



ΟΔΥΣΣΕΥΣ

NAMA

ΕΜΠ

ΔΕΥΑΚ

ΑΕΙΦΟΡΙΚΗ

MDS



Γ' Κοινοτικό Πλαίσιο Στήριξης 2000-2006  
Επιχειρησιακό Πρόγραμμα Ανταγωνιστικότητα

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΗ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΥΔΑΤΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΣΕ  
ΣΥΖΕΥΞΗ ΜΕ ΕΞΕΛΙΓΜΕΝΟ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

ΟΔΥΣΣΕΥΣ

Τεύχος 8α

Θεωρητική τεκμηρίωση του μοντέλου δίαιτας  
ρύπων σε λίμνες «Λέρνη»

*Ε. Ρώμας, Κ. Νουτσόπουλος, Α. Ανδρεαδάκης, Δανιήλ Μαμάης*

Αθήνα  
Δεκέμβριος  
2006

## Συνεργαζόμενοι φορείς



NAMA Σύμβουλοι Μηχανικοί και Μελετητές Α.Ε.



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Τομέας Υδατικών Πόρων  
Υδραυλικών και Θαλάσσιων Έργων



Δημοτική Επιχείρηση Ύδρευσης και Αποχέτευσης  
Καρδίτσας



Αειφορική Δωδεκανήσου Α.Ε.



Άδωνις Κοντός και ΣΙΑ Ε.Ε. (Marathon Data Systems)

## Ενότητα Εργασίας 3

**Ανάπτυξη δέσμης μαθηματικών μοντέλων για την  
ανάλυση, εκτίμηση και προσομοίωση των  
συνιστωσών διαχείρισης των υδατικών πόρων**

## Τεύχος 8α

**Θεωρητική τεκμηρίωση του μοντέλου δίαιτας ρύπων  
σε λίμνες «Λέρνη»**

## **ΠΕΡΙΛΗΨΗ**

Το μοντέλο δίκαιας ρύπων σε λίμνες «Λέρνη» είναι ένα ποιοτικό μοντέλο ευτροφισμού – διαλυμένου οξυγόνου με το οποίο γίνεται εκτίμηση της ποιοτικής κατάστασης μιας λίμνης συναρτήσει διαφόρων σεναρίων εισροών – εκροών. Μέσω της μαθηματικής έκφρασης των κυριότερων φυσικών, βιολογικών και χημικών διεργασιών που πραγματοποιούνται στην υγρή στήλη όπως η μεταγωγή, η διασπορά, ή ανάπτυξη και ο θάνατος του φυτοπλαγκτόν, η κατανάλωση των θρεπτικών (άζωτο, φώσφορος), η νιτροποίηση, η απονιτροποίηση, η ανταλλαγή οξυγόνου με την ατμόσφαιρα κ.α., το μοντέλο μπορεί να προβλέψει τη χρονική διακύμανση των συγκεντρώσεων των κυριότερων ρύπων. Οι ρύποι οι οποίοι εξετάζονται είναι το φυτοπλαγκτόν, διάφορες μορφές αζώτου και φωσφόρου, ο οργανικός άνθρακας και το διαλυμένο οξυγόνο. Σε περίπτωση στρωματωμένης λίμνης δίνεται η δυνατότητα πρόβλεψης των συγκεντρώσεων στο πάνω και το κάτω στρώμα. Τέλος για τη διερεύνηση της επίδρασης της τυχαίας διακύμανσης των δεδομένων εισόδου και των κινητικών σταθερών το μοντέλο περιλαμβάνει τη δυνατότητα στοχαστικής προσομοίωσης και εξαγωγής των αποτελεσμάτων με τη μορφή ιστοπρίθμων καμπυλών. Το παρών αποτελεί το τεύχος θεωρητικής τεκμηρίωσης του μοντέλου «Λέρνη».

## **ABSTRACT**

“Lerne” is an eutrophication – dissolved oxygen model which can be a powerful tool for assessing the water quality characteristics of a lake in relation with its water uses. The model involves the mathematical expression of all physical, biological and chemical processes which are taking place in the water column and are crucial for the fate of the pollutants, like advection, diffusion, phytoplankton growth, nutrients consumption, nitrification, denitrification and physical reaeration. The parameters being modeled are phytoplankton, nitrogen, phosphorus, organic carbon and dissolved oxygen. In case of a stratified lake the model allows for the prediction of the concentrations in the top and the bottom layer. Finally in order to account for the random fluctuations in the kinetic constants and the model's input data, the model incorporates a stochastic approach technique which produces a set of possible values for each substance examined. This report is the scientific documentation of the model “Lerne”.

## Πίνακας περιεχομένων

<b>1 Το μοντέλο διαίτας ρύπων «Λέρνη»</b>	<b>1</b>
1.1 Εισαγωγή .....	1
1.2 Επισκόπηση διεθνούς βιβλιογραφίας .....	2
<b>2 Δομή Μοντέλου</b>	<b>5</b>
2.1 Εισαγωγή .....	5
2.2 Εξίσωση συνέχειας της μάζας σε στοιχείο πλήρους μίξης .....	5
2.2.1 Εξίσωση συνέχειας της συγκέντρωσης .....	6
<b>3 Εξεταζόμενοι Ρύποι και Διεργασίες</b>	<b>8</b>
3.1 Εισαγωγή .....	8
3.2 Φυτοπλαγκτόν .....	8
3.2.1 Θερμοκρασία .....	9
3.2.2 Ηλιακή ακτινοβολία .....	9
3.2.3 Θρεπτικά .....	11
3.3 Φώσφορος .....	17
3.3.1 Οργανικός φώσφορος .....	17
3.3.2 Ανόργανος Φώσφορος .....	19
3.4 Άζωτο .....	22
3.4.1 Αμμωνιακό άζωτο .....	22
3.4.2 Οξειδωμένο Άζωτο .....	25
3.5 Οργανικός άνθρακας .....	28
3.6 Διαλυμένο οξυγόνο .....	31
3.7 Περιττωματικά κολοβακτηρίδια .....	34
3.8 Ρύπος χρήστη .....	37
<b>4 Μέθοδος επίλυσης</b>	<b>39</b>
4.1 Εισαγωγή .....	39
4.2 Μέθοδος Euler .....	39
4.3 Μέθοδος Runge-Kutta .....	40
<b>5 Στοχαστική προσομοίωση</b>	<b>43</b>
<b>6 Προσομοίωση δυο στρωμάτων</b>	<b>49</b>
<b>7 Παράρτημα</b>	<b>56</b>
7.1 Εξίσωση μάζας vs εξίσωση συγκέντρωσης .....	56
7.1.1 Εκροή από στοιχείο πλήρους μίξης .....	56

7.1.2	Εισροή σε στοιχείο πλήρους μίξης.....	58
7.2	Προσαρμογή στοιχείων σε ημιτονοειδή καμπύλη.....	60
<b>Βιβλιογραφία</b>		<b>63</b>



# Το μοντέλο δίαιτας ρύπων «Λέρνη»

---

## 1.1 Εισαγωγή

Στα πλαίσια υλοποίησης του ερευνητικού προγράμματος με τίτλο ‘Ολοκληρωμένη Διαχείριση Υδατικών Συστημάτων σε Σύζευξη με Εξειλιγμένο Υπολογιστικό Σύστημα (ΟΔΥΣΣΕΥΣ)’ και ειδικότερα της Ενότητας Εργασίας 3, η ερευνητική ομάδα του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου συνέταξε το παρόν τεύχος αναφορικά με την ανάπτυξη του μοντέλου δίαιτας ρύπων σε λίμνες.

Ο στόχος της παρούσας εργασίας είναι η ανάπτυξη ενός μαθηματικού μοντέλου για την εκτίμηση της ποιοτικής κατάστασης των υδάτων μίας λίμνης ή ενός ταμειυτήρα σε συνάρτηση με τα διάφορα σενάρια λειτουργίας τους.

Το **πρώτο κεφάλαιο** περιλαμβάνει μια γενική εισαγωγή όπου γίνεται μία σύντομη παρουσίαση των στόχων της Ενότητας Εργασίας 3 του παρόντος ερευνητικού προγράμματος, καθώς επίσης και μια συνοπτική περιγραφή των σημαντικότερων εμπορικών πακέτων ποιότητας υδατινών σωμάτων.

Το **δεύτερο κεφάλαιο** αναφέρεται στη δομή του μαθηματικού μοντέλου και συγκεκριμένα στις βασικές αρχές και εξισώσεις και το μαθηματικό υπόβαθρο πάνω στα οποία δομήθηκε το ποιοτικό μοντέλο μαθηματικής προσομοίωσης.

Στο **τρίτο κεφάλαιο** παρουσιάζονται οι ρύποι και οι διεργασίες που εξετάζονται από το μοντέλο. Για κάθε ρύπο παρατίθεται η περιγραφή και η μαθηματική έκφραση των φυσικών, χημικών και βιολογικών διεργασιών στις οποίες συμμετέχει και διατυπώνεται το τελικό ισοζυγίου μάζας αυτού.

Το **τέταρτο κεφάλαιο** γίνεται μια σύντομη περιγραφή και σύγκριση των μεθόδων αριθμητικής ολοκλήρωσης που χρησιμοποιεί το μοντέλο για την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων και την πρόβλεψη της χρονικής διακύμανσης των εξεταζόμενων μεταβλητών.

Στο **πέμπτο κεφάλαιο** αναλύεται η στοχαστική τεχνική που έχει ενσωματωθεί στο μοντέλο και η οποία δίνει τη δυνατότητα πρόβλεψης της χρονικής διακύμανσης των συγκεντρώσεων με τη μορφή ισοπίθανων καμπυλών.

Τέλος στο **έκτο κεφάλαιο** γίνεται περιγραφή των βασικών εξισώσεων και των ισοζυγίων μάζας που χρησιμοποιούνται από το μοντέλο στην περίπτωση προσομοίωσης στρωματομένης λίμνης.

## 1.2 Επισκόπηση διεθνούς βιβλιογραφίας

Στα γνωστότερα εμπορικά πακέτα, παρατηρείται μια ευρεία διαβάθμιση όσον αφορά την πολυπλοκότητα των μοντέλων δίαιτας ρύπων σε λίμνες, τα οποία στην απλούστερη τους μορφή περιλαμβάνουν την προσομοίωση, με απλοποιημένες εξισώσεις, των κυριότερων μόνο ποιοτικών παραμέτρων, ενώ στην πιο σύνθετή τους μορφή περιλαμβάνουν πολύπλοκα, τρισδιάστατα οικολογικά μοντέλα με δυνατότητα προσομοίωσης ενός πολύ μεγάλου αριθμού παραμέτρων.

Οι πιο γνωστές εταιρίες οι οποίες δραστηριοποιούνται εδώ και πολλά χρόνια στην ανάπτυξη μοντέλων διαχείρισης υδάτινων σωμάτων είναι η δανέζικη DHI ([www.dhisoftware.com](http://www.dhisoftware.com)) και η Delft ([www.wldelft.nl](http://www.wldelft.nl)).

Το γνωστό εμπορικό πακέτο MIKE της εταιρίας DHI περιλαμβάνει υπομοντέλα εκτίμησης των ποιοτικών χαρακτηριστικών ενός υδάτινου σώματος διαφορετικής πολυπλοκότητας. Το πιο απλό υπομοντέλο περιλαμβάνει την προσομοίωση τριών μόνο παραμέτρων της θερμοκρασίας του διαλυμένου οξυγόνου και του BOD. Οι διεργασίες που λαμβάνονται υπόψη σε αυτή την περίπτωση είναι η ανανέωση του διαλυμένου οξυγόνου λόγω φυσικού επαναερισμού και η κατανάλωση του κατά την αποδόμηση του BOD. Σε επόμενο επίπεδο προστίθεται ρύποι όπως το αμμωνιακό και νιτρικό άζωτο και διεργασίες όπως η νιτροποίηση και η απονιτροποίηση. Εξετάζονται επίσης με κάποιες απλές ρουτίνες η καθίζηση και επαναιώρηση ρύπων από τον πυθμένα χωρίς τη σύνθεση όμως χωριστού υπομοντέλου πυθμενικών αποθέσεων. Σε επόμενα επίπεδα πολυπλοκότητας προστίθενται ρύποι όπως ολικός φώσφορος, περιττωματικά και ολικά κολοβακτηρίδια, COD, pH και αλατότητα.

Το πιο αναλυτικό ποιοτικό μοντέλο της DHI το Ecolab είναι στην ουσία ένα εξειδικευμένο οικολογικό μοντέλο το οποίο εξετάζει πολύ μεγάλο αριθμό μεταβλητών (25 κύριες και 79 βοηθητικές) και προσομοιώνει 100 διεργασίες. Η πολυπλοκότητα του μοντέλου αντανακλάται και στο πλήθος των παραμέτρων που καλείται να ορίσει ο χρήστης και οι οποίες ξεπερνούν τις 120.

Σε αυτό το μοντέλο εξετάζονται ρύποι όπως φυτοπλαγκτόν, ζωοπλαγκτόν, μακροάλγη, βλάστηση πυθμένα κ.α., ενώ υπάρχει δυνατότητα πρόβλεψης συγκεντρώσεων ορισμένων ρύπων (οργανικό άζωτο, αμμωνία, νιτρικό άζωτο, φώσφορος) στο ίζημα του πυθμένα. Επίσης μέσω ξεχωριστού υπομοντέλου προσομοιώνονται τα βαρέα μέταλλα και υπολογίζονται οι συγκεντρώσεις τους στην υγρή στήλη, στο ίζημα και στη βλάστηση του πυθμένα και στους έμβιους οργανισμούς.

Ανάλογη διαβάθμιση στην πολυπλοκότητα υπάρχει και στα υδροδυναμικά μοντέλα που χρησιμοποιούνται παράλληλα με τα ποιοτικά για τον υπολογισμό της μεταγωγής και της διασποράς των ρύπων. Για μικρές και ρηχές λίμνες δεν απαιτείται ιδιαίτερο υδροδυναμικό μοντέλο αφού μπορεί να θεωρηθεί ότι δεν υπάρχει χωρική κλίση των συγκεντρώσεων των ρύπων παρά μόνο χρονική, στην περίπτωση όμως βαθιών ή στρωματωμένων λίμνων χρησιμοποιούνται δισδιάστατα ή ακόμη και τρισδιάστατα υδροδυναμικά μοντέλα της ίδιας εταιρίας (MIKE 21 και MIKE 3).

Τα δεδομένα εισόδου που συνήθως απαιτούνται είναι η χωρική σχηματοποίηση του υδάτινου σώματος, οι εισροές και οι αντίστοιχες συγκεντρώσεις ρύπων στο υδάτινο σώμα, οι εκροές, η θερμοκρασία του νερού και ηλιακή ακτινοβολία.

Το υπομοντέλο WAQ του εμπορικού πακέτου Delft 3D της ολλανδικής εταιρίας Delft Hydraulics αποτελεί ένα γενικό ποιοτικό μοντέλο ικανό να προσομοιώσει ένα μεγάλο πλήθος διεργασιών για όλων των ειδών τα υδάτινα σώματα. Το υδάτινο σώμα που μπορεί να είναι μονοδιάστατο, δισδιάστατο ή τρισδιάστατο χωρίζεται σε όγκους ή τμήματα ελέγχου στα οποία επιλύονται οι



εξισώσεις μεταφοράς, διασποράς και χημικών ή βιολογικών διεργασιών μέσω εξελεγμένων αριθμητικών τεχνικών.

Το Delft 3D WAQ είναι κατάλληλο για ένα μεγάλο πλήθος εφαρμογών όπως

- Βιοχημικές αντιδράσεις (αποδόμηση BOD, νιτροποίηση)
- Ανάπτυξη ζωοπλαγκτόν και αλγών και κύκλος θρεπτικών
- Ανταλλαγή ουσιών με την ατμόσφαιρα (οξυγόνο, πτητικές οργανικές ουσίες, θερμοκρασία)
- Προσρόφηση και αποβολή βαρέων μετάλλων και οργανικών μικρορυπαντών
- Απόθεση προσροφημένων ουσιών στο ίζημα του πυθμένα και επαναίωρηση από αυτόν
- Θάνατος βακτηριδίων

Το μοντέλο προσομοιώνει πάνω από 140 ουσίες όπως:

- Αλατότητα, διαλυμένο οξυγόνο και BOD
- Περιττωματικά κολοβακτηρίδια
- Οργανικό άνθρακα, άζωτο και φώσφορο στην υγρή στήλη και σε κάθε στρώση του πυθμένα
- Αμμωνιακό και νιτρικό άζωτο, 4 κλάσματα ανόργανου φωσφόρου και πυρίτιο
- Αιωρούμενα στερεά
- 3 είδη αλγών (diatoms, greens, bluegreens) στην υγρή στήλη και στο ίζημα
- Κάδμιο, χαλκό, ψευδάργυρο, υδράργυρο, νικέλιο, μόλυβδο κ.α. στο νερό και στις στρώσεις του πυθμένα

Όσες διεργασίες αφορούν τον πυθμένα γίνονται μέσω ειδικού υπομοντέλου το οποίο προσομοιώνει 3 στρώσεις ιζήματος.

Ο αριθμός των παραμέτρων του μοντέλου στην πλήρη του μορφή ανέρχεται σε αρκετές εκατοντάδες.

Το Delft 3D WAQ μπορεί να συνεργαστεί με τα δισδιάστατα και τρισδιάστατα υδροδυναμικά μοντέλα της ίδιας εταιρίας (Delft3D-FLOW) για τον υπολογισμό των υδροδυναμικών χαρακτηριστικών των υδάτινων σωμάτων.

Το ποιοτικό μοντέλο Delft3D-ECO είναι παρόμοιο με το γενικό ποιοτικό μοντέλο WAQ, διαθέτει όμως πιο λεπτομερή περιγραφή του φαινομένου του ευτροφισμού καθώς μπορεί να προσομοιώσει πιο σύνθετες αλληλεπιδράσεις μεταξύ διαφόρων ειδών φυτοπλαγκτόν. Συγκεκριμένα εξετάζει την ανάπτυξη 4 διαφορετικών ειδών (phaeocystis, flagellates, dinoflagellates, diatoms) και διαθέτει ειδικές τεχνικές για την εύρεση του είδους που θα επικρατήσει ανάλογα με τους περιοριστικούς παράγοντες και την ικανότητα προσαρμογής του κάθε είδους στις αλλαγές των περιβαλλοντικών συνθηκών.

Η ανάλυση απαιτήσεων και ο λογικός σχεδιασμός του μοντέλου πραγματοποιήθηκε αξιολογώντας την υφιστάμενη τεχνογνωσία και εμπειρία της ερευνητικής ομάδας, καθώς επίσης τις ανάγκες της αγοράς και την απαίτηση δημιουργίας ενός ποιοτικού μοντέλου που να είναι σε θέση να περιγράψει με ικανοποιητική ακρίβεια τις διεργασίες που επιτελούνται μέσα στη λίμνη, χωρίς όμως την απαίτηση μεγάλου και δύσκολα αποκτήσιμου όγκου πληροφορίας. Ιδιαίτερη βαρύτητα δόθηκε στο υπολογιστικό μέρος που αναφέρεται στην επιλογή των υπό διερεύνηση ρύπων καθώς και στην περιγραφή των φυσικών, χημικών και βιολογικών διεργασιών που λαμβάνουν μέρος εντός της λίμνης.

Με βάση τα παραπάνω σχεδιάστηκε η γενική μεθοδολογία του μοντέλου που αναπτύχθηκε και το οποίο είναι ένα μοντέλο ευτροφισμού – διαλυμένου οξυγόνου. Το μοντέλο προσομοιώνει 10 ρύπους

(χλωροφύλλη, οργανικό και ανόργανο φώσφορο, αμμωνιακό και οξειδωμένο άζωτο, οργανικό άνθρακα διαλυμένο οξυγόνο, περιττωματικά κολοβακτηρίδια και έναν ρύπο χρήστη) μέσω της ανάπτυξης αλγορίθμων περιγραφής των κυριότερων χημικών διεργασιών που λαμβάνουν μέρος σε μια λίμνη (ανάπτυξη, ενδογενής αναπνοή και θάνατος του φυτοπλαγκτόν, κατανάλωση των θρεπτικών N, P, νιτροποίηση, απονιτροποίηση, ανταλλαγή οξυγόνου με την ατμόσφαιρα κ.α.). Καθώς η ανάπτυξη δισδιάστατου η τρισδιάστατου υδροδυναμικού μοντέλου θα αύξανε πάρα πολύ την πολυπλοκότητα του μοντέλου η λίμνη θεωρήθηκε ως ένα στοιχείο πλήρους μίξης. Παρόλα αυτά υπάρχει δυνατότητα κατοκόρυφου διαχωρισμού της λίμνης σε δύο στρώματα και πρόβλεψη των συγκεντρώσεων των ρύπων σε κάθε ένα από αυτά. Τέλος το μοντέλο παρέχει τη δυνατότητα στοχαστικής προσομοίωσης μέσω της τεχνικής Monte Carlo ή οποία δίνει μία πιο ολοκληρωμένη εικόνα της ποιοτικής κατάστασης της λίμνης.

## 2 Δομή Μοντέλου

---

### 2.1 Εισαγωγή

Το μοντέλο διαίτας ρύπων Λέρνη είναι ένα μοντέλο ευτροφισμού – διαλυμένου οξυγόνου το οποίο περιγράφει με μαθηματικές σχέσεις τα φυσικά φαινόμενα και τις διεργασίες που επηρεάζουν τη συγκέντρωση των κυριότερων ρύπων που χρησιμοποιούνται για την εκτίμηση της ποιοτικής κατάστασης ενός υδάτινου σώματος. Για κάθε ρύπο που εξετάζεται στο μοντέλο γράφεται η εξίσωση συνέχειας με αποτέλεσμα τη δημιουργία ενός συστήματος πεπλεγμένων διαφορικών εξισώσεων, δεδομένου ότι ο όρος της μεταβολής λόγω διεργασιών κάθε ρύπου είναι συνήθως συνάρτηση και άλλων ρύπων.

Η αναλυτική επίλυση του συστήματος των εξισώσεων αυτών είναι αδύνατη σε φυσικά συστήματα αφού τις περισσότερες φορές οι μεταγωγικοί όροι (εισροές και εκροές) δεν έχουν σταθερή τιμή στο χρόνο αλλά μεταβάλλονται στο χρόνο. Η μεταβολές αυτές των εισροών και των εκροών από το στοιχείο πλήρους μίξης (λίμνη) σπανίως μπορούν να περιγραφούν από μαθηματικές συναρτήσεις. Συνήθως προέρχονται από μετρήσεις και εισάγονται στο μοντέλο με τη μορφή χρονοσειρών, καθιστώντας την ολοκλήρωση αυτών των όρων αδύνατη. Επομένως για την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων σε δυναμικές συνθήκες, είναι απαραίτητη η αριθμητική ολοκλήρωση.

