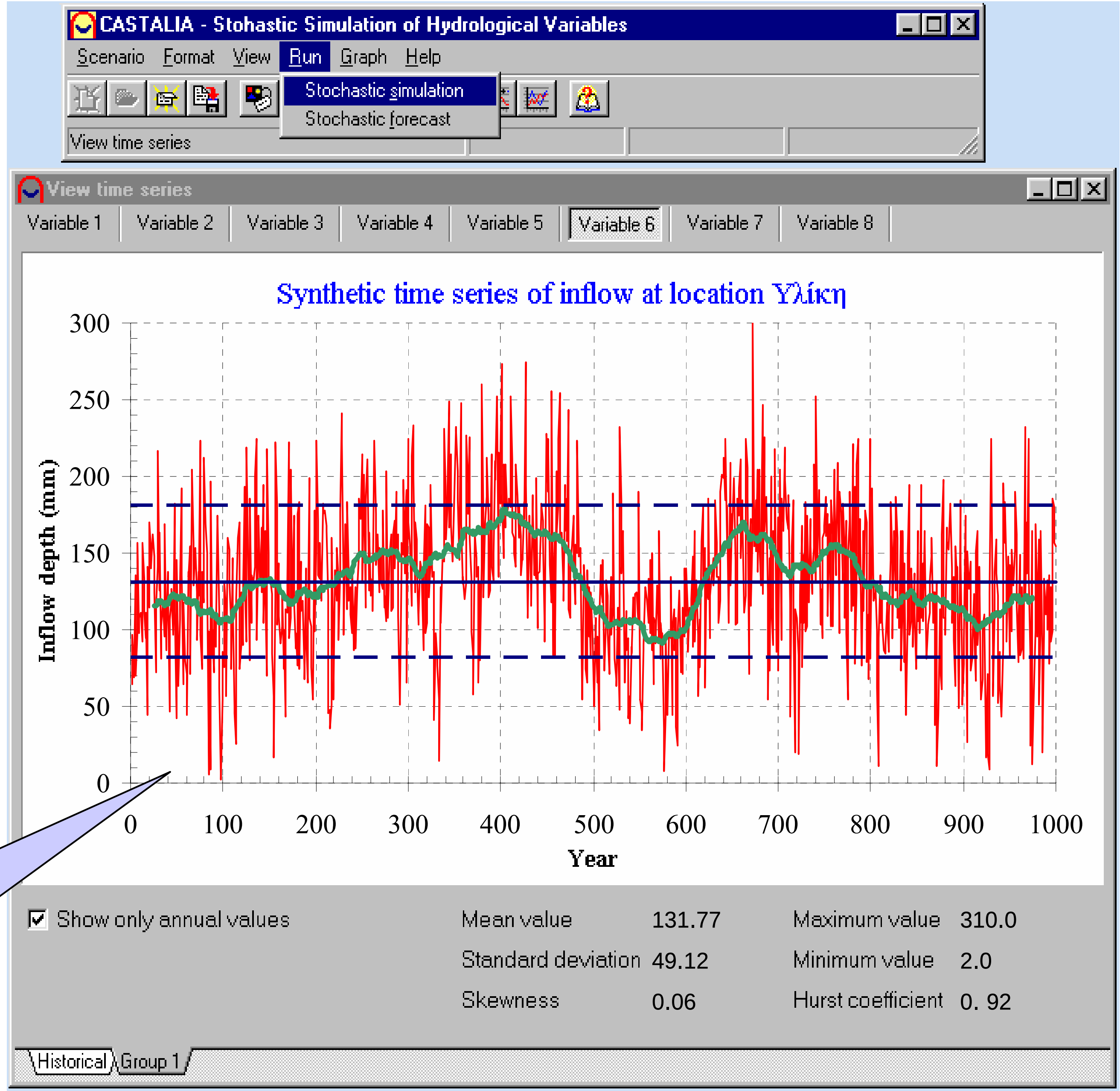


- Ποσοτικά, η υδρολογική εμμονή περιγράφεται από την παράμετρο H που παίρνει τιμές στο διάστημα (0, 1)
- Η τιμή $H = 0.5$ αντιστοιχεί στην τυπική τυχαία συμπεριφορά
- Τιμές $H > 0.5$ αντιστοιχούν σε μακροπρόθεσμη εμμονή
- Τιμές $H < 0.5$ αντιστοιχούν σε αντι-εμμονή (δεν παρατηρούνται στη φύση)