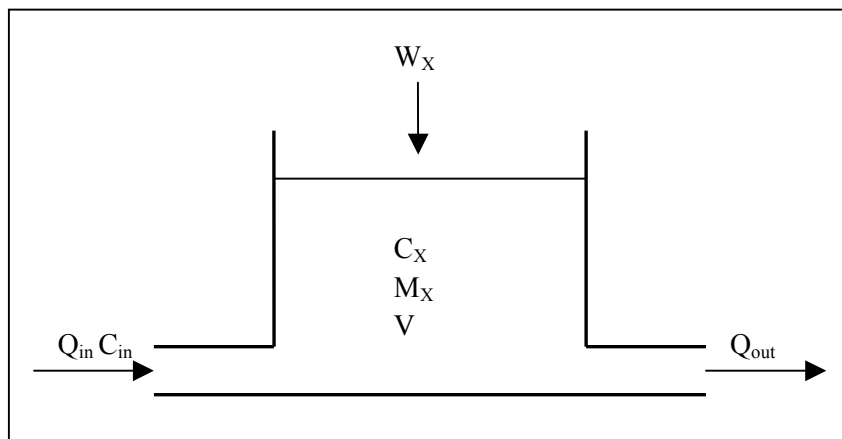
### 2.2 Εξίσωση συνέχειας της μάζας σε στοιχείο πλήρους μίξης

Έστω το στοιχείο πλήρους μίξης του σχήματος (Σχήμα 1) όπου εισέρχεται μια ποσότητα νερού  $Q_{in}$  με συγκέντρωση του ρύπου  $X$   $C_{in}$ . Στο στοιχείο πλήρους μίξης προστίθεται επίσης μάζα του ρύπου  $X$  με ρυθμό  $W$  και εκρέει παροχή  $Q_{out}$  ενώ ο ρύπος  $X$  ακολουθεί μια κινητική αύξησης ή διάσπασης πρώτης τάξης  $\left(\frac{dX}{dt} = \mu \cdot X\right)$  με ρυθμό  $\mu$ . Σε αυτή την περίπτωση η αρχή συνέχειας της μάζας μπορεί να εκφραστεί ως εξής

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Συσσώρευση} & = & \text{Καθαρή} & & \text{Μεταβολή} & & \text{Εξωτερικά} \\ \text{μάζας} & & \text{είσοδος λόγω} & + & \text{λόγω} & + & \text{φορτία} \\ & & \text{μεταγωγής} & & \text{διεργασιών} & & \end{array}$$

Κάθε όρος της εξίσωσης συνέχειας μπορεί να γραφεί με μαθηματικούς όρους ως εξής:

$$\begin{array}{ll} \text{Συσσώρευση μάζας} & = \frac{dM_x}{dt} \\ \text{Καθαρή είσοδος λόγω μεταγωγής} & = Q_{in} \cdot C_{in} - Q_{out} \cdot \frac{M_x}{V} \\ \text{Μεταβολή λόγω διεργασιών} & = \lambda \cdot M_x \\ \text{Εξωτερικά φορτία} & = W_x \end{array}$$



Σχήμα 1: Το στοιχείο πλήρους μίξης

Επομένως η εξίσωση που περιγράφει τις μεταβολές μάζας του ρύπου X λόγω φαινομένων μεταγωγής, εξωτερικών φορτίων και βιολογικών διεργασιών είναι η εξής

$$\frac{dM_X}{dt} = \underbrace{\lambda \cdot M_X}_{\text{διεργασίες}} + \underbrace{Q_{in} \cdot C_{in} - Q_{out} \cdot \frac{M_X}{V}}_{\text{μεταγωγή}} + \underbrace{W_X}_{\text{εξωτερικά φορτία}} \quad (1)$$

όπου

t	χρόνος (T)
$M_X$	η μάζα του ρύπου στο στοιχείο πλήρους μίξης (M)
$\lambda$	ρυθμός μεταβολής μάζας ρύπου X λόγω διεργασιών ( $T^{-1}$ )
$Q_{in}$	εισερχόμενη παροχή στο στοιχείο πλήρους μίξης ( $L^3T^{-1}$ )
$C_{in}$	συγκέντρωση ρύπου X στην παροχή εισόδου ( $ML^{-3}$ )
$Q_{out}$	εξερχόμενη παροχή από το στοιχείο πλήρους μίξης ( $L^3T^{-1}$ )
$W_X$	ρυθμός προσθήκης μάζας ρύπου X ( $MT^{-1}$ )
V	ο όγκος του στοιχείου πλήρους μίξης ( $L^3$ )

Όσον αφορά τον όγκο του στοιχείου πλήρους μίξης αυτός προκύπτει από τη σχέση (2).

$$\frac{dV}{dt} = Q_{in} - Q_{out} \quad (2)$$

### 2.2.1 Εξίσωση συνέχειας της συγκέντρωσης

Από την εξίσωση συνέχειας μάζας του ρύπου X (1), χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2) και δεδομένου ότι

$$C_X = \frac{M_X}{V} \quad (3)$$

μπορούμε να γράψουμε

$$\lambda \cdot M_X + (Q_{in} \cdot C_{in} + W_X) - Q_{out} \cdot \frac{M_X}{V} = \frac{dM_X}{dt} = \frac{d(C_X \cdot V)}{dt} = V \frac{dC_X}{dt} + C_X \frac{dV}{dt}$$

$$= V \frac{dC_X}{dt} + C_X \cdot (Q_{in} - Q_{out})$$

Επομένως η εξίσωση συνέχειας για το ρύπο X με τη μορφή συγκεντρώσεων είναι η:

$$\frac{dC_X}{dt} = \lambda \cdot C_X + \frac{(Q_{in} \cdot C_{in} + W_X)}{V} - Q_{in} \cdot \frac{C_X}{V} \quad (4)$$

Οι εξισώσεις (1) και (4) είναι μαθηματικά ισοδύναμες παρόλα αυτά η χρήση της εξίσωσης με τη μορφή μάζας έχει ορισμένα πλεονεκτήματα (βλέπε Παράρτημα) και για αυτό το λόγο όλες οι εξισώσεις έχουν γραφτεί με τη μορφή εξισώσεων μάζας.

## 3 Εξεταζόμενοι Ρύποι και Διεργασίες

---

### 3.1 Εισαγωγή

Οι ρύποι που εξετάζονται στο μοντέλο είναι οι εξής

Φυτοπλαγκτόν (Χλωροφύλλη – α)	(Chl)
Ανόργανος φώσφορος	(IP)
Οργανικός φώσφορος	(OP)
Αμμωνιακό άζωτο	(NH)
Οξειδωμένο άζωτο	(NO)
Οργανικός άνθρακας	(OC)
Διαλυμένο οξυγόνο	(DO)
Περιττωματικά κολοβακτηρίδια	(FC)
Ρύπος χρήστη	(X)

Για κάθε εξεταζόμενο ρύπο έχει στην ουσία αναπτυχθεί ένα ξεχωριστό υπομοντέλο το οποίο περιλαμβάνει όλες τις διεργασίες που επηρεάζουν τη συγκέντρωση του. Στις επόμενες παραγράφους παρουσιάζονται αναλυτικά για κάθε εξεταζόμενο ρύπο οι διεργασίες οι αντίστοιχες μαθηματικές εξισώσεις, κινητικές σταθερές και παράμετροι, όπως αυτές χρησιμοποιούνται από το μαθηματικό μοντέλο.

### 3.2 Φυτοπλαγκτόν

Το φυτοπλαγκτόν χαρακτηρίζει το σύνολο των αλγών χωρίς διακρίσεις κατά κατηγορίες, και εκφράζεται σε όρους χλωροφύλλης. Η μεταβολή της συγκέντρωσης της χλωροφύλλης εξαρτάται κυρίως από τους μηχανισμούς της ανάπτυξης, της ενδογενούς αναπνοής, του θανάτου και της καθίζησης.

Πίνακας 1: Διεργασίες που επηρεάζουν τη συγκέντρωση χλωροφύλλης

Παραγωγή χλωροφύλλης	Κατανάλωση χλωροφύλλης
<ul style="list-style-type: none"><li>Ανάπτυξη χλωροφύλλης</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>Θάνατος χλωροφύλλης</li><li>Ενδογενής αναπνοή φυτοπλαγκτόν</li><li>Καθίζηση φυτοπλαγκτόν</li></ul>

Η ταχύτητα ανάπτυξης  $\mu$  του φυτοπλαγκτόν, εξαρτάται από τη θερμοκρασία, την ηλιακή ακτινοβολία και τα θρεπτικά συστατικά N, P. Στο μοντέλο χρησιμοποιείται μια πολλαπλή σχέση Monod η οποία

λαμβάνει υπόψη της τη θερμοκρασία, την ηλιακή ακτινοβολία και το θρεπτικό (άζωτο ή φώσφορος) που βρίσκεται σε μικρότερη αναλογία από την απαιτούμενη για την ανάπτυξη

$$\mu = \mu_{\max(20)} \cdot f(\text{Temperature}) \cdot f(\text{Rad}) \cdot f(\text{Nutrient}) \quad (5)$$

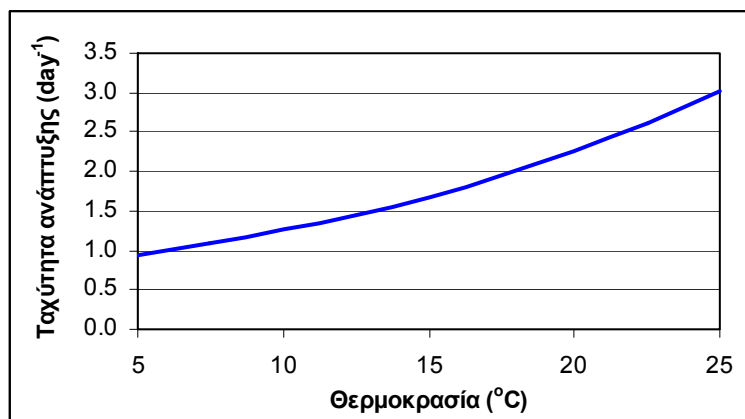
### 3.2.1 Θερμοκρασία

Η επίδραση της θερμοκρασίας περιγράφεται από τη σχέση

$$f(\text{Temperature}) = A_1^{T-20} \quad (6)$$

όπου

$\mu_{\max(20)}$	μέγιστη ταχύτητα ανάπτυξης φυτοπλαγκτόν στους 20 °C (day <sup>-1</sup> )
T	θερμοκρασία (°C)
$A_1$	θερμοκρασιακός συντελεστής (αδιάστατος)

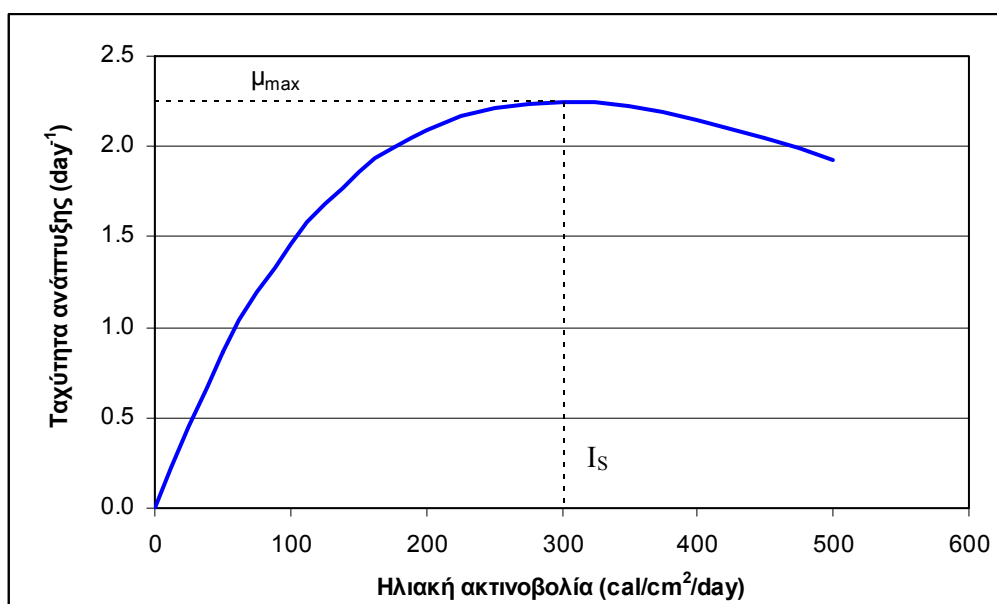


Σχήμα 2: Επίδραση θερμοκρασίας στην ανάπτυξη του φυτοπλαγκτόν

### 3.2.2 Ηλιακή ακτινοβολία

Η επίδραση της ηλιακής ακτινοβολίας στο ρυθμό της φωτοσύνθεσης είναι άμεση, όπως έχει αποδειχθεί από πολλές πειραματικές μελέτες. Αύξηση της έντασης της ακτινοβολίας που δέχονται τα κύτταρα προκαλεί εντονότερα φαινόμενα φωτοσύνθεσης και αντίστροφα, ελάττωση της έντασης της ακτινοβολίας προκαλεί αναστολή της φωτοσύνθεσης.

Προσεκτική παρατήρηση στη συμπεριφορά των κυττάρων στις διακυμάνσεις της ακτινοβολίας έχει οδηγήσει στο συμπέρασμα ότι αύξηση της ακτινοβολίας πέραν κάποιας τιμής, έστω  $I_s$ , έχει ως αποτέλεσμα τη μείωση των ρυθμών φωτοσύνθεσης λόγω αναχαίτισης. Η αναχαίτιση αυτή οφείλεται κυρίως σε καταστροφές στη δομή του παραλήπτη της ακτινοβολίας, δηλαδή της χλωροφύλλης, λόγω της μεγάλης έντασης ακτινοβολίας που δέχεται. Το Σχήμα 3 που ακολουθεί παριστάνει μία τυπική μορφή μεταβολής του ρυθμού φωτοσύνθεσης και συνεπώς της ταχύτητας ανάπτυξης του φυτοπλαγκτόν, σε συνάρτηση με την ένταση της ακτινοβολίας.



Σχήμα 3: Επίδραση της ηλιακής ακτινοβολίας στην ανάπτυξη του φυτοπλαγκτόν.

Καμπύλες αυτής της μορφής (Σχήμα 3) προσεγγίζονται με εξισώσεις της μορφής:

$$\mu_h = \mu_{\max} \cdot \frac{I_h}{I_s} \cdot e^{1 - \frac{I_h}{I_s}} \quad (7)$$

Καθώς η ηλιακή ακτινοβολία εισέρχεται στην υδάτινη στήλη, υφίσταται μείωση εξαιτίας της θολότητας του νερού, της ύπαρξης αιωρούμενων σωματιδίων, αλλά και της απορρόφησης της από την ίδια την υδάτινη μάζα. Η ακτινοβολία σε βάθος  $h$ ,  $I_h$ , σχετίζεται με την ακτινοβολία στην επιφάνεια,  $I_0$ , συνήθως με τη βοήθεια μιας εκθετικής σχέσης της μορφής:

$$I_h = I_0 \cdot e^{-K \cdot h} \quad (8)$$

όπου

$\mu_h$	ταχύτητα ανάπτυξης φυτοπλαγκτόν σε βάθος $h$ ( $\text{day}^{-1}$ )
$I_h$	ηλιακή ακτινοβολία σε βάθος $h$ ( $\text{cal}/\text{cm}^2/\text{day}$ )
$I_0$	προσπίπτουσα ηλιακή ακτινοβολία στην επιφάνεια ( $\text{cal}/\text{cm}^2/\text{day}$ )
$K$	σταθερά απόσβεσης ηλιακής ακτινοβολίας ( $\text{m}^{-1}$ )
$h$	το πάχος του υπερκείμενου στρώματος νερού (m)

Η σταθερά απόσβεσης  $K$  μπορεί να αναλυθεί σε δύο επί μέρους συνιστώσες:

$$K = K_w + K_{\text{chl}} \cdot \text{Chl} \quad (9)$$

όπου



$K_w$	η σταθερά απόσβεσης λόγω του νερού και των αιωρούμενων σ' αυτό στερεών ( $m^{-1}$ )
$K_{chl}$	η σταθερά απόσβεσης που οφείλεται στη συγκέντρωση της χλωροφύλλης ( $l/mg\ Chl/m$ )
$Chl$	η συγκέντρωση χλωροφύλλης ( $g/m^3$ )

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (7) και (8) προκύπτει

$$f(Rad)_h = \frac{I_0 \cdot e^{-K \cdot h}}{I_s} \cdot e^{-\frac{I_0 \cdot e^{-K \cdot h}}{I_s}} \quad (10)$$

όπου

$f(Rad)_h$  περιοριστικός παράγοντας ανάπτυξης φυτοπλαγκτόν λόγω ηλιακής ακτινοβολίας σε βάθος  $h$  (αδιάστατος)

Για να περιγραφεί η μέση ταχύτητα ανάπτυξης του φυτοπλαγκτόν που βρίσκεται σε ένα στρώμα νερού βάθους  $H$ , είναι απαραίτητη η ολοκλήρωση της σχέσης (10) ως προς το βάθος καθώς μεταβάλλεται η ένταση της ηλιακής ακτινοβολίας  $I_h$ . Επομένως

$$f(Rad) = \frac{1}{H} \cdot \int_{h=0}^{h=H} f(Rad)_h \cdot dh = \frac{1}{H} \cdot \int_{h=0}^{h=H} \frac{I_0 \cdot e^{-K \cdot h}}{I_s} \cdot e^{-\frac{I_0 \cdot e^{-K \cdot h}}{I_s}} \cdot dh$$

$$f(Rad) = \frac{e^{a_1} - e^{a_0}}{H \cdot K} \quad (11)$$

με

$$a_1 = 1 - \frac{I_0}{I_s} \cdot e^{-K \cdot H} \quad (12)$$

$$a_0 = 1 - \frac{I_0}{I_s} \quad (13)$$

όπου

$f(Rad)$  μέση τιμή περιοριστικού παράγοντα ανάπτυξης φυτοπλαγκτόν λόγω ηλιακής ακτινοβολίας σε στρώμα νερού βάθους  $h$  (αδιάστατος)

### 3.2.3 Θρεπτικά

Το φυτοπλαγκτόν αναπτύσσεται καταναλώνοντας αμμωνιακό ή οξειδωμένο άζωτο και ανόργανο φώσφορο. Για το προσδιορισμό του περιορισμού στην ταχύτητα ανάπτυξης λόγω θρεπτικών χρησιμοποιείται ο νόμος του ελαχίστου (Liebig's law) σύμφωνα με τον οποίο

$$f(Nutrient) = \min[f(N), f(P)] \quad (14)$$

$$\text{όπου } f(N) = \frac{NH + NO}{K_N + NH + NO} \text{ και } f(P) = \frac{IP}{K_P + IP}$$

οι συναρτήσεις περιορισμού της ανάπτυξης λόγω του αζώτου και του φωσφόρου αντίστοιχα και

NH	συγκέντρωση αμμωνιακού αζώτου (g/m <sup>3</sup> )
NO	συγκέντρωση οξειδωμένου αζώτου (g/m <sup>3</sup> )
IP	συγκέντρωση ανόργανου φώσφορου (g/m <sup>3</sup> )
K <sub>N</sub>	σταθερά ημικορεσμού για το άζωτο (g/m <sup>3</sup> )
K <sub>P</sub>	σταθερά ημικορεσμού για το φώσφορο (g/m <sup>3</sup> )

Για την τιμή της σταθεράς K<sub>N</sub> έγινε δεκτό ότι εξαρτάται από τη θερμοκρασία σύμφωνα με τη σχέση:

$$K_N = K_{N0} \cdot A_4^T \quad (15)$$

όπου

K <sub>N</sub>	σταθερά ημικορεσμού για το άζωτο σε θερμοκρασία T °C (g/m <sup>3</sup> )
K <sub>N0</sub>	σταθερά ημικορεσμού για το άζωτο σε θερμοκρασία 0 °C (g/m <sup>3</sup> )
A <sub>4</sub>	θερμοκρασιακός συντελεστής (αδιάστατος)
T	θερμοκρασία (°C)

Συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις καταλήγουμε ότι η μέση ταχύτητα ανάπτυξης του φυτοπλαγκτόν σε ένα στρώμα βάθους H ισούται με

$$\mu = \mu_{\max(20)} \cdot A_1^{T-20} \cdot \frac{e^{a_1} - e^{a_0}}{H \cdot K} \cdot \min \left[ \frac{NH + NO}{K_N + NH + NO}, \frac{IP}{K_P + IP} \right] \quad (16)$$

Η μείωση της συγκέντρωσης της χλωροφύλλης θεωρείται ότι επέρχεται με τρεις μηχανισμούς : την ενδογενή αναπνοή, το θάνατο και την καθίζηση.

Η ταχύτητα ενδογενούς αναπνοής αυξάνεται με την αύξηση της θερμοκρασίας. Τόσο εκθετικές όσο και γραμμικές σχέσεις έχουν χρησιμοποιηθεί για την περιγραφή αυτής της εξάρτησης. Η σχέση που εφαρμόστηκε έχει τη μορφή :

$$R_A = R_{A0} + A_2 \cdot T \quad (17)$$

όπου

R <sub>A</sub>	ρυθμός ενδογενούς αναπνοής σε θερμοκρασία T °C (day <sup>-1</sup> )
R <sub>A0</sub>	ρυθμός ενδογενούς αναπνοής σε θερμοκρασία 0 °C (day <sup>-1</sup> )
A <sub>2</sub>	θερμοκρασιακός συντελεστής (αδιάστατος)
T	θερμοκρασία (°C)

Η ταχύτητα θανάτου εξαρτάται και αυτή από τη θερμοκρασία. Η εκθετική σχέση που εφαρμόστηκε έχει τη μορφή :

$$K_{dA} = K_{dA(20)} \cdot A_3^{T-20} \quad (18)$$

όπου

$K_{dA}$	ρυθμός θανάτου φυτοπλαγκτόν σε θερμοκρασία T °C (day <sup>-1</sup> )
$K_{dA(20)}$	ρυθμός θανάτου φυτοπλαγκτόν σε θερμοκρασία 20 °C (day <sup>-1</sup> )
$A_3$	θερμοκρασιακός συντελεστής (αδιάστατος)
T	θερμοκρασία (°C)

Θα πρέπει να επισημανθεί ότι στο μοντέλο δεν υπεισέρχεται η κατανάλωση του φυτοπλαγκτόν από το ζωοπλαγκτόν. Η παράλειψη αυτή, αν και θεωρητικά είναι αρκετά σημαντική, εν τούτοις μπορεί να αντιμετωπισθεί ικανοποιητικά με θεώρηση αυξημένου τόσο του συντελεστή  $K_{death(20)}$  όσο και του συντελεστή  $A_3$ , όπως θα φανεί κατά την εκτίμηση των παραμέτρων.

Οι απώλειες του φυτοπλαγκτόν λόγω καθίζησης περιγράφονται με τη βοήθεια του συντελεστή  $K_{SA}$ , ο οποίος εύκολα αποδεικνύεται ότι συσχετίζεται με την ταχύτητα καθίζησης, με τη βοήθεια της σχέσης:

$$K_{SA} = \frac{V_A}{H} \quad (19)$$

όπου

$K_{SA}$	ρυθμός απομάκρυνσης φυτοπλαγκτόν λόγω καθίζησης (day <sup>-1</sup> )
$V_A$	ταχύτητα καθίζησης φυτοπλαγκτόν (m/day)
H	βάθος υγρής στήλης (m)

Συχνά χρησιμοποιείται ένας διορθωτικός αδιάστατος συντελεστής, FFA, ο οποίος εκφράζει εμπειρικά την εποχιακή μεταβολή της ταχύτητας καθίζησης λόγω διαφορών τύρβης, θερμοκρασίας και μορφολογικών χαρακτηριστικών των κυττάρων που καθιζάνουν.

$$K_{SA} = \frac{V_A}{H} \cdot FFA \quad (20)$$

Ο συντελεστής FFA έχει θεωρηθεί προς το παρόν ίσος με τη μονάδα, ελλείψει στοιχείων που θα επέτρεπαν τον προσδιορισμό του. Έχει εν τούτοις ληφθεί υπόψη ένας παράγοντας που επιδρά στην ποσότητα της καθιζάνουσας ιλύος και που σχετίζεται με το φαινόμενο της επαναιώρησης. Το φαινόμενο αυτό είναι εντονότερο σε μικρά βάθη. Έτσι έχει προταθεί και έχει χρησιμοποιηθεί στο μοντέλο η ακόλουθη συσχέτιση της ταχύτητας καθίζησης και του βάθους:

$$V_A = V_{A \max} \cdot \frac{H}{H+B} \quad (21)$$

όπου

$V_{A \max}$  η μέγιστη ταχύτητα καθίζησης του φυτοπλαγκτόν (m/day)  
 $B$  το βάθος για το οποίο η ταχύτητα καθίζησης γίνεται ίση με το μισό της μέγιστης (m)

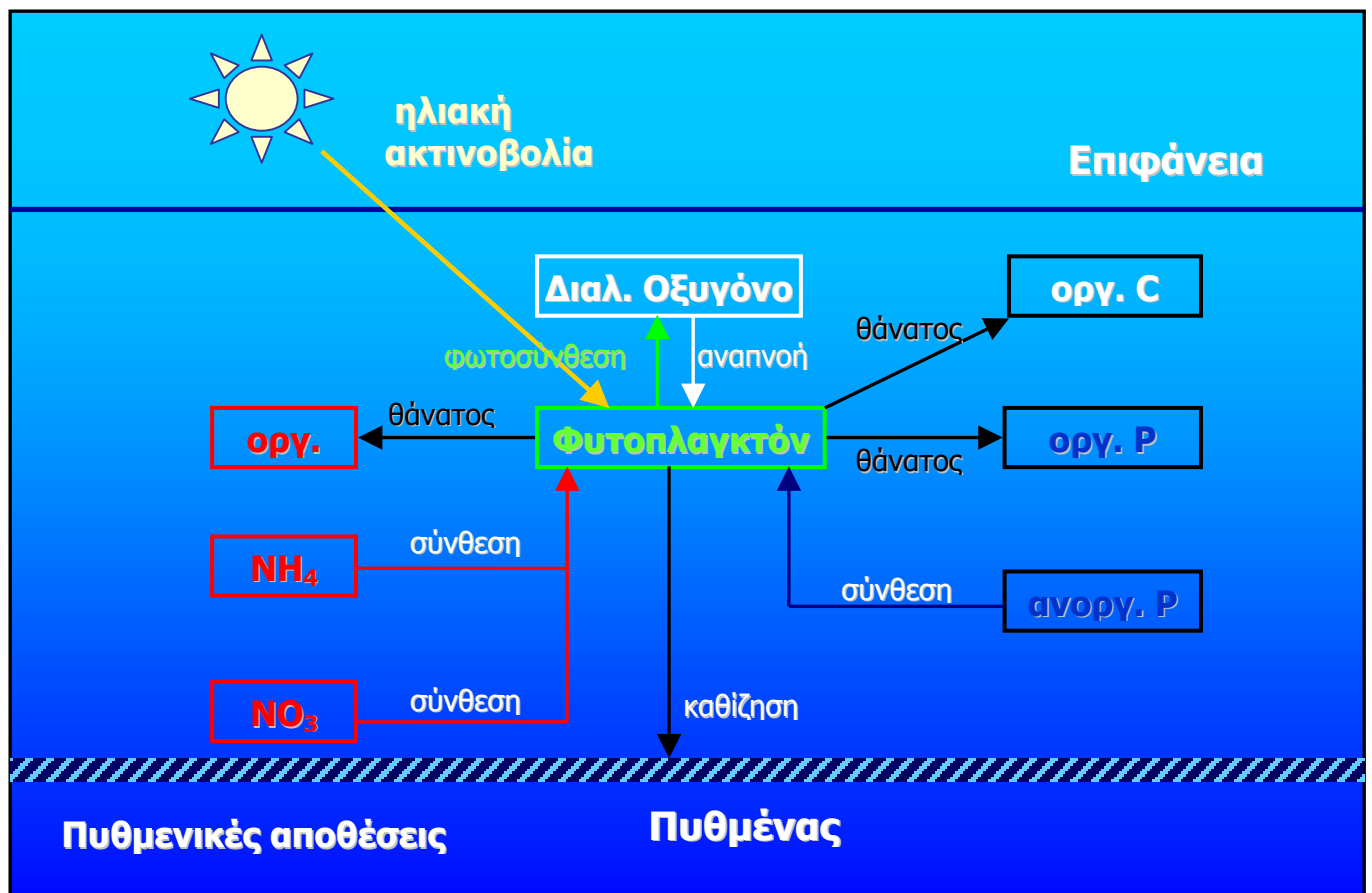
Η τελική διαφορική εξίσωση που επιλύεται για την εύρεση της συγκέντρωσης του φυτοπλαγκτόν είναι η

$$\frac{dM_{\text{Chl}}}{dt} = (\mu - K_{\text{dA}} - R_A - K_{\text{SA}}) \cdot M_{\text{Chl}} + \left( \sum_i Q_{\text{in}}^i \cdot C_{\text{in Chl}}^i \right) - \left( \sum_k Q_{\text{out}}^k \right) \cdot \frac{M_{\text{Chl}}}{V} \quad (22)$$

όπου

$M_{\text{Chl}}$  μάζα φυτοπλαγκτόν σε όρους χλωροφύλλης-α στο στοιχείο πλήρους μίξης (g)  
 $V$  όγκος στοιχείου πλήρους μίξης ( $\text{m}^3$ )  
 $Q_{\text{in}}^i$  η παροχή της εισροής I στο στοιχείο πλήρους μίξης ( $\text{m}^3/\text{day}$ )  
 $C_{\text{in Chl}}^i$  η συγκέντρωση σε χλωροφύλλη-α της εισροής i ( $\text{g}/\text{m}^3$ )  
 $Q_{\text{out}}^k$  η παροχή της εκροής k από το στοιχείο πλήρους μίξης ( $\text{m}^3/\text{day}$ )

Το σχηματικό διάγραμμα του υπομοντέλου του φυτοπλαγκτόν φαίνεται στο Σχήμα 4



#### Σχήμα 4: Υπομοντέλο φυτοπλαγκτόν

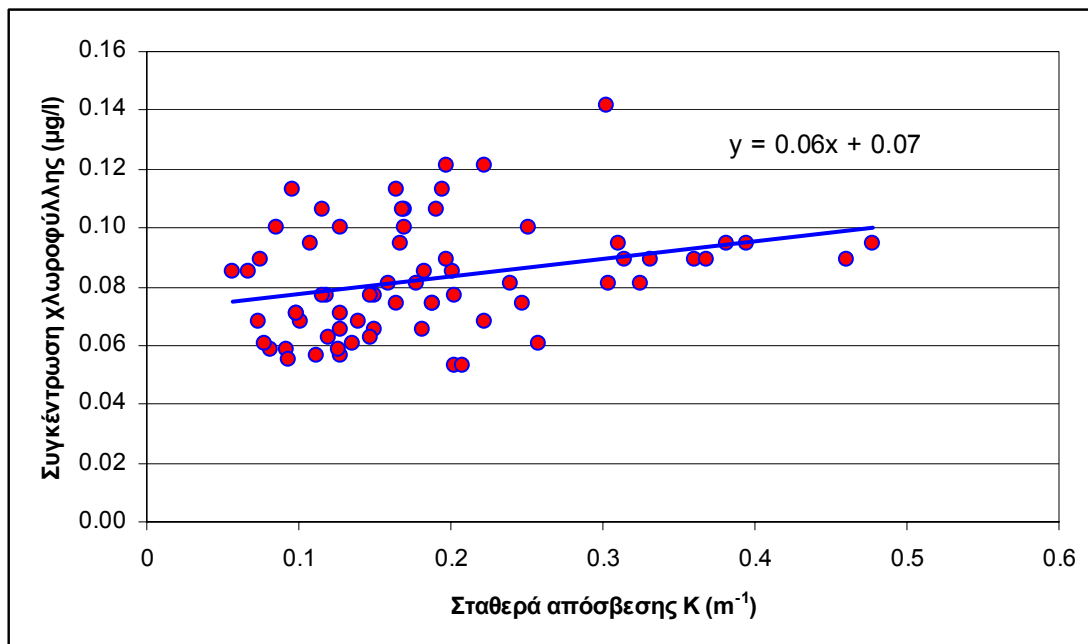
##### Προσδιορισμός παραμέτρων

Οι τιμές για το  $\mu_{\max}$  που αναφέρονται στη βιβλιογραφία δεν παρουσιάζουν πολύ μεγάλες διακυμάνσεις. Ο Gargas (1976) προτείνει την τιμή  $2.5 \text{ day}^{-1}$ , ο Orlob (1975) τιμές από  $1-2 \text{ day}^{-1}$ , ο O' Connor (1976) τιμές στο διάστημα  $1.3-2.5 \text{ day}^{-1}$  και ο Larsen (1974) την τιμή  $2.4 \text{ day}^{-1}$ .

Γενική συμφωνία φαίνεται να υπάρχει σε σχέση με την τιμή  $I_s$ , με πιο συνηθισμένη προτεινόμενη τιμή τα  $300 \text{ cal/cm}^2/\text{day}$  (Thomann 1975, O' Connor 1976 και 1973, Chen και Orlob 1975).

Όσον αφορά στην τιμή της σταθεράς απόσβεσης  $K$  της ηλιακής ακτινοβολίας, σε εύκρατους ωκεανούς έχουν μετρηθεί τιμές που κυμαίνονται μεταξύ  $0.10 - 0.20 \text{ m}^{-1}$ , ενώ σε παράκτια ύδατα ο συντελεστής  $K$  μπορεί να φτάσει την τιμή  $K=1.0 \text{ m}^{-1}$ . Σε πολύ θολές λίμνες έχουν μετρηθεί τιμές  $K_z$  μέχρι  $3.0 - 4.0 \text{ m}^{-1}$  (Χριστούλας κ.α., 1995). Στην περιοχή του λιμένος του Sydney της Αυστραλίας μετρήθηκε ποσοστιαία μείωση της ακτινοβολίας 20%, 60% και 90% σε βάθη  $Z$  ίσα με 0.5, 2.0 και 5.0 m αντίστοιχως (Bellair et al, 1977). Τα ζεύγη αυτά επαληθεύουν την εκθετική σχέση (4.13) και δίνουν  $K=0.46 \text{ m}^{-1}$ . Στον Εσωτερικό Σαρωνικό Κόλπο έχει γίνει δεκτή μείωση 90% για  $Z=0.30 \text{ m}$  (Χριστούλας και Ανδρεαδάκης, 1989) που αντιστοιχεί σε  $K=0.35 \text{ m}^{-1}$ .

Για τον προσδιορισμό των  $K_w$  και  $K_A$ , αποτελέσματα μετρήσεων διαφάνειας και χλωροφύλλης σε σημεία του Ευβοϊκού και Σαρωνικού κόλπου (Ανδρεαδάκης κ.α., 1998) έδωσαν τιμές  $0.07 \text{ m}^{-1}$  και  $0.06 \text{ l/mg/m}$  αντίστοιχα (Σχήμα 5). Επίσης οι Dugdale και Wilkinson (1985) προτείνουν τιμές για τα  $K_w$  και  $K_A$   $0.07$  και  $0.0523$  αντίστοιχα.



Σχήμα 5: Συσχέτιση σταθεράς απόσβεσης  $K$  με συγκέντρωση χλωροφύλλης.

Για το συντελεστή  $K_p$  οι τιμές που προτείνονται στη βιβλιογραφία κυμαίνονται από  $0.001 - 0.005 \text{ mg/l}$  (Orlob 1983).

Βιβλιογραφικές αναφορές δίνουν τιμές  $K_{N0} = 0.05$  και  $A_4 = 1.0415$  και συνεπώς τιμές  $K_{N0} = 0.085 - 0.14$  mg/l για διακύμανση θερμοκρασιών από 13°C-25°C. Οι τιμές αυτές του  $K_N$  βρίσκονται σε καλή συμφωνία με τις βιβλιογραφικές τιμές που αναφέρονται για θαλάσσια υδάτινα συστήματα (τιμές από 5-10  $\mu\text{g}/\text{l}$ , I Valiela Marine Ecological processes, 1984).

Ο συντελεστής της ενδογενούς αναπνοής  $R_A$  έχει δοθεί ίσος με  $0.06 \text{ day}^{-1}$  από τον Gargas (1976), οι δε μέγιστες τιμές του συντελεστή που έχει χρησιμοποιήσει ο Jorgensen βρίσκονται στο διάστημα  $0.08-0.13 \text{ day}^{-1}$ .

Οι συντελεστές ταχύτητας θανάτου του φυτοπλαγκτόν κυμαίνονται σημαντικά από  $0.003-0.17 \text{ day}^{-1}$  (Limnotech 1977). Στο μοντέλο υπεισέρχεται συντελεστής  $K_{dA}$  που μεταβάλλεται σε συνάρτηση με τη θερμοκρασία (σχέση 10.22) και συνεπώς χρησιμοποιήθηκαν τιμές των  $K_{dA(20)}$  και  $A_3$  σχετικά μεγαλύτερες από αυτές τις βιβλιογραφίας οι οποίες όμως δικαιολογούνται αν ληφθεί υπόψη ότι το μοντέλο δεν περιγράφει την κατανάλωση φυτοπλαγκτόν από το ζωοπλαγκτόν, γεγονός που καλύπτεται έμμεσα από την αυξημένη τιμή του  $K_{dA(20)}$ . Εξάλλου, δεχόμενοι ότι και η κατανάλωση του φυτοπλαγκτόν από το ζωοπλαγκτόν κατά πάσα πιθανότητα εξαρτάται από τη θερμοκρασία, είναι λογικό να αναμένεται πιο έντονη επίδραση της θερμοκρασίας στην ταχύτητα θανάτου του φυτοπλαγκτόν και συνεπώς αυξημένη τιμή του συντελεστή  $A_3$ .

Στη βιβλιογραφία υπάρχουν αναφορές για τιμές της ταχύτητας καθίζησης  $V_{\text{chl max}} = 0.05-1.94 \text{ m/day}$  (Ανδρεαδάκης κ.α, 1998, Di Toro, 1971, Hydrosience, Inc. 1973, Canale, 1974, Thoman, 1975, Lung, 1975 και Bierman και Richardson, 1976), ενώ για το συντελεστή  $B$  προτείνονται τιμές  $10 - 15 \text{ m}$  (Αφραταίος, 1986). Η μεγάλη διακύμανση των τιμών της ταχύτητας καθίζησης φανερώνει τη μεγάλη επίδραση τόσο των χαρακτηριστικών των καθιζανόντων κυττάρων (π.χ. μέγεθος), όσο και της γενικότερης τύρβης και κυκλοφορίας που επικρατεί στο υδάτινο σώμα.

### 3.3 Φώσφορος

Ο φώσφορος στο υδάτινο περιβάλλον εμφανίζεται με τη μορφή του οργανικού ή ανόργανου φωσφόρου και με σωματιδιακή μορφή. Η ποσοτική κατανομή μεταξύ των διαφόρων μορφών εξαρτάται από τις βιολογικές, φυσικές και χημικές διεργασίες που επιτελούνται. Εσωτερικές πηγές του σωματιδιακού οργανικού φωσφόρου είναι α) τα υπολείμματα της χρήσης του φυτοπλαγκτόν από το ζωοπλαγκτόν, β) ο θάνατος του ζωοπλαγκτόν και γ) η χρήση του ζωοπλαγκτόν από ανώτερους οργανισμούς. Απώλειες του σωματιδιακού φωσφόρου οφείλονται κυρίως στην καθίζηση και στη μετατροπή του σε διαλυμένο οργανικό φώσφορο. Οι κυριότερες πηγές του διαλυμένου οργανικού φωσφόρου είναι ο θάνατος και η αναπνοή του φυτοπλαγκτόν και η μετατροπή του οργανικού σωματιδιακού φωσφόρου σε διαλυμένο ενώ οι απώλειες συνίστανται στη μετατροπή του σε ανόργανο διαλυμένο φώσφορο.

Ο ανόργανος διαλυμένος φώσφορος είναι η μορφή που μπορεί να προσληφθεί από το φυτοπλαγκτόν και προέρχεται κυρίως από τη μετατροπή του οργανικού διαλυμένου σε ανόργανο. Μία άλλη εσωτερική πηγή φωσφόρου που μπορεί σε ορισμένες περιπτώσεις να είναι σημαντική (συνήθως κάτω από ανοξικές συνθήκες) είναι η τροφοδοσία με φώσφορο από τις πυθμενικές αποθέσεις. Το φαινόμενο αυτό περιλαμβάνει διαδικασίες επαναιώρησης του σωματιδιακού φωσφόρου αλλά κυρίως απελευθέρωσης διαλυμένου φωσφόρου με χημικές διαδικασίες. Η λεπτομερής περιγραφή του φαινομένου συνήθως απαιτεί δύσκολη μαθηματική προσομοίωση των επί μέρους διαδικασιών. Συχνά όμως σε μοντέλα ποιότητας και ευτροφισμού η συνεισφορά των πυθμενικών φωσφορικών αποθέσεων περιγράφεται με απλούστερες σχέσεις.

#### 3.3.1 Οργανικός φώσφορος

Έχει παρατηρηθεί ότι η μετατροπή του σωματιδιακού οργανικού φωσφόρου σε διαλυμένο οργανικό φώσφορο γίνεται ταχύτερα μέσω μηχανισμών ενζυμικής υδρόλυσης. Το γεγονός αυτό καθιστά την υδρόλυση μη κρίσιμη διαδικασία που μπορεί να παραλειφθεί κατά τη μαθηματική προσομοίωση. Θεωρούνται κατά συνέπεια δύο μορφές φωσφόρου, οργανικός και ανόργανος φώσφορος.

Πίνακας 2: Διεργασίες που επηρεάζουν τη συγκέντρωση οργανικού φωσφόρου

Παραγωγή οργανικού φωσφόρου	Κατανάλωση οργανικού φωσφόρου
<ul style="list-style-type: none"><li>• Θάνατος φυτοπλαγκτόν</li><li>• Ενδογενής αναπνοή φυτοπλαγκτόν</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Μετατροπή σε ανόργανο φώσφορο</li><li>• Καθίζηση</li></ul>

Η τροφοδότηση με οργανικό φώσφορο λόγω θανάτου και ενδογενούς αναπνοής του φυτοπλαγκτόν μπορεί να περιγραφεί από τη σχέση

$$\frac{dM_{OP}}{dt} = (K_{dA} + R_A) \cdot M_{Chl} \cdot Y_1 \quad (23)$$

όπου

$M_{OP}$  μάζα οργανικού φωσφόρου στο στοιχείο πλήρους μίξης (g)

$M_{Chl}$  μάζα φυτοπλαγκτόν σε όρους χλωροφύλλης-a στο στοιχείο πλήρους μίξης (g)

$K_{dA}$  ρυθμός θανάτου φυτοπλαγκτόν ( $day^{-1}$ )

$R_A$	ρυθμός ενδογενούς αναπνοής ( $\text{day}^{-1}$ )
$Y_1$	περιεκτικότητα φυτοπλαγκτόν σε φώσφορο ( $\frac{\text{g P}}{\text{g χλωροφύλλης}}$ )

Επισημαίνεται ότι η αυξημένη τιμή του  $K_{\text{death}}$  επιτρέπει την προσμέτρηση του φωσφόρου που παράγεται από το ζωοπλαγκτόν, κατά το σκεπτικό της προηγούμενης ενότητας.

Οι απώλειες του οργανικού φωσφόρου οφείλονται στη μετατροπή του σε ανόργανη μορφή και στην καθίζηση. Οι δύο αυτές διαδικασίες μπορούν να περιγραφούν από τη σχέση:

$$\frac{dM_{\text{OP}}}{dt} = -(R_P + K_{\text{SP}}) \cdot M_{\text{OP}} \quad (24)$$

Όπου

$R_P$	συντελεστής ταχύτητας μετατροπής οργανικού φωσφόρου σε ανόργανο ( $\text{day}^{-1}$ )
$K_{\text{SP}}$	συντελεστής καθίζησης οργανικού φωσφόρου ( $\text{day}^{-1}$ )

Ο συντελεστής  $R_P$  θεωρήθηκε εξαρτώμενος από τη θερμοκρασία

$$R_P = R_{P0} + A_5 \cdot T \quad (25)$$

όπου

$R_P$	συντελεστής ταχύτητας μετατροπής οργανικού φωσφόρου σε ανόργανο σε θερμοκρασία $T$ °C ( $\text{day}^{-1}$ )
$R_{P0}$	συντελεστής ταχύτητας μετατροπής οργανικού φωσφόρου σε ανόργανο σε θερμοκρασία $0$ °C ( $\text{day}^{-1}$ )
$T$	θερμοκρασία (°C)

Ο συντελεστής ταχύτητας καθίζησης  $K_{\text{SP}}$  σε αναλογία με το συντελεστή καθίζησης φυτοπλαγκτόν  $K_{\text{SA}}$  μπορεί να περιγραφεί από τη σχέση:

$$K_{\text{SP}} = \frac{V_{P \text{ max}}}{H + B} \quad (26)$$

όπου

$V_{P \text{ max}}$	η μέγιστη ταχύτητα καθίζησης του οργανικού φωσφόρου (m/day)
$B$	το βάθος για το οποίο η ταχύτητα καθίζησης γίνεται ίση με το μισό της μέγιστης (m)

Η τελική διαφορική εξίσωση που επιλύεται για την εύρεση της συγκέντρωσης του οργανικού φωσφόρου είναι η



$$\frac{dM_{OP}}{dt} = (K_{dA} + R_A) \cdot Y_1 \cdot M_{Chl} - (R_P + K_{SP}) \cdot M_{OP} + \left( \sum_i Q_{in}^i \cdot C_{in\ OP}^i \right) - \left( \sum_k Q_{out}^k \right) \cdot \frac{M_{OP}}{V} \quad (27)$$

όπου

$M_{OP}$	μάζα οργανικού φωσφόρου στο στοιχείο πλήρους μίξης (g)
$V$	όγκος στοιχείου πλήρους μίξης ( $m^3$ )
$Q_{in}^i$	η παροχή της εισροής $i$ στο στοιχείο πλήρους μίξης ( $m^3/day$ )
$C_{in\ OP}^i$	η συγκέντρωση σε οργανικό φώσφορο της εισροής $i$ ( $g/m^3$ )
$Q_{out}^k$	η παροχή της εκροής $k$ από το στοιχείο πλήρους μίξης ( $m^3/day$ )

### 3.3.2 Ανόργανος Φώσφορος

Η εσωτερική τροφοδότηση με ανόργανο φώσφορο οφείλεται στη μετατροπή του οργανικού σε ανόργανο φώσφορο και στην τροφοδότηση με ανόργανο φώσφορο από τον πυθμένα. Η πρώτη διαδικασία, δίνεται από την εξίσωση (24). Η διαδικασία τροφοδότησης από τον πυθμένα συνήθως περιγράφεται με την ακόλουθη απλή έκφραση:

$$\frac{dM_{IP}}{dt} = K_{RP} \cdot E \quad (28)$$

όπου

$M_{IP}$	μάζα ανόργανου φωσφόρου στο στοιχείο πλήρους μίξης (g)
$K_{RP}$	συντελεστής τροφοδότησης από πυθμένα ( $g/m^2/day$ )
$E$	επιφάνεια πυθμένα στοιχείου πλήρους μίξης ( $m^2$ )