Στοχαστική προσομοίωση φυσικών υδρολογικών διεργασιών

Κατασκευή συνθετικών εισροών 1000 ετών στην Υλίκη με τον υδρολογικό προσομοιωτή «Κασταλία»

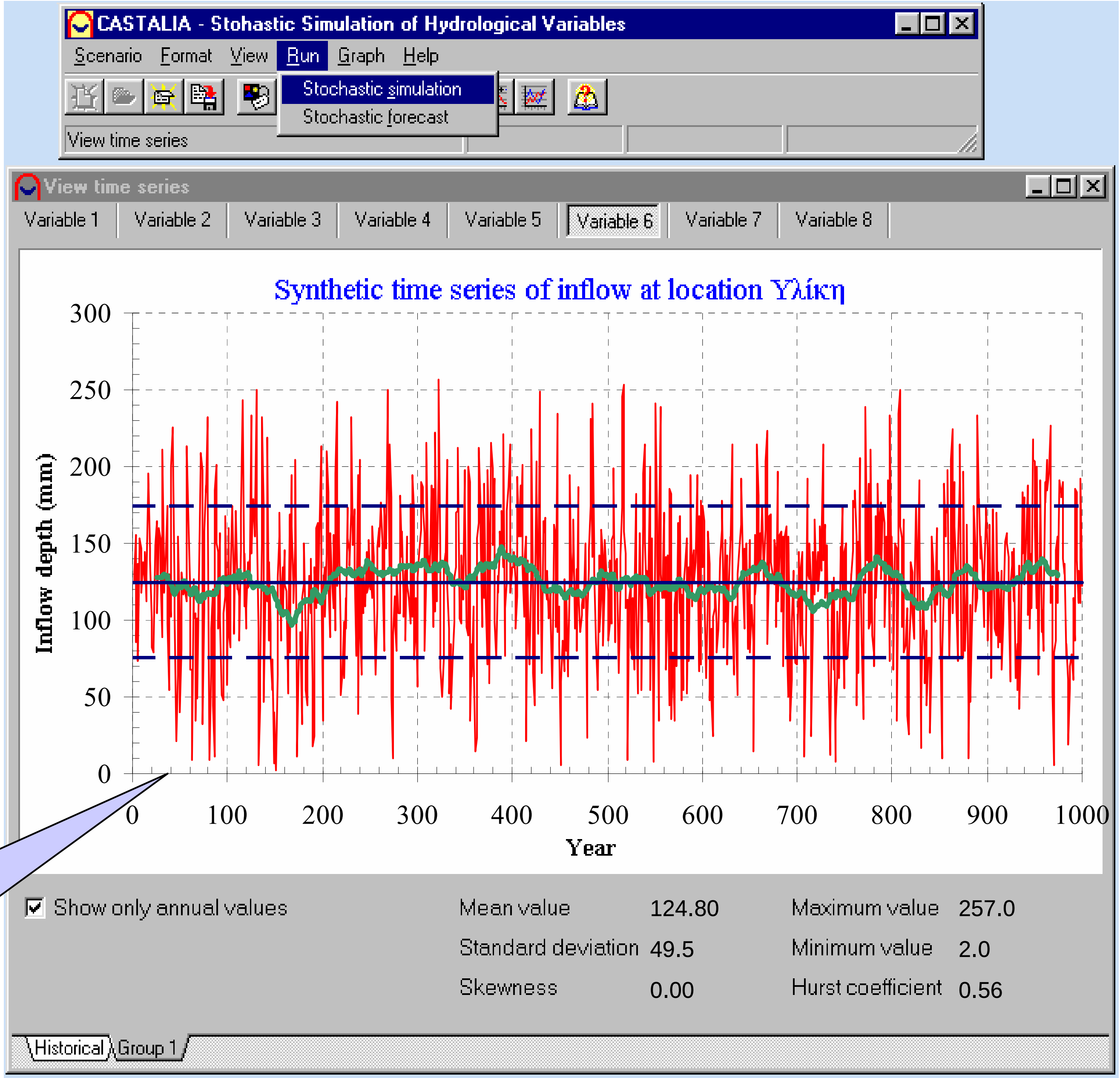
Περίπτωση 1: Με αναπαραγωγή της μακροπρόθεσμης εμμονής



Στοχαστική προσομοίωση φυσικών υδρολογικών διεργασιών (2)

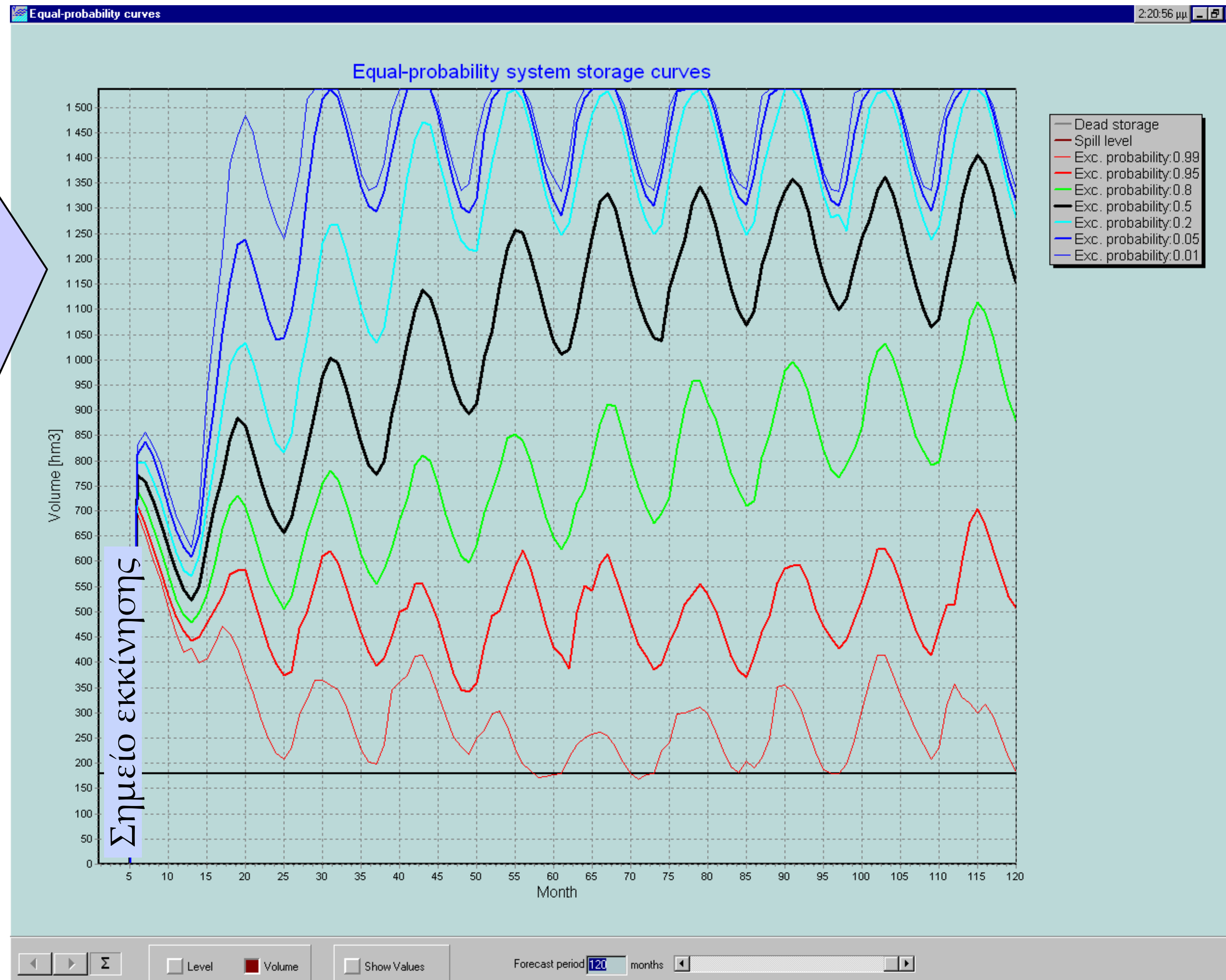
Κατασκευή συνθετικών εισροών 1000 ετών στην Υλίκη με τον υδρολογικό προσομοιωτή «Κασταλία»

Περίπτωση 2: Χωρίς αναπαραγωγή της μακροπρόθεσμης εμμονής



Στοχαστική προσομοίωση ολοκληρωμένου υδροσυστήματος – Εφαρμογή στη στοχαστική πρόγνωση