Πίνακας 3: Διεργασίες που επηρεάζουν τη συγκέντρωση ανόργανου φωσφόρου

Παραγωγή ανόργανου φωσφόρου	Κατανάλωση ανόργανου φωσφόρου
<ul style="list-style-type: none"> <li>Μετατροπή από οργανικό φώσφορο</li> <li>Τροφοδότηση από πυθμένα</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Πρόσληψη από φυτοπλαγκτόν κατά την ανάπτυξη</li> </ul>

Οι απώλειες του ανόργανου φωσφόρου οφείλονται στην πρόσληψη του από το φυτοπλαγκτόν, κατά την εξίσωση :

$$\frac{dM_{IP}}{dt} = \mu \cdot M_{Chl} \cdot Y_1 \quad (29)$$

όπου

$M_{IP}$	μάζα ανόργανου φωσφόρου στο στοιχείο πλήρους μίξης (g)
$M_{Chl}$	μάζα φυτοπλαγκτόν σε όρους χλωροφύλλης- $a$ στο στοιχείο πλήρους μίξης (g)
$\mu$	μέση ταχύτητα ανάπτυξης φυτοπλαγκτόν στην υγρή στήλη ( $day^{-1}$ )

$Y_1$  περιεκτικότητα φυτοπλαγκτόν σε φώσφορο ( $\frac{\text{g P}}{\text{g χλωροφύλλης}}$ )

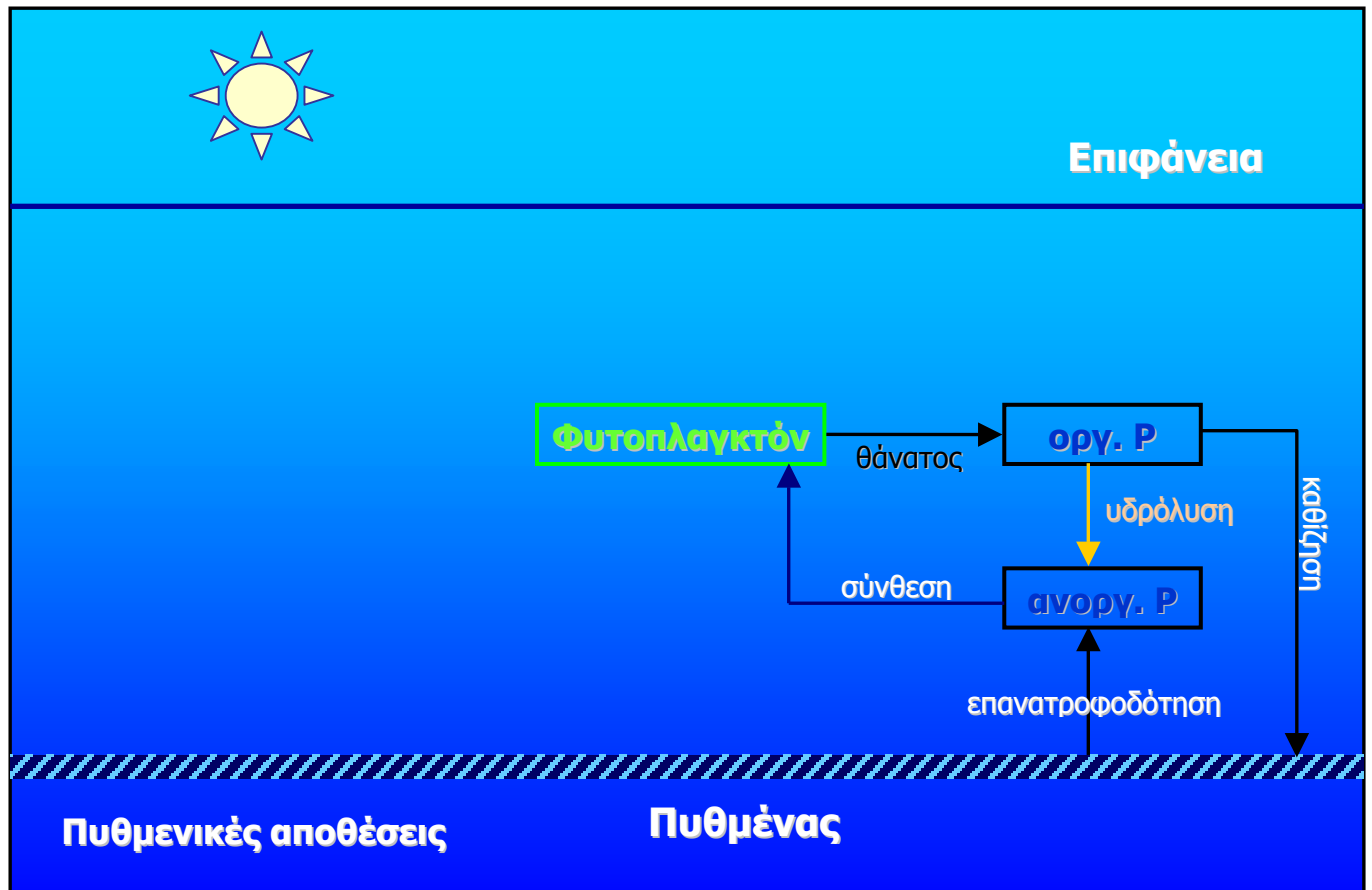
Η τελική διαφορική εξίσωση που επιλύεται για την εύρεση της συγκέντρωσης του ανόργανου φωσφόρου είναι η

$$\frac{dM_{IP}}{dt} = R_p \cdot M_{OP} + K_{RP} \cdot E - \mu \cdot M_{Chl} \cdot Y_1 + \left( \sum_i Q_{in}^i \cdot C_{in\ IP}^i + \sum_j W_{IP}^j \right) - \left( \sum_k Q_{out}^k \right) \cdot \frac{M_{IP}}{V} \quad (30)$$

όπου

$M_{IP}$	μάζα ανόργανου φωσφόρου στο στοιχείο πλήρους μίξης (g)
$V$	όγκος στοιχείου πλήρους μίξης ( $m^3$ )
$Q_{in}^i$	η παροχή της εισροής $i$ στο στοιχείο πλήρους μίξης ( $m^3/day$ )
$C_{in\ IP}^i$	η συγκέντρωση σε ανόργανο φώσφορο της εισροής $I$ ( $g/m^3$ )
$W_{IP}^j$	ρυθμός προσθήκης ανόργανου φωσφόρου από την εξωτερική πηγή $j$ ( $g/day$ )
$Q_{out}^k$	η παροχή της εκροής $k$ από το στοιχείο πλήρους μίξης ( $m^3/day$ )

Το σχηματικό διάγραμμα του υπομοντέλου του φωσφόρου φαίνεται στο Σχήμα 6



Σχήμα 6: Υπομοντέλο φωσφόρου.

### Προσδιορισμός Παραμέτρων

Οι τιμές της ταχύτητας καθίζησης  $V_{Pmax}$  έχουν βρεθεί ότι κυμαίνονται σε όρια αντίστοιχα με αυτά για την  $V_{Amax}$ , με κάπως μικρότερες τιμές (0.05-1.15 m/day).

Η αναλογία φωσφόρου προς χλωροφύλλη στο φυτοπλαγκτόν,  $Y_1$ , έχει βρεθεί ότι κυμαίνεται από 0.63 – 1.0. Οι Di Toro (1975), O' Connor (1976 και 1973) και ο Thomann (1975) προτείνουν την τιμή 1. Ο Larsen (1974) χρησιμοποίησε την τιμή 0.63 και η Limnotech (1977) την τιμή 0.8.

Αναφορικά με τον ρυθμό έκλυσης φωσφόρου από το εδαφικό υλικό προτείνεται η τιμή των 1.50 mg/m<sup>2</sup>/day. Αντίστοιχες τιμές αναφέρονται και στη διεθνή βιβλιογραφία (Johnes 1996; McCuckin et al., 1999).

### 3.4 Άζωτο

Το άζωτο εμφανίζεται κατά κύριο λόγο ως οργανικό, αμμωνιακό και οξειδωμένο (νιτρώδη και νιτρικά) άζωτο με ποσοτική κατανομή που εξαρτάται από τις διεργασίες και τους περιβαλλοντικούς παράγοντες.

Για τις ανάγκες του μοντέλου, θεωρήθηκε επαρκής η θεώρηση δύο μόνων μορφών αζώτου, του αμμωνιακού αζώτου και των νιτρικών. Η απλούστευση αυτή βασίζεται επίσης στο γεγονός ότι η διαδικασία της αμμωνιοποίησης γίνεται κατά κανόνα με σημαντικά ταχύτερο ρυθμό σε σχέση με τις άλλες διεργασίες.

#### 3.4.1 Αμμωνιακό άζωτο

Εσωτερικές πηγές αμμωνιακού αζώτου κανονικά δεν υπάρχουν, δεδομένου ότι τα περιττώματα του ζωοπλαγκτόν καθώς και ο θάνατος τόσο του ζωοπλαγκτόν όσο και του φυτοπλαγκτόν δημιουργούν οργανικό άζωτο. Επειδή όμως για τους λόγους που προαναφέρθηκαν δε χρησιμοποιείται εξίσωση ισορροπίας για το οργανικό άζωτο, στη φάση αυτή θεωρείται ότι οι παραπάνω διεργασίες συνεισφέρουν στη δημιουργία αμμωνιακού αζώτου, κάτι που οπωσδήποτε στην πραγματικότητα γίνεται έμμεσα με την αμμωνιοποίηση του οργανικού αζώτου.

Πίνακας 4: Διεργασίες που επηρεάζουν τη συγκέντρωση αμμωνιακού αζώτου

Παραγωγή αμμωνιακού αζώτου	Κατανάλωση αμμωνιακού αζώτου
<ul style="list-style-type: none"> <li>Αμμωνιοποίηση οργανικού αζώτου που ελευθερώνεται κατά το θάνατο του φυτοπλαγκτόν</li> <li>Τροφοδότηση από πυθμένα</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Πρόσληψη από φυτοπλαγκτόν κατά την ανάπτυξη</li> <li>Νιτροποίηση</li> </ul>

Η συνεισφορά του ζωοπλαγκτόν, όπως και στην περίπτωση του φωσφόρου, εμπεριέχεται στην αυξημένη ταχύτητα θανάτου του φυτοπλαγκτόν. Κατά συνέπεια η δημιουργία αμμωνιακού αζώτου περιγράφεται από τη σχέση:

$$\frac{dM_{NH}}{dt} = K_{dA} \cdot M_{Chl} \cdot Y_2 \quad (31)$$

όπου

$M_{NH}$  μάζα αμμωνιακού αζώτου στο στοιχείο πλήρους μίξης (g)

$K_{dA}$  ρυθμός θανάτου φυτοπλαγκτόν ( $day^{-1}$ )

$Y_2$  περιεκτικότητα φυτοπλαγκτόν σε άζωτο ( $\frac{g N}{g \text{ χλωροφύλλης}}$ )

Μία δεύτερη πηγή αμμωνιακού αζώτου είναι η τροφοδότηση από το εδαφικό υλικό του πυθμένα.

Η διαδικασία αυτή περιγράφεται με την ακόλουθη απλή έκφραση:

$$\frac{dM_{NH}}{dt} = K_{RN} \cdot E \quad (32)$$

όπου

$M_{NH}$	μάζα αμμωνιακού αζώτου στο στοιχείο πλήρους μίξης (g)
$K_{RN}$	συντελεστής τροφοδότησης από πυθμένα (g/m <sup>2</sup> /day)
E	επιφάνεια πυθμένα στοιχείου πλήρους μίξης (m <sup>2</sup> )

Οι απώλειες του αμμωνιακού αζώτου οφείλονται στις διαδικασίες πρόσληψης κατά τη σύνθεση του φυτοπλαγκτόν και στη νιτροποίηση, δηλαδή τη βιοχημική οξείδωση του αμμωνιακού αζώτου πρώτα σε νιτρώδη (NO<sub>2</sub>) και στη συνέχεια σε νιτρικά (NO<sub>3</sub>). Για τις τιμές του pH που επικρατούν, η διαφυγή αμμωνίας στην ατμόσφαιρα είναι αμελητέα.

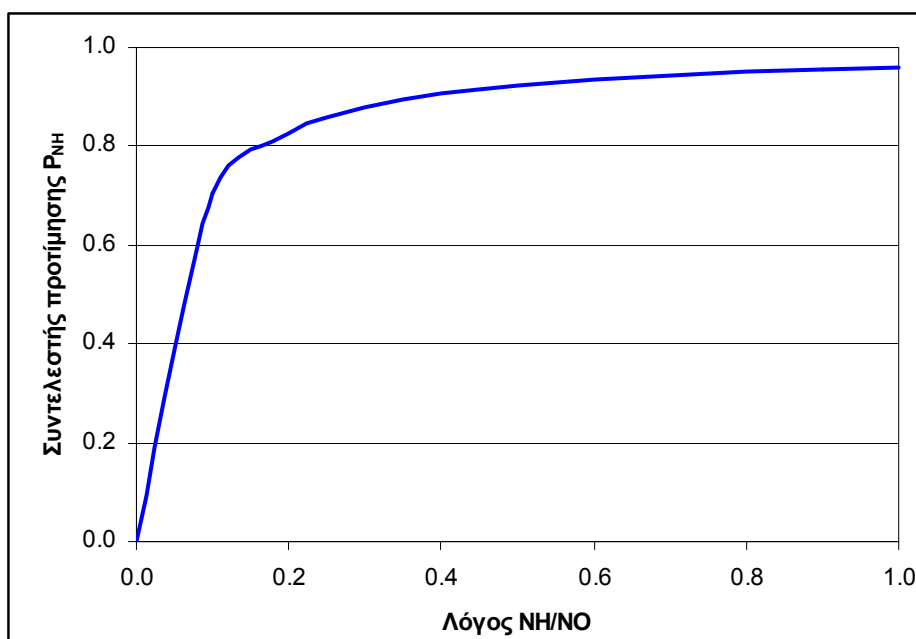
Η χρησιμοποίηση του αμμωνιακού αζώτου από το φυτοπλαγκτόν εξαρτάται από την ποσοστιαία κατανομή των μορφών του ανόργανου αζώτου και συγκεκριμένα από το λόγο αμμωνιακού αζώτου προς τα νιτρικά. Έχει προταθεί η χρήση ενός συντελεστή  $P_{NH}$ , ο οποίος εξαρτάται από τον παραπάνω λόγο, και ο οποίος εκφράζει την προτίμηση των αλγών προς την αμμωνία σε σχέση με την προτίμηση τους προς τα νιτρικά. Η σχέση που δίνει τον συντελεστή  $P_{NH}$  είναι η ακόλουθη :

$$P_{NH} = \frac{0,96 \cdot M_{NH}}{0,96 \cdot M_{NH} + 0,04 \cdot M_{NO}} \quad (33)$$

όπου

$P_{NH}$	συντελεστής προτίμησης (αδιάστατος)
$M_{NH}$	μάζα αμμωνιακού αζώτου στο στοιχείο πλήρους μίξης (g)
$M_{NO}$	μάζα οξειδωμένου αζώτου στο στοιχείο πλήρους μίξης (g)

Η γραφική παράσταση της εξίσωσης (33) φαίνεται στο Σχήμα 7.



Σχήμα 7: Σχέση συντελεστή προτίμησης  $P_{NH}$  και λόγου NH/NO

Η χρησιμοποίηση του αμμωνιακού αζώτου από το φυτοπλαγκτόν μπορεί επομένως να εκφραστεί ως εξής:

$$\frac{dM_{NH}}{dt} = -\mu \cdot P_{NH} \cdot M_{Chl} \cdot Y_2 \quad (34)$$

όπου

$M_{NH}$	μάζα αμμωνιακού αζώτου στο στοιχείο πλήρους μίξης (g)
$M_{Chl}$	μάζα φυτοπλαγκτόν σε όρους χλωροφύλλης-α στο στοιχείο πλήρους μίξης (g)
$\mu$	μέση ταχύτητα ανάπτυξης φυτοπλαγκτόν στην υγρή στήλη ( $\text{day}^{-1}$ )
$P_{NH}$	συντελεστής προτίμησης αμμωνίας (αδιάστατος)
$Y_2$	περιεκτικότητα φυτοπλαγκτόν σε άζωτο ( $\frac{\text{g N}}{\text{g χλωροφύλλης}}$ )

Η δεύτερη διαδικασία που συντελεί στη μείωση του αμμωνιακού αζώτου, είναι η νιτροποίηση που μπορεί για τις μικρές συγκεντρώσεις που παρατηρούνται στα υδάτινα οικοσυστήματα να περιγραφεί με κινητική πρώτης τάξης:

$$\frac{dM_{NH}}{dt} = -R_N \cdot M_{NH} \quad (35)$$

όπου

$R_N$	συντελεστής νιτροποίησης ( $\text{day}^{-1}$ )
-------	--

Είναι γνωστό ότι η διαδικασία της νιτροποίησης επηρεάζεται έντονα από τη θερμοκρασία με την οποία συνεπώς θα πρέπει να συσχετισθεί ο συντελεστής  $R_N$ . Η σχέση που χρησιμοποιήθηκε είναι εκθετικής μορφής:

$$R_N = R_{N(20)} \cdot A_6^{T-20} \quad (36)$$

όπου

$R_N$	συντελεστής ταχύτητας νιτροποίησης σε θερμοκρασία $T$ °C ( $\text{day}^{-1}$ )
$R_{N(20)}$	συντελεστής ταχύτητας νιτροποίησης σε θερμοκρασία 20 °C ( $\text{day}^{-1}$ )
$A_6$	θερμοκρασιακός συντελεστής (αδιάστατος)

Η τελική διαφορική εξίσωση που επιλύεται για την εύρεση της συγκέντρωσης του αμμωνιακού αζώτου είναι η

$$\frac{dM_{NH}}{dt} = (Y_2 \cdot K_{dA} - \mu \cdot Y_2 \cdot P_{NH}) \cdot M_{Chl} - R_N \cdot M_{NH} + K_{RN} \cdot E + \left( \sum_i Q_{in}^i \cdot C_{in\ NH}^i + \sum_j W_{NH}^j \right) - \left( \sum_k Q_{out}^k \right) \cdot \frac{M_{NH}}{V} \quad (37)$$

όπου

$M_{NH}$	μάζα αμμωνιακού αζώτου στο στοιχείο πλήρους μίξης (g)
$V$	όγκος στοιχείου πλήρους μίξης ( $m^3$ )
$Q_{in}^i$	η παροχή της εισροής $i$ στο στοιχείο πλήρους μίξης ( $m^3/day$ )
$C_{in\ NH}^i$	η συγκέντρωση σε αμμωνιακό άζωτο της εισροής $i$ ( $g/m^3$ )
$W_{NH}^j$	ρυθμός προσθήκης αμμωνιακού αζώτου από την εξωτερική πηγή $j$ ( $g/day$ )
$Q_{out}^k$	η παροχή της εκροής $k$ από το στοιχείο πλήρους μίξης ( $m^3/day$ )

### 3.4.2 Οξειδωμένο Άζωτο

Η εσωτερική δημιουργία νιτρικών οφείλεται στη διαδικασία της νιτροποίησης η οποία περιγράφεται από τη σχέση (35). Οι απώλειες οφείλονται στη χρησιμοποίηση των νιτρικών από το φυτοπλαγκτόν και την απονιτροποίηση.

Πίνακας 5: Διεργασίες που επηρεάζουν τη συγκέντρωση οξειδωμένου αζώτου

Παραγωγή οξειδωμένου αζώτου	Κατανάλωση οξειδωμένου αζώτου
<ul style="list-style-type: none"> <li>Νιτροποίηση</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Πρόσληψη από φυτοπλαγκτόν κατά την ανάπτυξη</li> <li>Απονιτροποίηση</li> </ul>

Η μείωση λόγω πρόσληψης από το φυτοπλαγκτόν μπορεί να περιγραφεί από τη σχέση

$$\frac{dM_{NO}}{dt} = -\mu \cdot M_{Chl} \cdot Y_2 \cdot (1 - P_{NH}) \quad (38)$$

όπου

$M_{NO}$	μάζα οξειδωμένου αζώτου στο στοιχείο πλήρους μίξης (g)
$V$	όγκος στοιχείου πλήρους μίξης ( $m^3$ )
$\mu$	μέση ταχύτητα ανάπτυξης φυτοπλαγκτόν στην υγρή στήλη ( $day^{-1}$ )
$P_{NH}$	συντελεστής προτίμησης αμμωνίας (αδιάστατος)
$Y_2$	περιεκτικότητα φυτοπλαγκτόν σε άζωτο ( $\frac{mg\ N}{mg\ \chiλωροφύλλης}$ )

Η απονιτροποίηση είναι ένα σύνθετο φαινόμενο που εξαρτάται από τη συγκέντρωση του διαλυμένου οξυγόνου (ανοξικές συνθήκες) και την επάρκεια οργανικού άνθρακα και που έχει ως αποτέλεσμα την

αναγωγή των νιτρικών σε μοριακό άζωτο και τη διαφυγή του τελευταίου στην ατμόσφαιρα. Συχνά σε μοντέλα ποιότητας υδάτινων αποδεκτών χρησιμοποιείται η απλή σχέση:

$$\frac{dM_{NO}}{dt} = -K_{DN} \cdot E \quad (39)$$

όπου

$M_{NO}$	μάζα οξειδωμένου αζώτου στο στοιχείο πλήρους μίξης (g)
$K_{DN}$	συντελεστής απονιτροποίησης (g/m <sup>2</sup> /day)
$E$	επιφάνεια πυθμένα στοιχείου πλήρους μίξης (m <sup>2</sup> )

Η τελική διαφορική εξίσωση που επιλύεται για την εύρεση της συγκέντρωσης του οξειδωμένου αζώτου είναι η

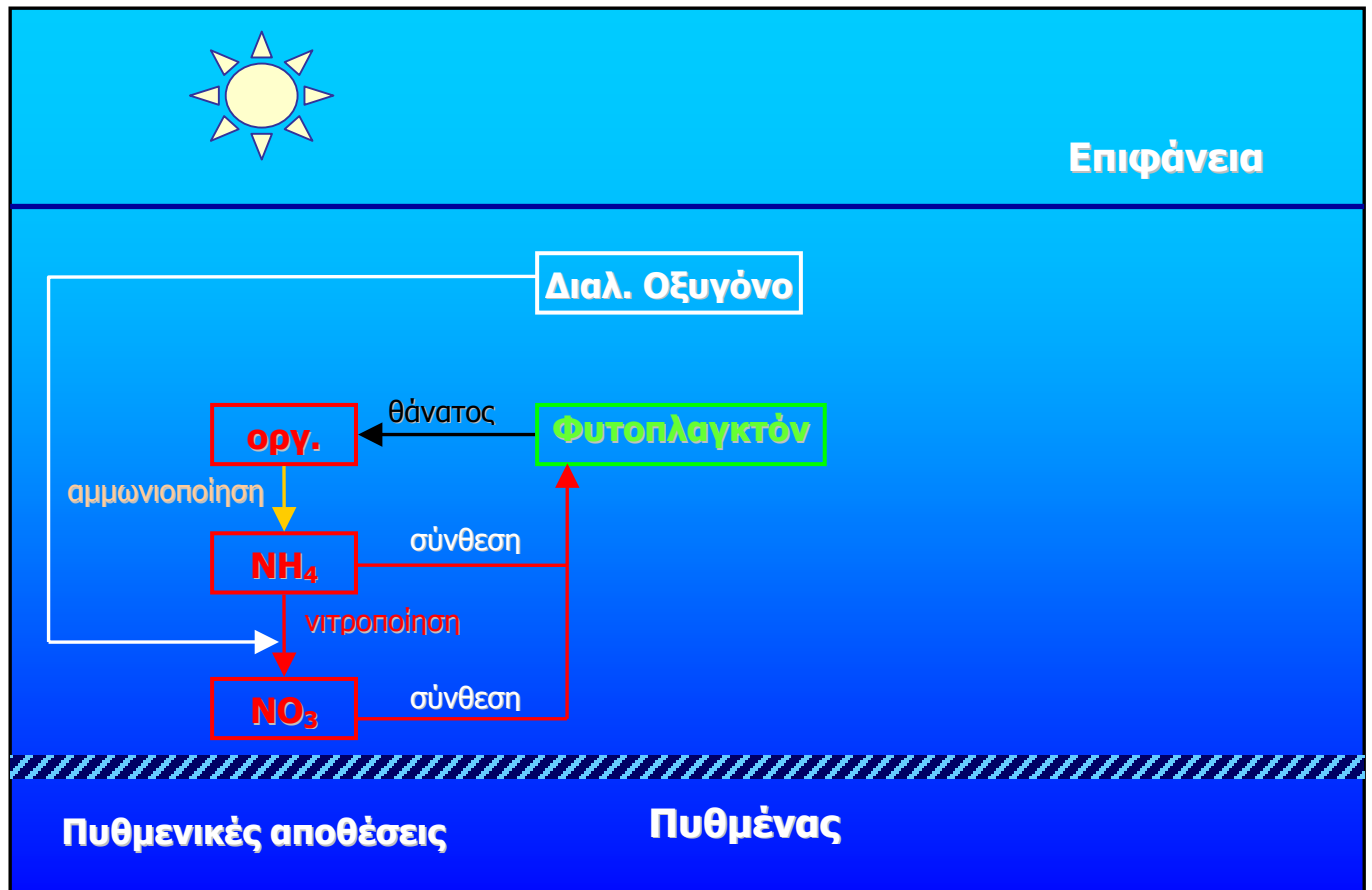
$$\frac{dM_{NO}}{dt} = R_N \cdot M_{NH} - \mu \cdot M_{Chl} \cdot Y_2 \cdot (1 - P_{NH}) - K_{DN} \cdot E + \left( \sum_i Q_{in}^i \cdot C_{in\ NO}^i + \sum_j W_{NO}^j \right) - \left( \sum_k Q_{out}^k \right) \cdot \frac{M_{NO}}{V} \quad (40)$$

όπου

$M_{NH}$	μάζα οξειδωμένου αζώτου στο στοιχείο πλήρους μίξης (g)
$V$	όγκος στοιχείου πλήρους μίξης (m <sup>3</sup> )
$Q_{in}^i$	η παροχή της εισροής $i$ στο στοιχείο πλήρους μίξης (m <sup>3</sup> /day)
$C_{in\ NO}^i$	η συγκέντρωση σε οξειδωμένο άζωτο της εισροής $i$ (g/m <sup>3</sup> )
$W_{NO}^j$	ρυθμός προσθήκης οξειδωμένου αζώτου από την εξωτερική πηγή $j$ (g/day)
$Q_{out}^k$	η παροχή της εκροής $k$ από το στοιχείο πλήρους μίξης (m <sup>3</sup> /day)

Το σχηματικό διάγραμμα του υπομοντέλου του αζώτου φαίνεται στο Σχήμα 8.





Σχήμα 8: Υπομοντέλο αζώτου.

### Προσδιορισμός Παραμέτρων

Η αναλογία αζώτου προς χλωροφύλλη στο φυτοπλαγκτόν έχει βρεθεί ότι κυμαίνεται από 7-15 mg N/mg χλωροφύλλης. Τιμές κοντά στο 7 έχουν προταθεί από τους Di Toro (1975) και Larsen (1974), ενώ τιμές κοντά στο 10 από τους O' Connor (1973, 1976) και Thomann (1975). Ο Canale (1974,1975) έχει προτείνει την τιμή 15 και η Limnotech στη μελέτη του όρμου SAGINAW (1977) την τιμή 9.

Οι Chen και Orlob (1976) και ο Canale (1975) προτείνουν για τον  $R_{N(20)}$  την τιμή  $0.030 \text{ day}^{-1}$ , ο Thoman (1975) και η Limnotech (1977) την τιμή 0.040 και ο Di Toro (1973) την τιμή 0.052. Για το θερμοκρασιακό συντελεστή έχει προταθεί η τιμή 1.088 από τη Limnotech (1977).

Αναφορικά με το ρυθμό έκλυσης αζώτου από το εδαφικό υλικό, προτείνεται η τιμή των  $1.25 \text{ mg/m}^2/\text{day}$  (Ανδρεαδάκης κ.α, 2001), ενώ αντίστοιχες τιμές αναφέρονται και στη διεθνή βιβλιογραφία (Johnes 1996; McCuckin et al., 1999).

### 3.5 Οργανικός άνθρακας

Ο οργανικός άνθρακας βρίσκεται σε σωματιδιακή ή διαλυμένη μορφή και προέρχεται (εκτός από τις εξωτερικές συνεισφορές) από το θάνατο του φυτοπλαγκτόν και το θάνατο και τα περιττώματα του ζωοπλαγκτόν. Η μετατροπή του σωματιδιακού άνθρακα σε διαλυμένο γίνεται με σχετικά μεγάλη ταχύτητα με τη βοήθεια εξωκυτταρικών υδρολυτικών ενζύμων και έτσι η διάκριση μεταξύ σωματιδιακού και διαλυμένου άνθρακα στο μοντέλο δεν κρίθηκε σκόπιμη. Θεωρήθηκε επίσης ότι η διεργασία του θανάτου του φυτοπλαγκτόν με την αυξημένη ταχύτητα με την οποία περιγράφεται περιλαμβάνει όλες τις εσωτερικές διαδικασίες παραγωγής άνθρακα που αναφέρθηκαν πιο πάνω. Επίσης οργανικός άνθρακας (C) παράγεται λόγω τροφοδότησης από πυθμενικές αποθέσεις.

Πίνακας 6: Διεργασίες που επηρεάζουν τη συγκέντρωση οργανικού άνθρακα

Παραγωγή οργανικού άνθρακα	Κατανάλωση οργανικού άνθρακα
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Θάνατος φυτοπλαγκτόν</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Οξείδωση</li> <li>• Καθίζηση</li> </ul>

Η απομάκρυνση του οργανικού άνθρακα θεωρείται ότι γίνεται με τις διαδικασίες της καθίζησης και της οξείδωσης. Για την περιγραφή της διαδικασίας της καθίζησης έχει χρησιμοποιηθεί ο συντελεστής καθίζησης  $K_{SA}$  που χρησιμοποιήθηκε για την καθίζηση του φυτοπλαγκτόν σύμφωνα με την εξίσωση:

$$\frac{dM_{OC}}{dt} = -K_{SA} \cdot M_{OC} \quad (41)$$

Η ταχύτητα διάσπασης του C για μικρές συγκεντρώσεις του περιγράφεται ικανοποιητικά με τη βοήθεια κινητικής πρώτης τάξης και με εξάρτηση του συντελεστή διάσπασης από τη θερμοκρασία.

$$\frac{dM_{OC}}{dt} = -R_L \cdot M_{OC} \quad (42)$$

και

$$R_L = R_{L(20)} \cdot A_7^{T-20} \quad (43)$$

όπου

$M_{OC}$	μάζα οργανικού άνθρακα στο στοιχείο πλήρους μίξης (g)
$K_{SA}$	ρυθμός απομάκρυνσης οργανικού άνθρακα λόγω καθίζησης ( $\text{day}^{-1}$ )
$R_L$	συντελεστής ταχύτητας οξείδωσης οργανικού άνθρακα σε θερμοκρασία T °C ( $\text{day}^{-1}$ )
$R_{L(20)}$	συντελεστής ταχύτητας οξείδωσης οργανικού άνθρακα σε θερμοκρασία 20 °C ( $\text{day}^{-1}$ )

Η τελική διαφορική εξίσωση που επιλύεται για την εύρεση της συγκέντρωσης του οργανικού άνθρακα είναι η

$$\frac{dM_{OC}}{dt} = K_{dA} \cdot M_{Chl} \cdot Y_3 - (R_L + K_{SA}) \cdot M_{OC} + \left( \sum_i Q_{in}^i \cdot C_{in\ OC}^i + \sum_j W_{OC}^j \right) - \left( \sum_k Q_{out}^k \right) \cdot \frac{M_{OC}}{V} \quad (44)$$

όπου

$M_{OC}$  μάζα οργανικού άνθρακα στο στοιχείο πλήρους μίξης (g)

$V$  όγκος στοιχείου πλήρους μίξης ( $m^3$ )

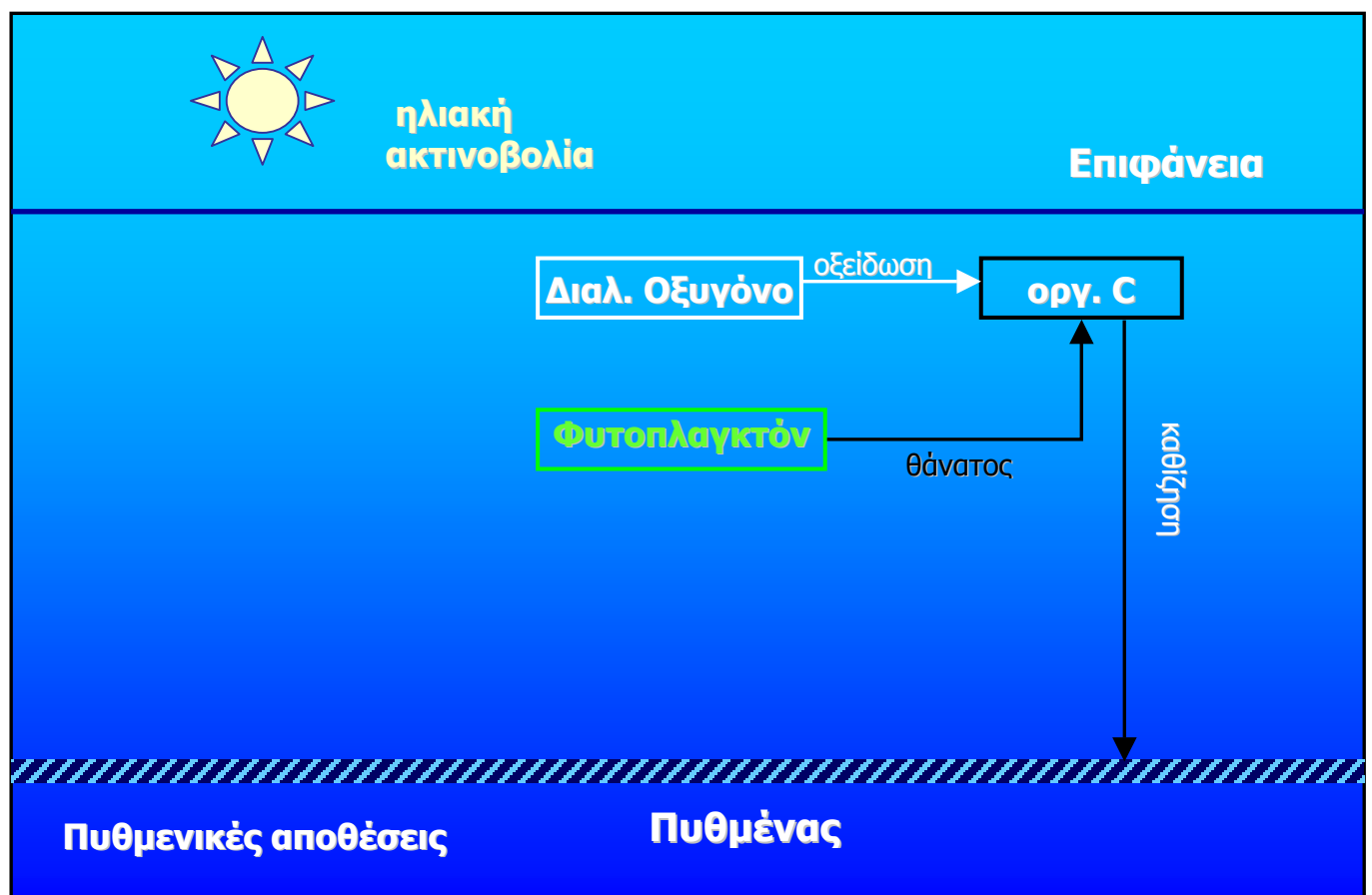
$Q_{in}^i$  η παροχή της εισροής  $i$  στο στοιχείο πλήρους μίξης ( $m^3/day$ )

$C_{in OC}^i$  η συγκέντρωση σε οργανικό άνθρακα της εισροής  $i$  ( $g/m^3$ )

$W_{OC}^j$  ρυθμός προσθήκης οργανικού άνθρακα από την εξωτερική πηγή  $j$  ( $g/day$ )

$Q_{out}^k$  η παροχή της εκροής  $k$  από το στοιχείο πλήρους μίξης ( $m^3/day$ )

Το σχηματικό διάγραμμα του υπομοντέλου του οργανικού άνθρακα φαίνεται στο Σχήμα 9.



Σχήμα 9: Υπομοντέλο οργανικού άνθρακα

### Προσδιορισμός Παραμέτρων

Ο συντελεστής  $Y_3$  εμφανίζεται σταθερός στη βιβλιογραφία με τιμή  $Y_3 = 50$  (Di Toro 1973, O'Connor 1976, Thoman 1975).

Ο συντελεστής  $R_L$  εξαρτάται τόσο από τη φύση του οργανικού άνθρακα που διασπάται όσο και από τους περιβαλλοντικούς παράγοντες που επηρεάζουν τη δράση των μικροοργανισμών. Έτσι δεν είναι

περίεργο το ότι δεν είναι εύκολο να προταθούν τιμές με γενική εφαρμογή. Η τιμή που προτείνεται από το μοντέλο είναι  $R_{L(20)} = 0.20 \text{ day}^{-1}$ , με τιμή θερμοκρασιακού συντελεστή  $A7 = 1.040$ .

### 3.6 Διαλυμένο οξυγόνο

Η διαίτα του διαλυμένου οξυγόνου επηρεάζεται θετικά από τη φωτοσύνθεση και την είσοδο οξυγόνου από την ατμόσφαιρα. Αρνητική επίδραση έχουν τα φαινόμενα της οξειδωσης του οργανικού άνθρακα, της νιτροποίησης, της ενδογενούς αναπνοής του φυτοπλαγκτόν και της ζήτησης οξυγόνου από τις πυθμενικές αποθέσεις.

Πίνακας 7: Διεργασίες που επηρεάζουν τη συγκέντρωση διαλυμένου οξυγόνου

Παραγωγή διαλυμένου οξυγόνου	Κατανάλωση διαλυμένου οξυγόνου
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Φυσικός επαναερισμός</li> <li>• Φωτοσύνθεση</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Ζήτηση από πυθμενικές αποθέσεις</li> <li>• Οξείδωση οργανικού άνθρακα</li> <li>• Νιτροποίηση</li> <li>• Ενδογενής αναπνοή φυτοπλαγκτόν</li> </ul>

Η παραγωγή οξυγόνου κατά τη φωτοσύνθεση είναι μία διαδικασία που εξαρτάται από τη συγκέντρωση του φυτοπλαγκτόν και την ηλιακή ακτινοβολία, ενώ οι συγκεντρώσεις των θρεπτικών επηρεάζουν την ταχύτητα σύνθεσης νέου πρωτοπλάσματος φυτοπλαγκτόν, όχι όμως την ταχύτητα παραγωγής οξυγόνου. Με βάση τα παραπάνω, η παραγωγή οξυγόνου μπορεί να περιγραφεί μαθηματικά ως εξής:

$$\frac{dM_{DO}}{dt} = Y_4 \cdot M_{Chl} \cdot \mu_{max} \cdot A_1^{T-20} \cdot \frac{e^{a_1} - e^{a_0}}{H \cdot K} \quad (45)$$

όπου

$M_{DO}$  μάζα διαλυμένου οξυγόνου στο στοιχείο πλήρους μίξης (g)

$Y_4$  περιεκτικότητα φυτοπλαγκτόν σε οξυγόνο ( $\frac{g O_2}{g \text{ χλωροφύλλης}}$ )

Η τροφοδοσία οξυγόνου από την ατμόσφαιρα, σύμφωνα με τη θεωρία των δύο στιβάδων, δίνεται από την εξίσωση:

$$\frac{dM_{DO}}{dt} = K_{at} \cdot (DO_{sat} - \frac{M_{DO}}{V}) \cdot E \quad (46)$$

όπου

$K_{at}$  σταθερά φυσικού επαναερισμού (m/day)

$E$  επιφάνεια στοιχείου πλήρους μίξης ( $m^2$ )

$DO_{sat}$  συγκέντρωση κορεσμού διαλυμένου οξυγόνου ( $g/m^3$ )

Η συγκέντρωση κορεσμού διαλυμένου οξυγόνου στο νερό εξαρτάται άμεσα από τη θερμοκρασία και δίνεται από τη σχέση:

$$DO_{SAT} = 14,659 - 0,410 \cdot T + 0,007990 \cdot T^2 - 0,000077 \cdot T^3 \quad (47)$$

όπου

$T$  θερμοκρασία νερού ( $^{\circ}C$ )

Η ζήτηση οξυγόνου λόγω ενδογενούς αναπνοής των αλγών, νιτροποίησης και οξείδωσης του οργανικού άνθρακα περιγράφεται ως εξής:

$$\frac{dM_{DO}}{dt} = -R_L \cdot M_{OC} - 4.5 \cdot R_N \cdot M_{NH} - Y_3 \cdot R_A \cdot M_{Chl} \quad (48)$$

όπου

$M_{OC}$	μάζα οργανικού άνθρακα στο στοιχείο πλήρους μίξης (g)
$M_{NH}$	μάζα αμμωνιακού αζώτου στο στοιχείο πλήρους μίξης (g)
$M_{CHL}$	μάζα χλωροφύλλης στο στοιχείο πλήρους μίξης (g)
$R_L$	συντελεστής ταχύτητας οξείδωσης οργανικού άνθρακα ( $day^{-1}$ )
$R_N$	συντελεστής ταχύτητας νιτροποίησης ( $day^{-1}$ )
$R_A$	ρυθμός ενδογενούς αναπνοής ( $day^{-1}$ )

Η ζήτηση οξυγόνου από τις πυθμενικές αποθέσεις υπεισέρχεται με τη βοήθεια της σταθεράς SOD.

$$\frac{dM_{DO}}{dt} = SOD \cdot E \quad (49)$$

όπου

SOD	ζήτηση οξυγόνου από τον πυθμένα ( $g/m^2/day$ )
E	εμβαδόν πυθμένα στοιχείου πλήρους μίξης ( $m^2$ )

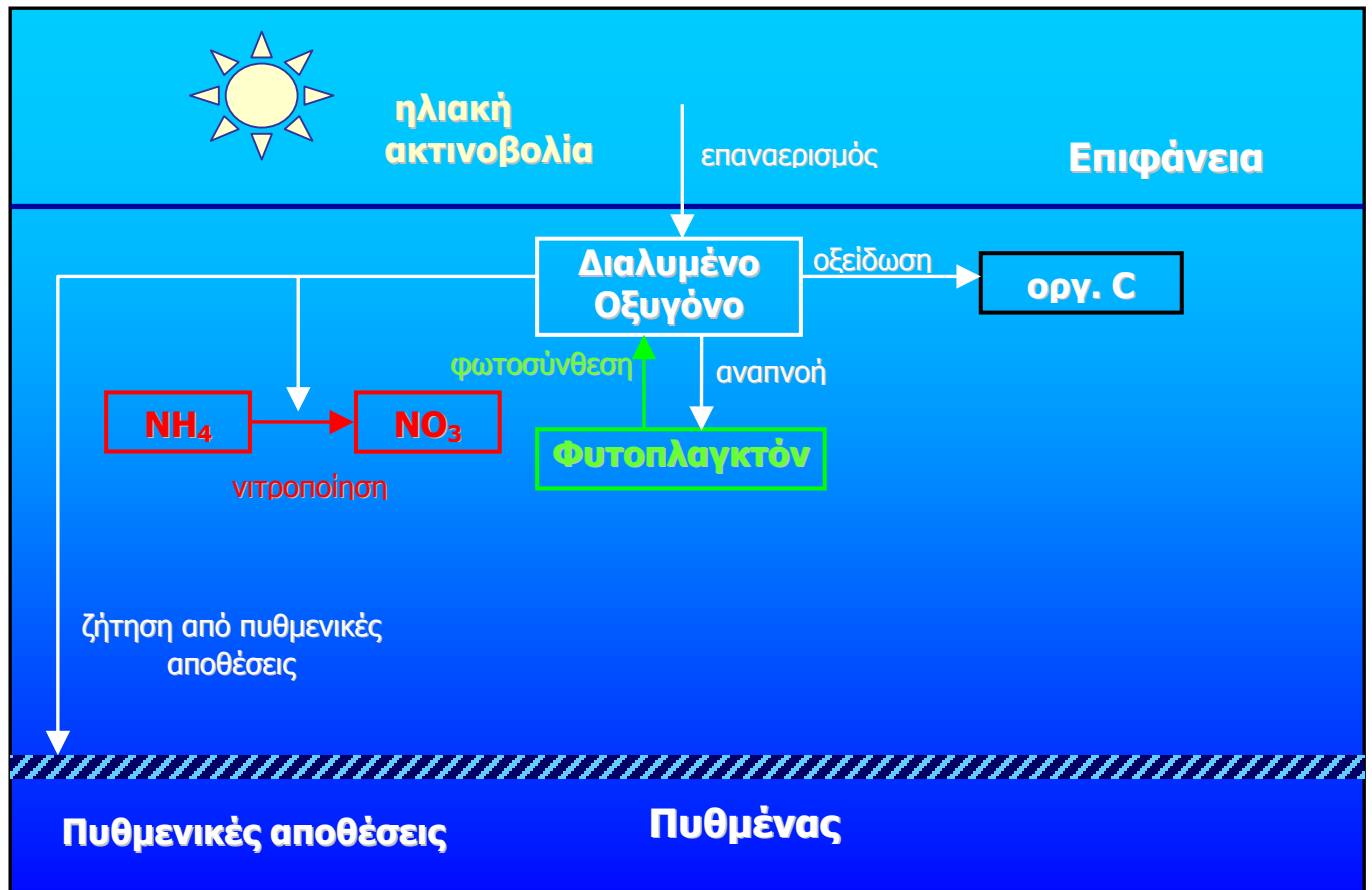
Η τελική διαφορική εξίσωση που επιλύεται για την εύρεση της συγκέντρωσης του διαλυμένου οξυγόνου είναι η

$$\begin{aligned} \frac{dM_{OC}}{dt} = & K_{at} \cdot (DO_{sat} - \frac{M_{DO}}{V}) \cdot E + Y_4 \cdot M_{Chl} \cdot \mu_{max} \cdot A_1^{T-20} \cdot \frac{e^{a_1} - e^{a_0}}{H \cdot K} - R_L \cdot M_{OC} - 4.5 \cdot R_N \cdot M_{NH} - Y_3 \cdot R_A \cdot M_{Chl} + \\ & + \left( \sum_i Q_{in}^i \cdot C_{in DO}^i \right) - \left( \sum_k Q_{out}^k \right) \cdot \frac{M_{DO}}{V} \end{aligned} \quad (50)$$

όπου

$M_{DO}$	μάζα διαλυμένου οξυγόνου στο στοιχείο πλήρους μίξης (g)
V	όγκος στοιχείου πλήρους μίξης ( $m^3$ )
$Q_{in}^i$	η παροχή της εισροής i στο στοιχείο πλήρους μίξης ( $m^3/day$ )
$C_{in DO}^i$	η συγκέντρωση σε διαλυμένο οξυγόνο της εισροής i ( $g/m^3$ )
$Q_{out}^k$	η παροχή της εκροής k από το στοιχείο πλήρους μίξης ( $m^3/day$ )

Το σχηματικό διάγραμμα του υπομοντέλου του διαλυμένου οξυγόνου φαίνεται στο Σχήμα 10.