Εξέλιξη των αποθεμάτων του υδροδοτικού συστήματος της Αθήνας για τα επόμενα 10 χρόνια και για διάφορα επίπεδα πιθανότητας (Εκτίμηση με βάση τα αποτελέσματα 200 προσομοιώσεων με ισάριθμα σενάρια εισροών και με αναπαραγωγή της μακροπρόθεσμης εμμονής)



Βασική διαφοροποίηση στην προσομοίωση των φυσικών και τεχνητών συνιστωσών ενός υδροσυστήματος

- Στις φυσικές συνιστώσες (βροχή, φυσική απορροή) δεν έχουμε δυνατότητα παρέμβασης
- Στις τεχνητές συνιστώσες (φράγματα, υδραγωγεία, αντλιοστάσια) έχουμε δυνατότητα παρέμβασης
- Ασκούμε αυτή τη δυνατότητα σε τρόπο ώστε να έχουμε την καλύτερη δυνατή επίδοση

1. Εντοπισμός και ποσοτική έκφραση των τρόπων παρέμβασης (x_1, x_2, x_3, …) ← **Μεταβλητές ελέγχου**
2. Ποσοτικοποίηση της επίδοσης συναρτήσει των παρεμβάσεων $f(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ ← **Μέτρο επίδοσης ή στοχική συνάρτηση**
3. Εύρεση των τιμών των μεταβλητών ελέγχου που δίνουν την **ακρότατη** (κατά περίπτωση ελάχιστη ή μέγιστη δυνατή) τιμή της $f(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ ← **Αλγόριθμος βελτιστοποίησης**

Αλγοριθμική εφαρμογή της προσομοίωσης: Εισαγωγή στους τυχαίους αριθμούς

- Μια ακολουθία αριθμών x_i λέγεται *ακολουθία τυχαίων αριθμών δεδομένης κατανομής* $F(x)$ αν αποτελεί δείγμα της τυχαίας μεταβλητής X, η οποία έχει συνάρτηση κατανομής $F(x)$ (Papoulis, 1990).
- Η διαδικασία γέννησης τυχαίων αριθμών είναι γνωστή και ως *δειγματοληψία Monte Carlo*.
- Για κάθε συνάρτηση κατανομής μπορεί να κατασκευαστούν *γεννήτριες τυχαίων αριθμών*.
- Η γεννήτρια είναι ένας αλγόριθμος, συνήθως αναδρομικός, ο οποίος μπορεί να παράγει διαδοχικά οσουσδήποτε όρους της τυχαίας ακολουθίας.
- Οι τυχαίοι αριθμοί δεν γεννώνται στην τύχη, αλλά βάσει ενός αυστηρά προσδιοριστικού αλγορίθμου, ο οποίος οδηγεί στην ίδια ακολουθία αριθμών, αν ξεκινήσει με τις ίδιες αρχικές συνθήκες. (Για το λόγο αυτό τους τυχαίους αριθμούς μερικοί τους ονομάζουν *ψευδοτυχαίους*.) Αν αλλάξουμε τις αρχικές συνθήκες παίρνουμε άλλη τυχαία ακολουθία (ακριβέστερα άλλο τμήμα της ίδιας περιοδικής ακολουθίας).

Γέννηση ανεξάρτητων τυχαίων αριθμών με δεδομένη συνάρτηση κατανομής

- Ομοιόμορφη κατανομή
  - Γεννώνται οι ακέραιοι αριθμοί q_i από τον αναδρομικό τύπο $q_i = (k\, q_{i-1} + c) \bmod m$, όπου k, c και m κατάλληλες ακέραιες σταθερές (π.χ. $k = 69069$, $c = 1$, $m = 2^{32} = 4\,294\,967\,296$ ή $k = 7^5 = 16\,807$, $c = 0$, $m = 2^{31} - 1 = 2\,147\,483\,647$· βλ. Ripley, 1987, σ. 39), οι οποίοι αποτελούν τυχαίους αριθμούς ομοιόμορφα κατανεμημένους στο διάστημα $[1, m - 1]$.
  - Υπολογίζονται οι αριθμοί $u_i = q_i / m$ που αποτελούν πρακτικά ακολουθία τυχαίων αριθμών συνεχούς τύπου στο διάστημα (0, 1).
- Τυχούσα κατανομή
  - Αν $F^{-1}(\,)$ η αντίστροφη συνάρτηση της συνάρτησης κατανομής $F(x)$, και u_i διαδοχικοί ομοιόμορφοι τυχαίοι αριθμοί στο διάστημα (0, 1), τότε οι αριθμοί

$$w_i = F^{-1}(u_i)$$

    αποτελούν διαδοχικούς όρους ακολουθίας τυχαίων αριθμών με συνάρτηση κατανομή $F(x)$.