Σχήμα 10: Υπομοντέλο διαλυμένου οξυγόνου

### Προσδιορισμός Παραμέτρων

Ο προσδιορισμός του συντελεστή  $Y_4$  έγινε με τη βοήθεια στοιχείων που παρουσίασαν οι Dugkale και Wilkerson (1985).

Δεχόμενοι την ισοδυναμία 1 mg άνθρακα = 4.1 mg άνθρακα ανά mg χλωροφύλλης και ώρα, υπολόγισαν ότι η ημερήσια παραγωγή οξυγόνου ανά mg χλωροφύλλης είναι 130 mg O<sub>2</sub>/mg χλωροφύλλης/day. Η τιμή αυτή ισχύει για την επιφάνεια του υδάτινου σώματος και για τις θερινές θερμοκρασίες (μέγιστη ταχύτητα φωτοσύνθεσης). Επομένως θα πρέπει να ισχύει

$$Y_4 \cdot \mu_{\max} \cdot F = 130$$

Δεδομένου ότι η  $\mu_{\max}$  για  $T = 25^\circ\text{C}$  ισούται με  $3.34 \text{ day}^{-1}$  και η μέγιστη φωτοπερίοδος είναι  $F = 0.72$ , προκύπτει  $Y_4 = 54 \frac{\text{mg O}_2}{\text{mg χλωροφυλλης}}$ .

Οι τιμές του συντελεστή επαναερισμού  $K_{at}$  κυμαίνονται σημαντικά (0.3-9.0 m/day, Αφραταίος 1986) και εξαρτώνται από την ισχύ των ανέμων.

### 3.7 Περιττωματικά κολοβακτηρίδια

Η μείωση της συγκέντρωσης των κολοβακτηριδίων (πλήθος ανά 100 ml) έχει δύο συνιστώσες, τη φθορά τους από την υγρή μάζα και την αραίωση που συνεπάγεται η μεταφορά ύλης στο υδάτινο περιβάλλον.

Η φθορά των κολοβακτηριδίων προκύπτει ως αποτέλεσμα πολλών φαινομένων όπως η καθίζηση, οι φυσικοί περιορισμοί της αναπαραγωγής, η κατανάλωσή τους από άλλους οργανισμούς και οι τοξικές επιδράσεις του περιβάλλοντος (τοξίνες αλγών, τοξικά συστατικά του νερού, ηλιακή ακτινοβολία). Το τοξικό αποτέλεσμα της ηλιακής ακτινοβολίας έχει αποδοθεί κατά 75% στο υπεριώδες τμήμα της και κατά 25% στο ορατό τμήμα με μήκος κύματος 0.40-0.50 μm (Gameson, 1975). Έχει γενικώς αναγνωρισθεί ότι ακόμη και για τις χαμηλές πρωινές και απογευματινές εντάσεις της ηλιακής ακτινοβολίας η επίδρασή της στη φθορά των κολοβακτηριδίων είναι υπό συνθήκες συνθήκες πολύ μεγαλύτερη από αυτή των λοιπών παραγόντων.

Παραδοχές που συνήθως γίνονται κατά τη μελέτη της φθοράς των κολοβακτηριδίων στα θαλάσσια και γλυκά ύδατα, είναι οι εξής (Alkan et al 1994, Jagger 1967, Gameson and Gould 1975, Harris et al 1987, Mancini 1978, Sarikaya and Saatci 1987):

- Η ταχύτητα εξαφάνισης ακολουθεί κινητική 1ης τάξης (Νόμος Chick)
- Το θανατηφόρο αποτέλεσμα της ηλιακής ακτινοβολίας είναι ανεξάρτητο και αθροιστικό των αποτελεσμάτων φθοράς που έχουν οι αναφερθέντες λοιποί παράγοντες. Το τελευταίο αυτό συνολικό αποτέλεσμα μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι αυτό που παρατηρείται κατά τη νύχτα.
- Η ταχύτητα θανάτου λόγω ηλιακής ακτινοβολίας είναι ανάλογη με την έντασή της.

Η υιοθέτηση των παραδοχών αυτών οδηγεί στην ακόλουθη κινητική εξίσωση

$$\frac{dFC}{dt} = -K_{FC} \cdot FC \quad (51)$$

όπου

FC αριθμός περιττωματικών κολοβακτηριδίων στο στοιχείο πλήρους μίξης  
K<sub>FC</sub> συντελεστής φθοράς των κολοβακτηριδίων (day<sup>-1</sup>)

Η σχέση (51) μετά από ολοκλήρωση δίνει:

$$FC = FC_0 \cdot e^{-K_{FC} \cdot \Delta t} \quad (52)$$

όπου

FC και FC<sub>0</sub> αριθμός περιττωματικών κολοβακτηριδίων ανά μονάδα όγκου στους χρόνους t + Δt και t αντίστοιχα  
K<sub>FC</sub> συντελεστής φθοράς των κολοβακτηριδίων (day<sup>-1</sup>)

Ο συντελεστής φθοράς των κολοβακτηριδίων K<sub>FC</sub> ισούται με

$$K_{FC} = K_{FC_0} + K_{FC_{sun}} \cdot I \quad (53)$$



όπου

$K_{FC\_0}$	ταχύτητας φθοράς περιττωματικών κολοβακτηριδίων στο σκοτάδι ( $\text{day}^{-1}$ )
$K_{FC\_sun}$	σταθερά ταχύτητας φθοράς περιττωματικών κολοβακτηριδίων λόγω ηλιακής ακτινοβολίας ( $\text{cm}^2/\text{cal}$ )
$I$	ένταση ηλιακής ακτινοβολίας ( $\text{cal}/\text{cm}^2/\text{day}$ )

Ολοκληρώνοντας τη σχέση (8) από  $z=0$  μέχρι  $z=H$  προκύπτει ότι η μέση ηλιακή ακτινοβολία που δέχεται η υδάτινη στήλη είναι

$$I_{\text{mean}} = I_0 \cdot \frac{1 - e^{-K \cdot H}}{K \cdot H} \quad (54)$$

όπου

$I_{\text{mean}}$	μέση ένταση ηλιακής ακτινοβολίας στην υδάτινη στήλη ( $\text{cal}/\text{cm}^2/\text{day}$ )
$I_0$	προσπίπτουσα ηλιακή ακτινοβολία στην επιφάνεια ( $\text{cal}/\text{cm}^2/\text{day}$ )
$K$	σταθερά απόσβεσης ηλιακής ακτινοβολίας ( $\text{m}^{-1}$ )
$H$	βάθος υδάτινης στήλης (m)

Η τελική διαφορική εξίσωση που επιλύεται για την εύρεση της συγκέντρωσης των περιττωματικών κολοβακτηριδίων είναι η

$$\frac{dFC}{dt} = - \left( K_{FC\_0} + K_{FC\_sun} \cdot I_0 \cdot \frac{1 - e^{-K \cdot H}}{K \cdot H} \right) \cdot FC + \left( \sum_i Q_{in}^i \cdot C_{in\ FC}^i + \sum_j W_{FC}^j \right) - \left( \sum_k Q_{out}^k \right) \cdot \frac{FC}{V} \quad (55)$$

όπου

$FC$	αριθμός περιττωματικών κολοβακτηριδίων στο στοιχείο πλήρους μίξης
$V$	όγκος στοιχείου πλήρους μίξης ( $\text{m}^3$ )
$Q_{in}^i$	η παροχή της εισροής $i$ στο στοιχείο πλήρους μίξης ( $\text{m}^3/\text{day}$ )
$C_{in\ FC}^i$	η συγκέντρωση σε περιττωματικά κολοβακτηρίδια της εισροής $i$ (#FC/100ml)
$Q_{out}^k$	η παροχή της εκροής $k$ από το στοιχείο πλήρους μίξης ( $\text{m}^3/\text{day}$ )

### Προσδιορισμός παραμέτρων

Στη βιβλιογραφία χρησιμοποιείται πολύ συχνά ως μέτρο της ταχύτητας φθοράς των κολοβακτηριδίων ο χρόνος  $t_{90}$  δηλαδή ο χρόνος που απαιτείται για την καταστροφή των 90% του αρχικού πληθυσμού.

Με λογαρίθμηση της εξίσωσης (52) για  $\frac{FC}{FC_0} = 0,10$  και  $\Delta t = t_{90}$  προκύπτει:

$$K_{FC\_0} \cdot t_{90} + K_{FC\_sun} \cdot I_{90} = 2,30 \quad (56)$$

όπου  $I_{90}$  είναι η ηλιακή ακτινοβολία που συνεπάγεται εξαφάνιση των 90% των κολοβακτηριδίων.

Είναι προφανές, ενόψει άλλωστε και της εξίσωσης (56), ότι ο χρόνος  $t_{90}$  εξαρτάται από το μέγεθος της ηλιακής ακτινοβολίας και συνεπώς χαρακτηρίζεται από μεγάλη μεταβλητότητα. Κατά τις μεσημβρινές ώρες έχει μικρές τιμές και πολύ μεγαλύτερες κατά τις πρώτες πρωινές και τελευταίες απογευματινές ώρες. Κατά τη νύχτα ( $I=0$ ), ο χρόνος  $t_{90}$  έχει μεγάλες τιμές και χαρακτηρίζεται από σχετική σταθερότητα αφού εξαρτάται μόνο από τα βιολογικά και χημικά χαρακτηριστικά του νερού. Είναι κατά τη νύχτα:

$$t_{90} = \frac{2,30}{K_{FC_0}} \quad (57)$$

Σύμφωνα με τα συμπεράσματα ερευνών (Gameson 1973, Gameson and Gould 1975, Sarikaya and Saatci 1994) η σταθερά  $K_{FC_{sun}}$  δεν επηρεάζεται από τη θερμοκρασία του νερού, ενώ αντίθετα βρέθηκε ότι επηρεάζεται η σταθερά  $K_{FC_0}$ . Οι Gameson και Gould βρήκαν για τα ολικά κολοβακτηρίδια την εξής σχέση μεταξύ  $t_{90}$  (ώρες) στο σκοτάδι και θερμοκρασίας  $T$  του νερού σε βαθμούς Κελσίου.

$$\log(t_{90}) = 2,292 - 0,0295 \cdot T \quad (58)$$

η οποία δίνει για  $T=20^{\circ}\text{C}$   $t_{90}=50.35$  hr και συνεπώς (εξίσ. (57))  $K_{FC_0} = 0,046 \text{ hr}^{-1}$ .

Αντίστοιχη σχέση έχουν βρει και οι Sarikaya και Saatci (1994):

$$\log(t_{90}) = 2,37 - 0,0283 \cdot T \quad (59)$$

η οποία δίνει,  $t_{90} = 63.7$  hr και  $K_{FC_0} = 0,036 \text{ hr}^{-1}$ .

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα των πειραμάτων των Gameson και Gould η τιμή της σταθεράς  $K_{FC_{sun}}$  για TC ήταν περίπου  $0.100 \text{ cm}^2/\text{cal}$ . Τα αποτελέσματα των εργαστηριακών πειραμάτων και μετρήσεων πεδίου των άνω ερευνητών με E.coli ήταν λιγότερο ικανοποιητικά. Μερικά πειράματα υπέδειξαν ότι τα E.coli μπορεί να είναι ανθεκτικότερα από τα TC και ειδικότερα ότι η ακτινοβολία  $I_{90}$  που χρειάζονταν για να επιτευχθεί 90% μείωση των E.coli ήταν κατά μέσο όρο 33% μεγαλύτερη. Έτσι για τις συγκεκριμένες πειραματικές συνθήκες φαίνεται ότι οι κινητικές σταθερές για την εξαφάνιση των FC ήταν κοντά στις τιμές  $K_{FC_0} = 0,75 \cdot 0,46 = 0,035 \text{ hr}^{-1}$  και  $K_{FC_{sun}} = 0,75 \cdot 0,10 = 0,075 \text{ cm}^2/\text{cal}$ .

Πειράματα που εκτελέστηκαν το έτος 1978 (ΠΕΡΠΙΑ, 1980) με FC σε μείγματα λυμάτων της Αθήνας και νερού του Σαρωνικού Κόλπου έδωσαν στο σκοτάδι και θερμοκρασία  $20^{\circ}\text{C}$   $t_{90}=44.5-64.5$  hr δηλαδή  $K_{FC_0}=0.036-0.052$ . και επίσης 10 ζεύγη  $I_{90}-t_{90}$  στο ηλιακό φως. Με εφαρμογή της εξίσωσης (56) για τα ζεύγη αυτά και για  $K_{FC_0}=0.036$  προέκυψαν 10 τιμές  $K_{FC_{sun}}$  στο διάστημα  $0.029 - 0.073$  με μέση τιμή  $K_{FC_{sun}}=0.045 \text{ cm}^2/\text{cal}$ .

Πειράματα στο Σίνδεϋ Αυστραλίας (Bellair et al, 1977) με FC σε μείγματα λυμάτων και θαλάσσιου νερού έδωσαν τιμές  $K_{FC_0}$  και  $K_{FC_{sun}}$  ίσες με  $0.044 \text{ hr}^{-1}$  και  $0.023 \text{ cm}^2/\text{cal}$ . Αντίστοιχα, πειράματα των Sarikaya και Saatci (1994) έδωσαν τιμές  $K_{FC_{sun}}$  στο διάστημα  $0.057 - 0.136$  για TC με μέση τιμή  $0.09 \text{ cm}^2/\text{cal}$ .

### 3.8 Ρύπος χρήστη

Ο ρύπος χρήστη X είναι ένας ρύπος που ακολουθεί μια κινητική φθοράς πρώτης τάξης σύμφωνα με την εξίσωση:

$$\frac{dM_X}{dt} = -K_X \cdot M_X \quad (60)$$

όπου

$M_X$  μάζα ρύπου X στο στοιχείο πλήρους μίξης (g)  
 $K_X$  συντελεστής φθοράς του ρύπου X ( $\text{day}^{-1}$ )

Η διαφορική εξίσωση που επιλύεται για την εύρεση της συγκέντρωσης του ρύπου X είναι η

$$\frac{dM_X}{dt} = -K_X \cdot M_X + \left( \sum_i Q_{in}^i \cdot C_{in X}^i + \sum_j W_X^j \right) - \left( \sum_k Q_{out}^k \right) \cdot \frac{M_X}{V} \quad (61)$$

όπου

$M_X$  μάζα ρύπου X στο στοιχείο πλήρους μίξης (g)  
 $V$  όγκος στοιχείου πλήρους μίξης ( $\text{m}^3$ )  
 $Q_{in}^i$  η παροχή της εισροής i στο στοιχείο πλήρους μίξης ( $\text{m}^3/\text{day}$ )  
 $C_{in X}^i$  η συγκέντρωση του ρύπου X της εισροής i (mg/l)  
 $W_X^j$  ρυθμός προσθήκης ρύπου X από την εξωτερική πηγή j (g/day)  
 $Q_{out}^k$  η παροχή της εκροής k από το στοιχείο πλήρους μίξης ( $\text{m}^3/\text{day}$ )

Θέτοντας την τιμή του συντελεστή  $K_X$  ίση με μηδέν μπορεί να προσομοιωθεί ένας συντηρητικός ρύπος, ο οποίος υφίσταται στο στοιχείο πλήρους μίξης μόνο τη δράση της αραιώσης.



## 4 Μέθοδος επίλυσης

---

### 4.1 Εισαγωγή

Για την επίλυση του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων, χρησιμοποιούνται δυο πολύ γνωστές μέθοδοι αριθμητικής ολοκλήρωσης, η ολοκλήρωση κατά Euler και η μέθοδος Runge – Kutta.

Οι διαφορικές εξισώσεις που επιλύονται κατά την προσομοίωση είναι της μορφής

$$\frac{dY_j}{dt} = f(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$$

όπου  $Y_i$  είναι οι μεταβλητές:

χλωροφύλλη-α, ανόργανος φώσφορος, οργανικός φώσφορος, αμμωνιακό άζωτο, οξειδωμένο άζωτο, οργανικός άνθρακας, διαλυμένο οξυγόνο, περιττωματικά κολοβακτηρίδια, ρύπος χρήστη και όγκος.

Στην περίπτωση προσομοίωσης δύο στρωμάτων ο αριθμός των εξισώσεων διπλασιάζεται αφού οι μεταβλητές αυτές υπολογίζονται και για τα δύο στρώματα. Με αυτό τον τρόπο δημιουργείται ένα σύστημα 10 ή 20 διαφορικών εξισώσεων σε περίπτωση προσομοίωσης δύο στρωμάτων, το οποίο επιλύεται σε κάθε χρονική στιγμή με μία από τις διαθέσιμες μεθόδους.

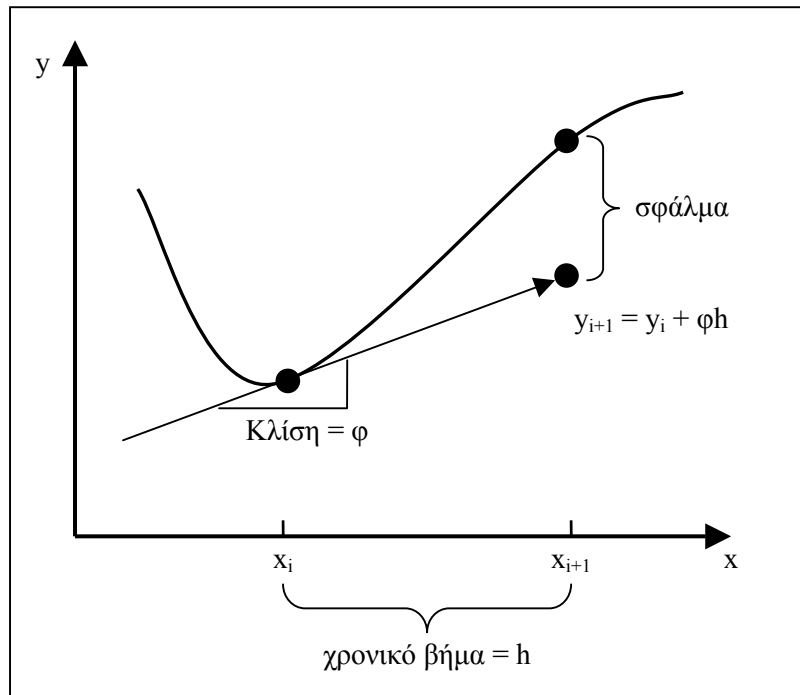
### 4.2 Μέθοδος Euler

Σύμφωνα με τη μέθοδο Euler ισχύει

$$\text{νεα τιμη} = \text{παλια τιμη} + \text{κλιση} \cdot \text{χρονικο βημα}$$

ή σε μαθηματικούς όρους

$$y_{i+1} = y_i + \phi \cdot h \quad (62)$$



Σχήμα 11: Γραφική αναπαράσταση της μεθόδου Euler.

Η μέθοδος Euler είναι μια μέθοδος ενός βήματος. Η κλίση της συνάρτησης χρησιμοποιείται για την προέκταση της συνάρτησης κατά ένα διάστημα  $h$  και την εύρεση της καινούριας τιμής. Με άλλα λόγια η κλίση της συνάρτησης στην αρχή του διαστήματος  $h$  χρησιμοποιείται ως εκτίμηση της μέσης κλίσης ολόκληρου του διαστήματος. Η μέθοδος αυτή είναι πολύ απλή στην εφαρμογή, γρήγορη από άποψη υπολογιστικού χρόνου αλλά εμπεριέχει σημαντικό αριθμητικό σφάλμα δεδομένου ότι είναι 1<sup>ης</sup> τάξης ακρίβειας. Η μέθοδος Euler δίνει αποτελέσματα χωρίς αριθμητικό σφάλμα στην περίπτωση που η συνάρτηση (η λύση της διαφορικής εξίσωσης) είναι γραμμική, κάτι που συμβαίνει για παράδειγμα με τη διαφορική εξίσωση του όγκου της οποίας η λύση είναι  $V_{i+1} = V_i + (Q_{in} - Q_{out}) \cdot dt$ . Τέλος αξίζει να σημειωθεί ότι το αριθμητικό σφάλμα είναι ανάλογο του  $h$  και επομένως μπορεί να περιοριστεί με μείωση του χρονικού βήματος.

### 4.3 Μέθοδος Runge-Kutta

Σε αντίθεση με τη μέθοδο Euler η οποία υπολογίζει την κλίση της συνάρτησης σε ένα βήμα, η μέθοδος Runge-Kutta χρησιμοποιεί 4 τιμές της κλίσης της συνάρτησης και η εκτίμηση της μέσης κλίσης στο διάστημα ολοκλήρωσης προκύπτει ως γραμμικός συνδυασμός των 4 αυτών τιμών σύμφωνα με την εξίσωση:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4) \cdot h \quad (63)$$

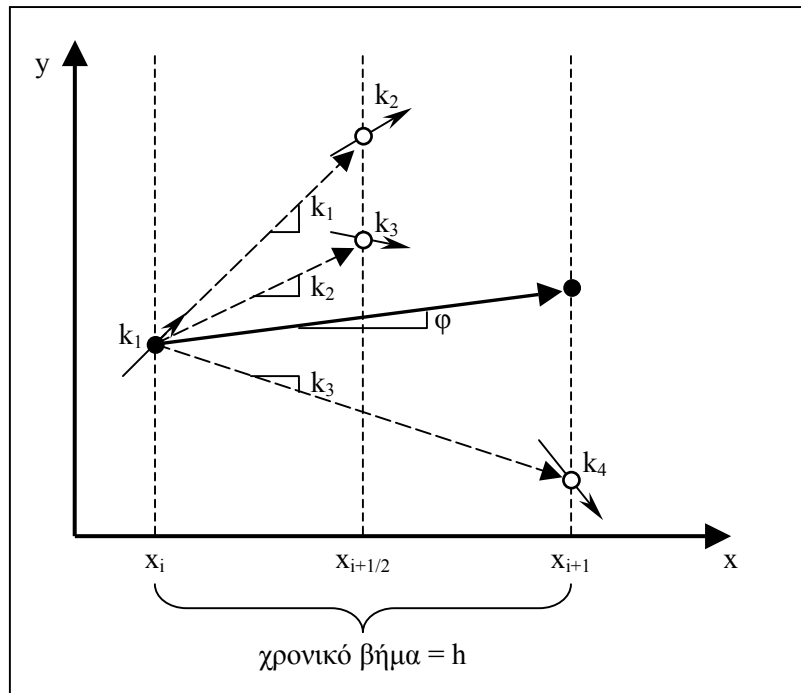
όπου

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2} \cdot h, y_i + \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot h\right)$$

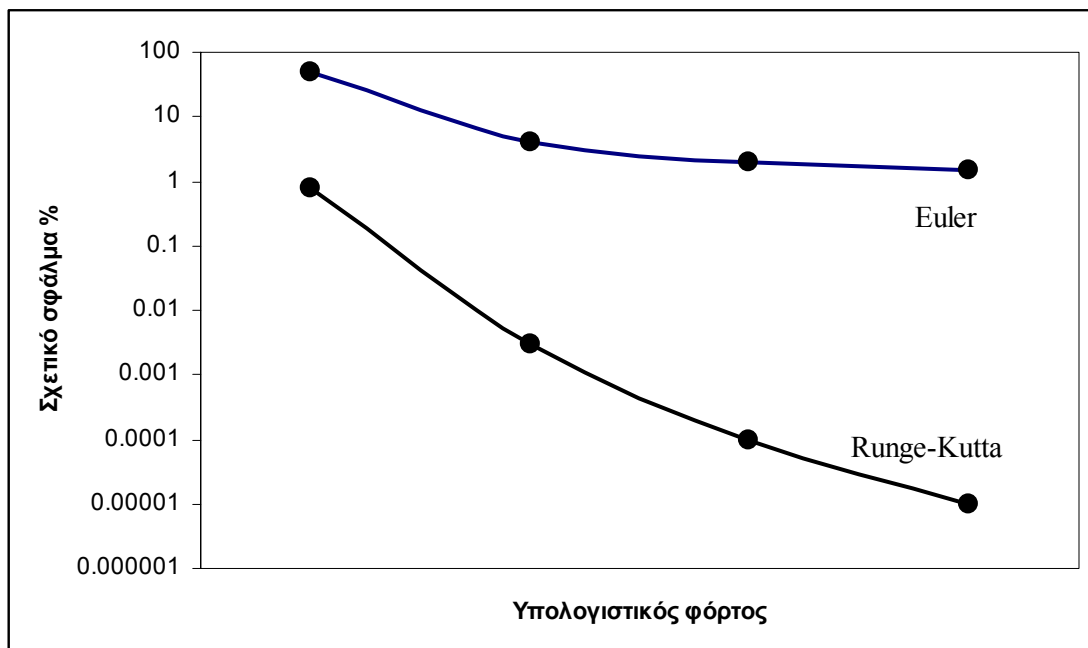
$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2} \cdot h, y_i + \frac{1}{2} \cdot k_2 \cdot h\right)$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3 \cdot h)$$



Σχήμα 12: Γραφική απεικόνιση των κλίσεων που χρησιμοποιούνται στη μέθοδο Runge-Kutta.

Η μέθοδος Runge - Kutta είναι μια μέθοδος 4<sup>ης</sup> τάξης ακρίβειας, απαιτεί όμως περισσότερους ενδιάμεσους υπολογισμούς μιας και χρησιμοποιεί 4 εξισώσεις για την εκτίμηση της μέσης κλίσης αντί μίας που χρησιμοποιεί η κλασική μέθοδος Euler. Παρόλα αυτά, για τον ίδιο υπολογιστικό φόρτο, η μέθοδος Runge-Kutta δίνει καλύτερα αποτελέσματα από την Euler (Σχήμα 13).



Σχήμα 13: Σύγκριση σχετικού σφάλματος σε σχέση με τον υπολογιστικό φόρτο.





## 5 Στοχαστική προσομοίωση

---

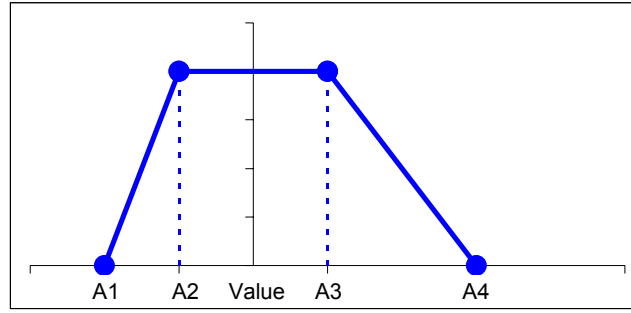
Ένα πολύ συχνό πρόβλημα που αντιμετωπίζεται στη μαθηματική προσομοίωση των χαρακτηριστικών ενός υδατινού σώματος είναι η επιλογή των τιμών των σταθερών που εμπλέκονται στις διάφορες φυσικές, χημικές και βιολογικές διεργασίες. Πολλές από τις μεταβλητές εισόδου του μαθηματικού μοντέλου όπως τα ρυπαντικά φορτία, η θερμοκρασία ή η ένταση της ηλιακής ακτινοβολίας, παρουσιάζουν έντονα στοχαστικό χαρακτήρα και διέπονται από νόμους που είναι σχεδόν αδύνατο να εκφραστούν μαθηματικά ή να ποσοτικοποιηθούν επακριβώς. Επιπλέον υπάρχει μεγάλος βαθμός αβεβαιότητας κατά την επιλογή των τιμών των παραμέτρων που εμπλέκονται στις διεργασίες (κινητικές εξισώσεις) του μοντέλου.

Στο μοντέλο αυτό υπάρχει ή δυνατότητα παράκαμψης της δυσκολίας αυτής, μέσω συνδυασμένης ντετερμινιστικής και στοχαστικής μαθηματικής προσομοίωσης των εξεταζόμενων ποιοτικών χαρακτηριστικών. Συγκεκριμένα, το μαθηματικό μοντέλο μπορεί να λάβει υπόψη την τυχαία διακύμανση των παραμέτρων και των εξωτερικών μεταβλητών, δημιουργώντας για κάθε μια από αυτές, ένα εύρος πιθανών τιμών και μια αντίστοιχη κατανομή πιθανότητας. Η προσομοίωση επαναλαμβάνεται για ένα μεγάλο χρονικό διάστημα, κάθε φορά με τις διαφορετικές τιμές των παραμέτρων που επιλέγονται τυχαία από το μοντέλο, μέχρις ότου αποκτηθεί ένα σύνολο τιμών των προβλεπομένων μεταβλητών, του οποίου οι στατιστικές παράμετροι, όπως ο μέσος όρος και η τυπική απόκλιση, έχουν σταθεροποιηθεί.

Η παραπάνω διαδικασία βασίζεται στην τεχνική Monte Carlo και αποτελεί μια δυναμική λύση στα προβλήματα αβεβαιότητας που εμπλέκονται στα περιβαλλοντικά μοντέλα. Αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας είναι ότι η πρόβλεψη των συγκεντρώσεων κάθε εξεταζόμενης φυσικής ή βιολογικής παραμέτρου γίνεται με τη μορφή όχι μιας μόνο συγκεκριμένης τιμής, αλλά ενός εύρους πιθανών τιμών. Είναι επομένως δυνατή, η στατιστική επεξεργασία αυτού του δείγματος και η εκτίμηση, όχι μόνου του μέσου όρου των συγκεντρώσεων των εξεταζόμενων παραμέτρων, αλλά και επιπλέον στατιστικών στοιχείων, όπως είναι οι χαρακτηριστικές τιμές μη υπέρβασης για διάφορα επίπεδα εμπιστοσύνης.

Με αυτόν τον τρόπο επιτυγχάνεται η απόκτηση μιας καλύτερης και πιο ολοκληρωμένης εικόνας της ποιοτικής κατάστασης του υδατινού αποδέκτη, ενώ ο μεγαλύτερος όγκος πληροφορίας που παρέχει το μοντέλο που αναπτύχθηκε σε σχέση με τα συμβατικά, βοηθάει στη διεξαγωγή χρησιμότερων και ασφαλέστερων συμπερασμάτων.

Το μοντέλο μπορεί να επιλέγει τυχαίες τιμές για όποια παράμετρο ζητηθεί μέσα από συγκεκριμένες ομοιόμορφες, τριγωνικές ή τραπεζοειδείς κατανομές σε χρονικά διαστήματα που ορίζει ο χρήστης. Αυτό γίνεται με τη βοήθεια των παραμέτρων  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  και  $A_4$  που αντιστοιχούν στα 4 χαρακτηριστικά σημεία μιας τραπεζοειδούς κατανομής όπως φαίνεται στο Σχήμα 14.



Σχήμα 14: Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

Κάθε φορά το μοντέλο επιλέγει έναν τυχαίο αριθμό  $X_{\text{rand}}$  στο διάστημα 0 έως 1, ο οποίος ανάγεται στο διάστημα τιμών της επιλεγμένης παραμέτρου σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$\text{Εάν } 0 < X_{\text{rand}} < \frac{A_2 - A_1}{A_4 + A_3 - A_2 - A_1} \text{ τότε}$$

$$X_{\text{rand\_ref}} = A_1 + \sqrt{X_{\text{rand}} \cdot (A_2 - A_1) \cdot (A_4 + A_3 - A_2 - A_1)}$$

$$\text{Εάν } \frac{A_2 - A_1}{A_4 + A_3 - A_2 - A_1} < X_{\text{rand}} < \frac{2 \cdot A_3 - A_2 - A_1}{A_4 + A_3 - A_2 - A_1} \text{ τότε}$$

$$X_{\text{rand\_ref}} = \frac{A_1 + A_2 + X_{\text{rand}} \cdot (A_4 + A_3 - A_2 - A_1)}{2}$$

$$\text{Εάν } \frac{2 \cdot A_3 - A_2 - A_1}{A_4 + A_3 - A_2 - A_1} < X_{\text{rand}} < 1 \text{ τότε}$$

$$X_{\text{rand\_ref}} = A_4 + \sqrt{(1 - X_{\text{rand}}) \cdot (A_4 - A_3) \cdot (A_4 + A_3 - A_2 - A_1)}$$

Με τη βοήθεια του ανηγμένου συντελεστή  $X_{\text{rand\_ref}}$  η τιμή της τυχαίας μεταβλητής  $X$  που θα χρησιμοποιηθεί από το μοντέλο υπολογίζεται από τις σχέσεις:

$$\text{Για χρήση ποσοστιαίων τιμών} \quad \rightarrow X = X_{\text{act}} + X_{\text{rand\_ref}} \quad (64)$$

$$\text{Για χρήση απόλυτων τιμών} \quad \rightarrow X = X_{\text{act}} \cdot \left(1 + \frac{X_{\text{rand\_ref}}}{100}\right) \quad (65)$$

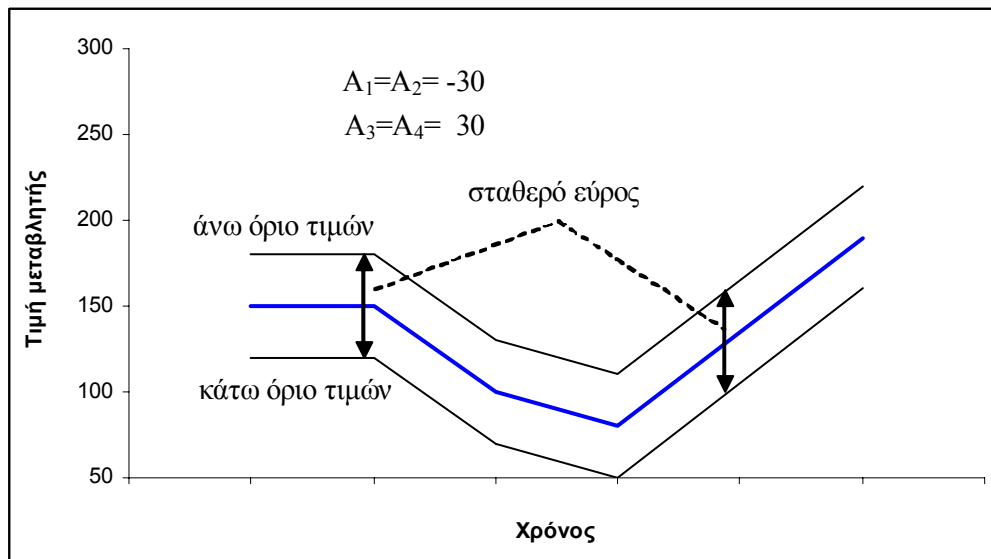
όπου

$X_{\text{act}}$  η σταθερή τιμή αναφοράς της μεταβλητής  $X$

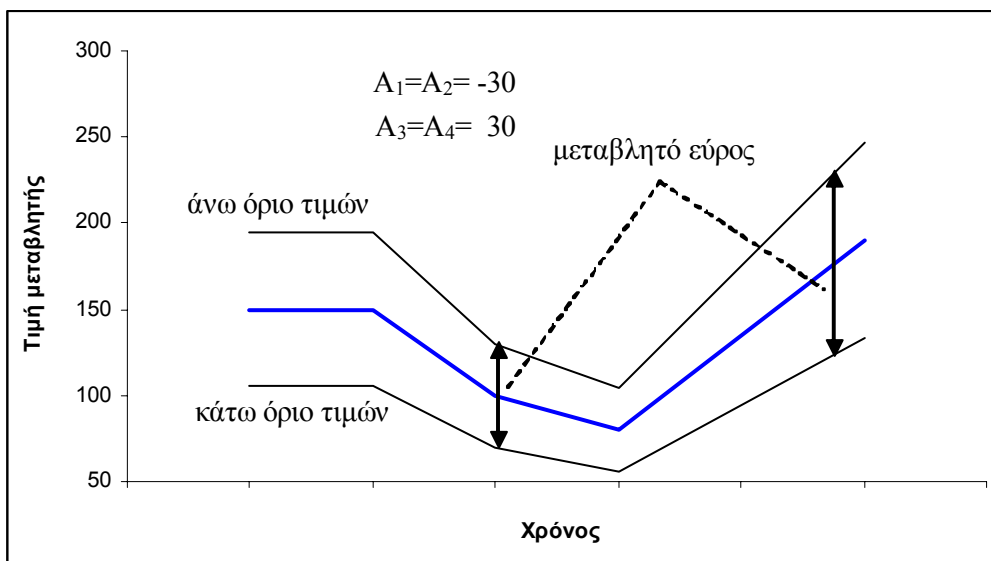
Η τυχαία τιμή  $X$  της μεταβλητής κυμαίνεται πάντα από  $X_{\text{act}} + A_1$  έως  $X_{\text{act}} + A_4$  σε περίπτωση χρήσης απόλυτων τιμών και από  $X_{\text{act}} \cdot \left(1 + \frac{A_1}{100}\right)$  έως  $X_{\text{act}} \cdot \left(1 + \frac{A_4}{100}\right)$  σε περίπτωση χρήσης ποσοστιαίων τιμών.

Σε περίπτωση που η μεταβλητή δεν έχει σταθερή τιμή αλλά οι τιμές της προσδιορίζονται από κάποια χρονοσειρά τότε η τιμή  $X_{\text{act}}$  αντιστοιχεί στην τιμή που προκύπτει από τη χρονοσειρά κάθε χρονική

στιγμή. Στα σχήματα (Σχήμα 15 και Σχήμα 16) φαίνονται τα όρια των τυχαίων τιμών μιας μεταβλητής στην οποία έχει αντιστοιχισθεί χρονοσειρά, στην περίπτωση χρήσης απόλυτων και ποσοστιαίων τιμών για τους συντελεστές A.

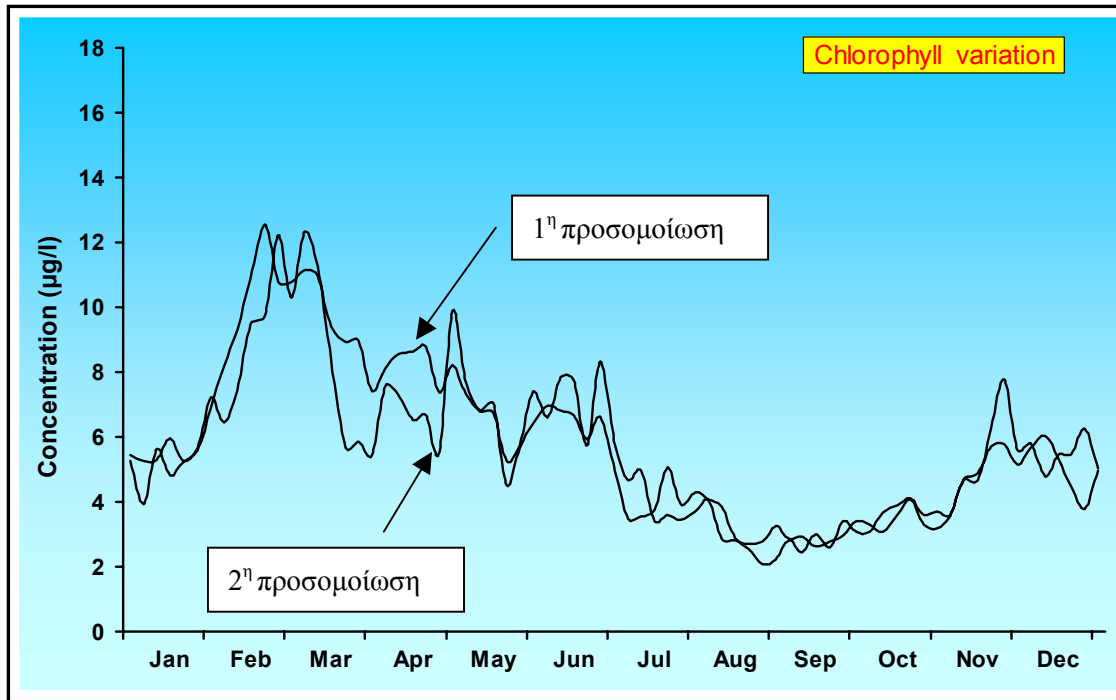


Σχήμα 15: Όρια τιμών στοχαστικής επιλογής τιμών για χρονοσειρά και χρήση απόλυτων τιμών.



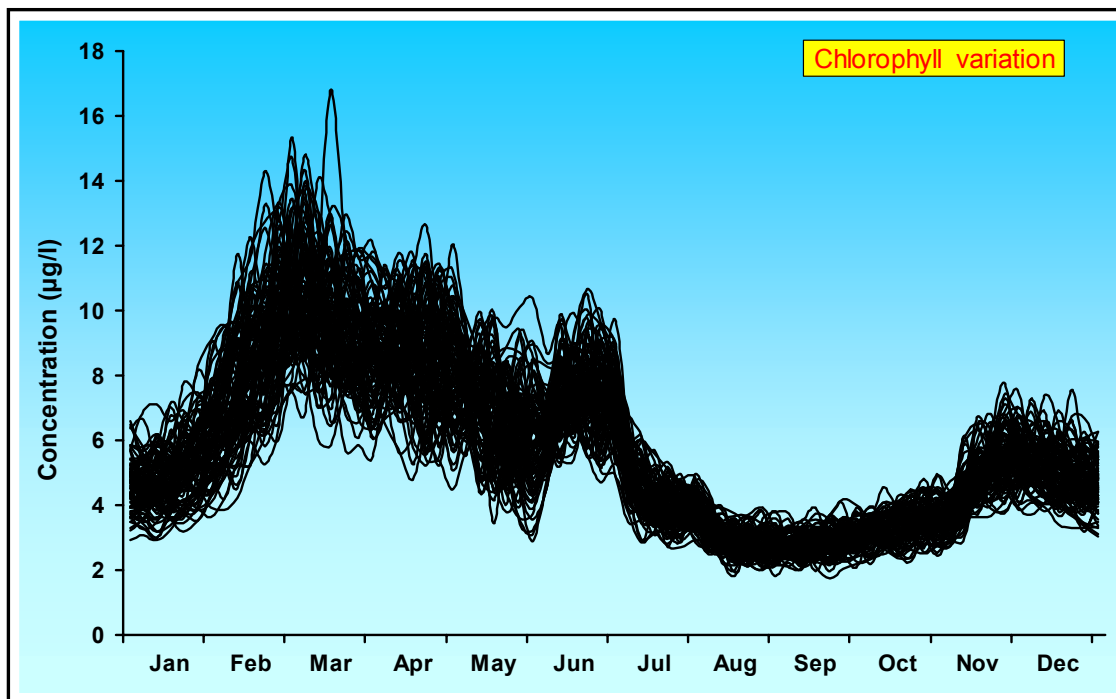
Σχήμα 16: Όρια τιμών στοχαστικής επιλογής τιμών για χρονοσειρά και χρήση ποσοστιαίων τιμών.

Το αποτέλεσμα της τυχαίας μεταβολής των παραμέτρων κατά τη διάρκεια της προσομοίωσης είναι ότι κάθε φορά που εκτελούμε την προσομοίωση τα αποτελέσματα που δίνει το μοντέλο είναι διαφορετικά (Σχήμα 17).



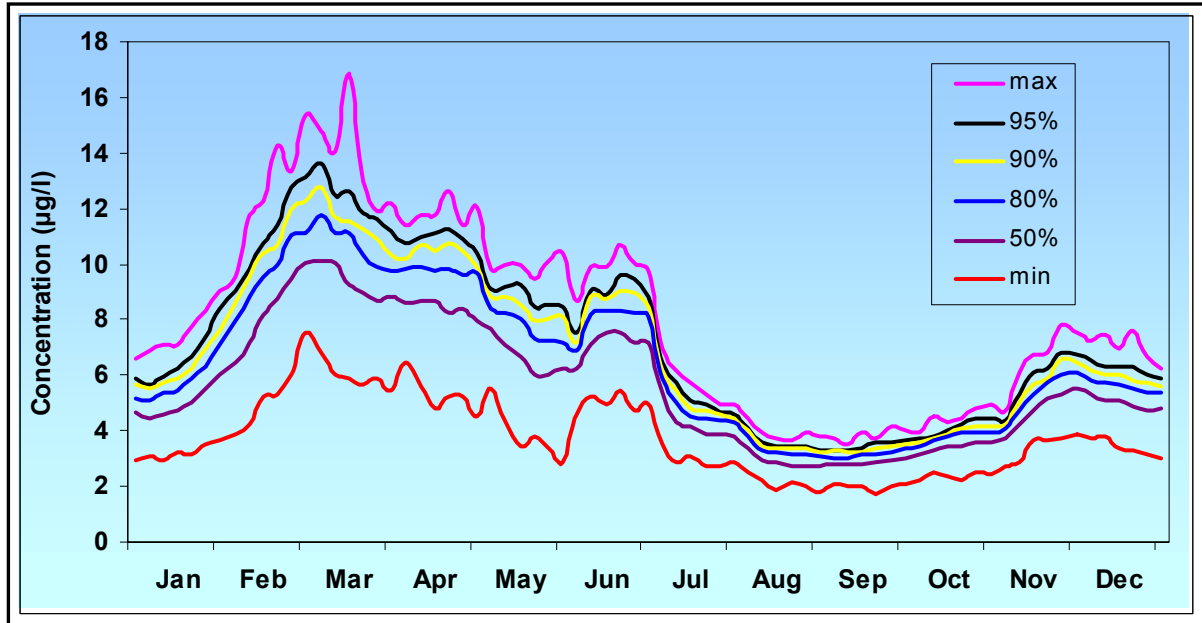
Σχήμα 17: Προσομοίωση με χρήση στοχαστικής μεθόδου

Αν επαναλάβουμε όμως την προσομοίωση πολλές φορές μπορούμε να αποκτήσουμε ένα σύνολο τιμών για κάθε παράμετρο, του οποίου οι στατιστικές παράμετροι όπως η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση να έχουν αποκτήσει σταθερή τιμή.