Στο Excel η συνάρτηση rand() γεννά τυχαίους αριθμούς με ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα [0, 1] και η συνάρτηση normsinv(rand()) τυχαίους αριθμούς με κανονική κατανομή $N(0, 1)$.

Γέννηση τυχαίων αριθμών με μακροπρόθεσμη εμμονή: Η μέθοδος του συμμετρικού κυλιόμενου μέσου (SMA)

Το σχήμα συμμετρικού κυλιόμενου μέσου (symmetric moving average – SMA) έχει εισαχθεί από τον Koutsoyiannis (2000) και μετασχηματίζει μια ακολουθία λευκού θορύβου V_i σε μια ακολουθία με αυτοσυσχέτιση X_i σύμφωνα με τη σχέση

$$X_i = \sum_{j=-q}^{q} a_{|j|} V_{i+j} = a_q V_{i-q} + \ldots + a_1 V_{i-1} + a_0 V_i + a_1 V_{i+1} + \ldots + a_q V_{i+q}$$

όπου τα a_j είναι συντελεστές βάρους και ο αριθμός τους q θεωρητικά είναι άπειρος αλλά στην πράξη λαμβάνει μια πεπερασμένη τιμή. Η μέθοδος είναι κατάλληλη για τυχούσα συνάρτηση αυτοσυσχέτισης.

Στην περίπτωση του μοντέλου SSS (FGN) αποδεικνύεται (Koutsoyiannis, 2002) ότι οι συντελεστές βάρους είναι

$$a_j \approx \frac{\sqrt{(2-2H)\gamma_0}}{3-2H} \left[|j+1|^{H+0.5} + |j-1|^{H+0.5} - 2|j|^{H+0.5}\right]$$

Αναφορές

- Barnes, F. B., Storage required for a city water supply, *J. Inst. Eng. Australia*, 26(9) 198-203, 1954.
- Hurst, H. E., Long-Term Storage Capacity of Reservoirs, *Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, 76(11), 1950.
- Eckhardt, R., Stan Ulam, John von Neumann and the Monte Carlo method, in *From cardinals to chaos*, ed. by N. G. Cooper, Cambridge University, NY., 1989.
- Kolmogorov, A. N., Wienersche Spiralen und einige andere interessante Kurven in Hilbertschen Raum, *Comptes Rendus* (Doklady) Acad. Sci. USSR (N.S.) 26, 115–118, 1940.
- Koutsoyiannis, D., The Hurst phenomenon and fractional Gaussian noise made easy, *Hydrological Sciences Journal*, 47(4), 573-595, 2002.
- Koutsoyiannis, D., Climate change, the Hurst phenomenon, and hydrological statistics, *Hydrological Sciences Journal*, 48(1), 3-24, 2003.
- Koutsoyiannis, D., Uncertainty, entropy, scaling and hydrological stochastics, 2, Time dependence of hydrological processes and time scaling, *Hydrological Sciences Journal*, 50(3), 405-426, 2005.
- Lamperti, J. W. (1962), Semi-stable stochastic processes, *Transactions of the American Mathematical Society*, 104, 62-78.
- Metropolis, N., The beginning of the Monte Carlo method, in *From cardinals to chaos*, ed. by N. G. Cooper, Cambridge University, NY., 1989.
- Metropolis, N., and S. Ulam, The Monte Carlo Method, *Journal of the American Statistical Association*, 44(247), 335-341, 1949.
- Mandelbrot, B. B., Une classe de processus stochastiques homothetiques a soi: Application a la loi climatologique de H. E. Hurst, *Compte Rendus Academie Science*, 260, 3284-3277, 1965.
- Papoulis, A., *Probability and Statistics*, Prentice-Hall, 1990.
- Ripley, B. D., *Stochastic Simulation*, Wiley, New York, 1987.
- Κουτσογιάννης, Δ., και Θ. Ξανθόπουλος, *Τεχνική Υδρολογία*, Έκδοση 3, 418 σσ., Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, 1999.