Σχήμα 18: Επανάληψη της προσομοίωσης πολλές φορές

Έχοντας πλέον ένα ικανοποιητικό σύνολο τιμών μπορούμε ύστερα από στατιστική επεξεργασία να έχουμε τα αποτελέσματα για κάθε παράμετρο με τη μορφή καμπυλών ίσης πιθανότητας μη υπέρβασης (Σχήμα 19), από τις οποίες μπορούν να εξαχθούν πολύτιμα συμπεράσματα.



Σχήμα 19: Καμπύλες ίσης πιθανότητας μη υπέρβασης έπειτα από στατιστική επεξεργασία



## 6 Προσομοίωση δυο στρωμάτων

---

Στην περίπτωση προσομοίωσης δυο στρωμάτων η λίμνη χωρίζεται με μια νοητή διεπιφάνεια σε δυο στοιχεία πλήρους μίξης, τα οποία επικοινωνούν με όρους διασποράς και όρους μεταγωγής. Ο όγκος του πάνω στοιχείου μεταβάλλεται ανάλογα με τις εισροές και εκροές από τη λίμνη, ενώ ο όγκος του κάτω στοιχείου παραμένει σταθερός εφόσον η νοητή διεπιφάνεια ορίζεται σε σταθερό υψόμετρο.

Για το ισοζύγιο της ποσότητας νερού στη λίμνη μπορούμε να γράψουμε

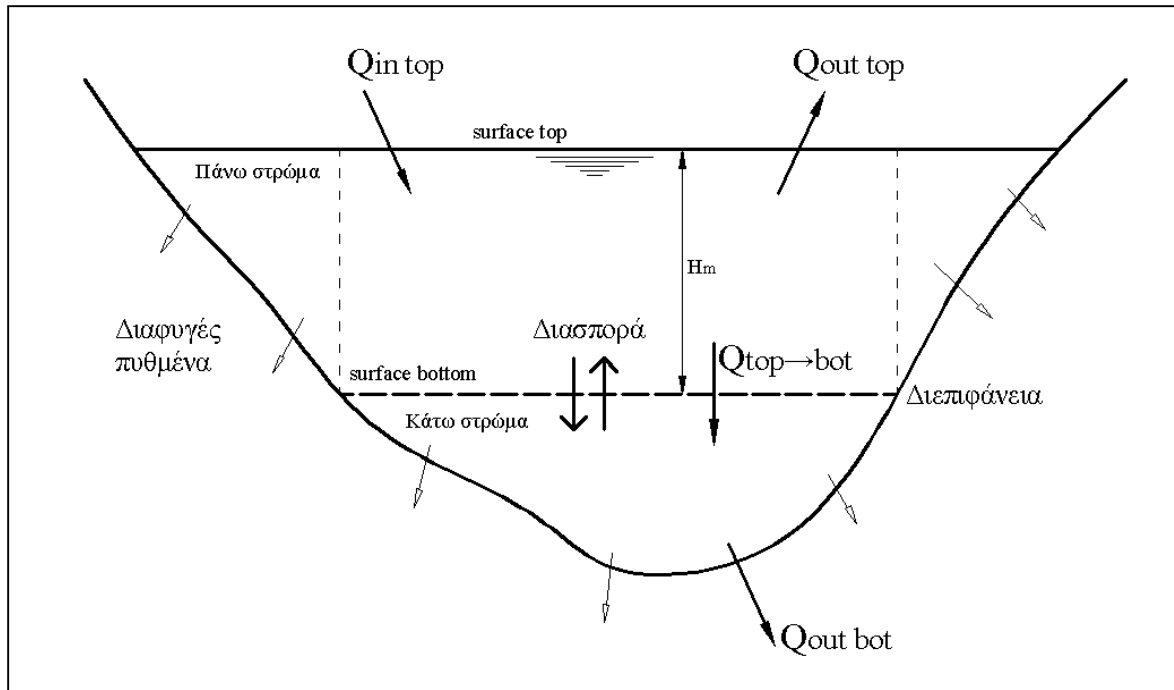
$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV_{\text{top}}}{dt} = Q_{\text{in top}} - Q_{\text{out top}} - Q_{\text{out bot}} - Q_{\text{ground}} \quad (66)$$

και

$$\frac{dV_{\text{bot}}}{dt} = 0 \quad (67)$$

όπου

$V$	ο όγκος της λίμνης ( $\text{m}^3$ )
$V_{\text{top}}$	ο όγκος του πάνω στρώματος της λίμνης ( $\text{m}^3$ )
$V_{\text{bot}}$	ο όγκος του κάτω στρώματος της λίμνης ( $\text{m}^3$ )
$Q_{\text{in top}}$	οι εισροές στο πάνω στρώμα της λίμνης ( $\text{m}^3/\text{day}$ )
$Q_{\text{out top}}$	οι εκροές από το πάνω στρώμα της λίμνης ( $\text{m}^3/\text{day}$ )
$Q_{\text{out bot}}$	οι εκροές από το κάτω στρώμα της λίμνης ( $\text{m}^3/\text{day}$ )
$Q_{\text{ground}}$	οι διαφυγές από τον πυθμένα της λίμνης ( $\text{m}^3/\text{day}$ )



Σχήμα 20: Θεώρηση λίμνης ως δυο στοιχεία πλήρους μίξης

Θεωρώντας ότι οι διαφυγές πυθμένα είναι ανάλογες της επιφάνειας πυθμένα κάθε στοιχείου πλήρους μίξης μπορούμε να γράψουμε

$$Q_{\text{ground top}} = Q_{\text{ground}} \cdot \left(1 - \frac{S_{\text{top}}}{S_{\text{bot}}}\right) \quad (68)$$

και

$$Q_{\text{ground bot}} = Q_{\text{ground}} \cdot \frac{S_{\text{top}}}{S_{\text{bot}}} \quad (69)$$

όπου

$Q_{\text{ground top}}$	οι διαφυγές πυθμένα από το πάνω στρώμα της λίμνης ( $\text{m}^3/\text{day}$ )
$Q_{\text{ground bot}}$	οι διαφυγές πυθμένα από το κάτω στρώμα της λίμνης ( $\text{m}^3/\text{day}$ )
$S_{\text{top}}$	η επιφάνεια της λίμνης στη στάθμη του νερού ( $\text{m}^2$ )
$S_{\text{bot}}$	η επιφάνεια της λίμνης στη στάθμη της διεπιφάνειας ( $\text{m}^2$ )

Από την εξίσωση (67) προκύπτει ότι

$$Q_{\text{top} \rightarrow \text{bot}} = Q_{\text{out bot}} + Q_{\text{ground}} \cdot \frac{S_{\text{top}}}{S_{\text{bot}}} \quad (70)$$



όπου

$Q_{top \rightarrow bot}$  η ποσότητα νερού που μετακινείται από το πάνω στρώμα στο κάτω (m<sup>3</sup>/day)

Λόγω μεταγωγής το πάνω στρώμα της λίμνης χάνει μια ποσότητα μάζας κάθε ρύπου την οποία την κερδίζει το κάτω στρώμα. Ο ρυθμός της μεταφοράς της μάζας του κάθε ρύπου X που βρίσκεται στη λίμνη, από το πάνω στρώμα στο κάτω στρώμα, ισούται με:

$$\frac{dM_X^{top}}{dt} = -\frac{M_X^{top}}{V_{top}} \cdot Q_{top \rightarrow bot} = -\frac{dM_X^{bot}}{dt} \quad (71)$$

Τα δυο στρώματα ανταλλάσσουν επίσης μάζα ρύπου μεταξύ τους λόγω διασποράς. Η ροή μάζας λόγω διασποράς σε αντιστοιχία με το νόμο του Fick, θεωρείται ότι είναι ανάλογη της χωρικής κλίσης της διασποράς και της διεπιφάνειας των δυο στοιχείων. Σε μαθηματικούς όρους μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{dM}{dt} = -K_z \cdot \frac{dC}{dz} \cdot S \quad (72)$$

όπου

M η μάζα του ρύπου (M)  
C η συγκέντρωση του ρύπου (ML<sup>-3</sup>)  
K<sub>Z</sub> συντελεστής κατακόρυφης διασποράς (L<sup>2</sup>T<sup>-1</sup>)  
S η επιφάνεια μέσω της οποίας γίνεται η διασπορά (L<sup>2</sup>)

Στην περίπτωση των δύο στρωμάτων της λίμνης ο ρυθμός μεταφοράς μάζας ρύπου λόγω διασποράς εκφράζεται ως:

$$\frac{dM_X^{top}}{dt} = K_z \cdot \frac{\frac{M_X^{top}}{V_{top}} - \frac{M_X^{bot}}{V_{bot}}}{L_z} \cdot S_{bot} = -\frac{dM_X^{bot}}{dt} \quad (73)$$

όπου

$M_X^{top}$  η μάζα του ρύπου X στο πάνω στρώμα της λίμνης (g)  
 $M_X^{bot}$  η μάζα του ρύπου X στο κάτω στρώμα της λίμνης (g)  
 $V_{top}$  ο όγκος του πάνω στρώματος της λίμνης (m<sup>3</sup>)  
 $V_{bot}$  ο όγκος του κάτω στρώματος της λίμνης (m<sup>3</sup>)  
K<sub>Z</sub> συντελεστής κατακόρυφης διασποράς (m<sup>2</sup>/day)  
S<sub>bot</sub> η επιφάνεια της λίμνης στη στάθμη της νοητής διεπιφάνειας (m<sup>2</sup>)  
L<sub>Z</sub> η απόσταση των κέντρων βάρους του πάνω και του κάτω στρώματος της λίμνης (m)

Στην περίπτωση δυο στοιχείων πλήρους μίξης, σε αντιστοιχία με τη σχέση (1), η εξίσωση συνέχειας μπορεί να γραφτεί για το επάνω στρώμα:

$$\frac{dM_{top}^X}{dt} = \underbrace{\lambda_{top} \cdot M_{top}^X}_{\text{διεργασίες}} + \underbrace{\sum_i Q_{in\ top}^i \cdot C_X^i - \left( \sum_k Q_{out\ top}^k + \sum_j Q_{out\ bot}^j + Q_{ground} \right) \cdot \frac{M_{top}^X}{V_{top}} + \sum_n W_X^n}_{\text{μεταγωγή}} + \underbrace{\sum_n W_X^n}_{\text{φορτία}} - \underbrace{K_Z \cdot \frac{\frac{M_X^{top}}{V_{top}} - \frac{M_X^{bot}}{V_{bot}}}{L_Z} \cdot S_{bot}}_{\text{διασπορά}} \quad (74)$$

και για το κάτω στρώμα:

$$\frac{dM_{bot}^X}{dt} = \underbrace{\lambda_{bot} \cdot M_{bot}^X}_{\text{διεργασίες}} + \underbrace{\left( \sum_j Q_{out\ bot}^j + Q_{ground} \cdot \frac{S_{top}}{S_{bot}} \right) \cdot \frac{M_{bot}^X}{V_{bot}} + Q_{top \rightarrow bot} \cdot \frac{M_{top}^X}{V_{top}}}_{\text{μεταγωγή}} - \underbrace{K_Z \cdot \frac{\frac{M_X^{bot}}{V_{bot}} - \frac{M_X^{top}}{V_{top}}}{L_Z} \cdot S_{bot}}_{\text{διασπορά}} \quad (75)$$

όπου

$\lambda_{top}$	ρυθμός μεταβολής μάζας ρύπου X λόγω διεργασιών στο πάνω στρώμα της λίμνης ( $day^{-1}$ )
$\lambda_{bot}$	ρυθμός μεταβολής μάζας ρύπου X λόγω διεργασιών στο κάτω στρώμα της λίμνης ( $day^{-1}$ )
$Q_{in\ top}^i$	η παροχή της i εισροής στο πάνω στρώμα της λίμνης ( $m^3/day$ )
$C_X^i$	η συγκέντρωση του ρύπου X στην εισροή i ( $g/m^3$ )
$Q_{out\ top}^k$	η παροχή της εκροής k από το πάνω στρώμα της λίμνης ( $m^3/day$ )
$Q_{out\ bot}^j$	η παροχή της εκροής j από το κάτω στρώμα της λίμνης ( $m^3/day$ )

Όσον αφορά τον όρο των διεργασιών για το πάνω και το κάτω στρώμα θα επισημανθούν για κάθε ρύπο οι διαφορές που υπάρχουν σε σχέση με τον αντίστοιχο όρο διεργασιών στην περίπτωση αντιμετώπισης της λίμνης ως ένα στοιχείο πλήρους μίξης.

Ο όρος διεργασιών του φυτοπλαγκτόν για κάθε στρώμα δίνεται από τις σχέσεις:

$$\frac{dM_{Chl}^{top}}{dt} = (\mu_{max} \cdot f(Temp)^{top} \cdot f(Rad)^{top} \cdot f(Nutrient)^{top} - K_{dA}^{top} - R_A^{top} - K_{SA}^{top}) \cdot M_{Chl}^{top} \quad (76)$$

□ □ □ □ □  
λ.ο.γ.ω. διεργασιών

$$\frac{dM_{Chl}^{bot}}{dt} = (\mu_{max} \cdot f(Temp)^{bot} \cdot f(Rad)^{bot} \cdot f(Nutrient)^{bot} - K_{dA}^{bot} - R_A^{bot} - K_{SA}^{bot}) \cdot M_{Chl}^{bot} + K_{SA}^{top} \cdot M_{Chl}^{top} \quad (77)$$

□ □ □ □ □  
λ.ο.γ.ω. διεργασιών

Οι όροι των εξισώσεων υπολογίζονται κατά αντιστοιχία με τους όρους της εξίσωσης (22) με τη μόνη διαφορά στον όρο  $f(Rad)$ . Η ηλιακή ακτινοβολία που δέχεται το κάτω στρώμα είναι σημαντικά μικρότερη από αυτή που δέχεται το πάνω, με αποτέλεσμα το φυτοπλαγκτόν στο κάτω στρώμα

αναπτύσσεται με μικρότερο ρυθμό. Ολοκληρώνοντας τη σχέση (10) σε κάθε ένα από τα δυο στρώματα έχουμε

$$f(\text{Rad})^{\text{top}} = \int_{h=0}^{h=H_{\text{top}}} \frac{I_0 \cdot e^{-K \cdot h}}{I_S} \cdot e^{-\frac{I_0 \cdot e^{-K \cdot h}}{I_S}} \cdot dh = \frac{1}{H_{\text{top}} \cdot K_{\text{top}}} \cdot \left( e^{a_1^{\text{top}}} - e^{a_0^{\text{top}}} \right) \quad (78)$$

με

$$a_1^{\text{top}} = 1 - \frac{I_0}{I_S} \cdot e^{-K_{\text{top}} \cdot H_{\text{top}}}$$

$$a_0 = 1 - \frac{I_0}{I_S}$$

και

$$f(\text{Rad})^{\text{bot}} = \int_{h=H_m}^{h=H_m+H_{\text{bot}}} \frac{I_0 \cdot e^{-K \cdot h}}{I_S} \cdot e^{-\frac{I_0 \cdot e^{-K \cdot h}}{I_S}} \cdot dh = \frac{1}{H_{\text{bot}} \cdot K_{\text{top}}} \cdot \left( e^{a_1^{\text{bot}}} - e^{a_0^{\text{bot}}} \right) \quad (79)$$

με

$$a_1^{\text{bot}} = 1 - \frac{I_0}{I_S} \cdot e^{-K_{\text{bot}} \cdot (H_m + H_{\text{bot}})}$$

$$a_0^{\text{bot}} = 1 - \frac{I_0}{I_S} \cdot e^{-K_{\text{bot}} \cdot H_m}$$

όπου

$f(\text{Rad})^{\text{top}}$	μέση τιμή περιοριστικού παράγοντα ανάπτυξης φυτοπλαγκτόν λόγω ηλιακής ακτινοβολίας στο πάνω στρώμα (αδιάστατος)
$f(\text{Rad})^{\text{bot}}$	μέση τιμή περιοριστικού παράγοντα ανάπτυξης φυτοπλαγκτόν λόγω ηλιακής ακτινοβολίας στο κάτω στρώμα (αδιάστατος)
$H_m$	η απόσταση της διεπιφάνειας των δύο στοιχείων από την επιφάνεια του νερού (m)
$H_{\text{top}}$	το μέσο βάθος του πάνω στρώματος (m)
$H_{\text{bot}}$	το μέσο βάθος του κάτω στρώματος (m)

Επίσης η εξίσωση διεργασιών για το κάτω στρώμα έχει έναν όρο παραπάνω ( $K_{SA}^{\text{top}} \cdot M_{Chl}^{\text{top}}$ ), αφού το κάτω στρώμα δέχεται το φυτοπλαγκτόν που καθιζάνει από το πάνω στρώμα.

Ο όρος διεργασιών του οργανικού φώσφορου για κάθε στρώμα δίνεται από τις σχέσεις:

$$\frac{dM_{OP}^{\text{top}}}{dt} = (K_{dA}^{\text{top}} + R_A^{\text{top}}) \cdot Y_1 \cdot M_{Chl}^{\text{top}} - (R_P^{\text{top}} + K_{SP}^{\text{top}}) \cdot M_{OP}^{\text{top}} \quad (80)$$

□ □ □ □ □  
λ.ο.γ. διεργασιών

$$\frac{dM_{OP}^{\text{bot}}}{dt} = (K_{dA}^{\text{bot}} + R_A^{\text{bot}}) \cdot Y_1 \cdot M_{Chl}^{\text{bot}} - (R_P^{\text{bot}} + K_{SP}^{\text{bot}}) \cdot M_{OP}^{\text{bot}} + K_{SP}^{\text{top}} \cdot M_{OP}^{\text{top}} \quad (81)$$

□ □ □ □ □  
λ.ο.γ. διεργασιών

Όπως και στη χλωροφύλλη η εξίσωση διεργασιών για το κάτω στρώμα έχει έναν όρο παραπάνω ( $K_{SP}^{top} \cdot M_{OP}^{top}$ ), αφού το κάτω στρώμα δέχεται τον οργανικό φώσφορο που καθιζάνει από το πάνω στρώμα.

Για τον όρο διεργασιών του ανόργανου φωσφόρου έχουμε:

$$\frac{dM_{IP}^{top}}{dt} = R_p^{top} \cdot M_{OP}^{top} + K_{RP} \cdot (S_{top} - S_{bot}) - \mu_{top} \cdot M_{Chl}^{top} \cdot Y_1 \quad (82)$$

□ □ □ □  
λ.ο.γ. διεργασιών

$$\frac{dM_{IP}^{bot}}{dt} = R_p^{bot} \cdot M_{OP}^{bot} + K_{RP} \cdot (S_{bot}) - \mu_{bot} \cdot M_{Chl}^{bot} \cdot Y_1 \quad (83)$$

□ □ □ □  
λ.ο.γ. διεργασιών

όπου

$S_{top}$  η επιφάνεια της λίμνης στη στάθμη του νερού ( $m^2$ )

$S_{bot}$  η επιφάνεια της λίμνης στη στάθμη της διεπιφάνειας ( $m^2$ )

Όπως φαίνεται από τις δύο εξισώσεις η ποσότητα τροφοδότησης ανόργανου φωσφόρου από το πυθμένα, μοιράζεται στα δυο στρώματα ανάλογα με το εμβαδόν του πυθμένα τους.

Για το αμμωνιακό άζωτο και οξειδωμένο άζωτο έχουμε

$$\frac{dM_{NH}^{top}}{dt} = (K_{dA}^{top} - \mu_{top} \cdot P_{NH}^{top}) \cdot Y_2 \cdot M_{Chl}^{top} - R_N^{top} \cdot M_{NH}^{top} + K_{RN} \cdot (S_{top} - S_{bot}) \quad (84)$$

□ □ □ □  
λ.ο.γ. διεργασιών

$$\frac{dM_{NH}^{bot}}{dt} = (K_{dA}^{bot} - \mu_{bot} \cdot P_{NH}^{bot}) \cdot Y_2 \cdot M_{Chl}^{bot} - R_N^{bot} \cdot M_{NH}^{bot} + K_{RN} \cdot S_{bot} \quad (85)$$

□ □ □ □  
λ.ο.γ. διεργασιών

και

$$\frac{dM_{NO}^{top}}{dt} = R_N^{top} \cdot M_{NH}^{top} - \mu_{top} \cdot M_{Chl}^{top} \cdot Y_2 \cdot (1 - P_{NH}^{top}) - K_{DN} \cdot (S_{top} - S_{bot}) \quad (86)$$

□ □ □ □  
λ.ο.γ. διεργασιών

$$\frac{dM_{NO}^{bot}}{dt} = R_N^{bot} \cdot M_{NH}^{bot} - \mu_{bot} \cdot M_{Chl}^{bot} \cdot Y_2 \cdot (1 - P_{NH}^{bot}) - K_{DN} \cdot S_{bot} \quad (87)$$

□ □ □ □  
λ.ο.γ. διεργασιών

Και εδώ η ποσότητα τροφοδότησης αμμωνιακού αζώτου από το πυθμένα και κατανάλωσης οξειδωμένου αζώτου λόγω νιτροποίησης, επιμερίζεται στα δυο στρώματα ανάλογα με το εμβαδόν του πυθμένα τους.

Για τον οργανικό άνθρακα έχουμε

$$\frac{dM_{OC}^{top}}{dt} = K_{dA}^{top} \cdot M_{Chl}^{top} \cdot Y_3 - (R_L^{top} + K_{SA}^{top}) \cdot M_{OC}^{top} \quad (88)$$

□ □ □ □  
λ.ο.γ. διεργασιών

$$\frac{dM_{OC}^{bot}}{dt} = K_{dA}^{bot} \cdot M_{Chl}^{bot} \cdot Y_3 - (R_L^{bot} + K_{SA}^{bot}) \cdot M_{OC}^{bot} + K_{SA}^{top} \cdot M_{OC}^{top} \quad (89)$$

□ □ □ □ □  
λoγw διeργασιων

Για το διαλυμένο οξυγόνο η διαφορά έγκειται στην απουσία του όρου που περιγράφει το φυσικό επαναερισμό, από την εξίσωση του κάτω στρώματος.

$$\frac{dM_{DO}^{top}}{dt} = K_{at} \cdot (DO_{sat} - \frac{M_{DO}^{top}}{V_{top}}) \cdot S_{top} + Y_4 \cdot M_{Chl}^{top} \cdot \mu_{max} \cdot A_1^{T_{top}-20} \cdot \frac{e^{a_1} - e^{a_1}}{H_{top} \cdot K_{top}} - R_L^{top} \cdot M_{OC}^{top} - 4.5 \cdot R_N^{top} \cdot M_{NH}^{top} - Y_3 \cdot R_A^{top} \cdot M_{Chl}^{top} \quad (90)$$

□ □ □ □ □  
λoγw διeργασιων

$$\frac{dM_{DO}^{bot}}{dt} = Y_4 \cdot M_{Chl}^{bot} \cdot \mu_{max} \cdot A_1^{T_{top}-20} \cdot \frac{e^{a_1} - e^{a_1}}{H_{bot} \cdot K_{bot}} - R_L^{bot} \cdot M_{OC}^{bot} - 4.5 \cdot R_N^{bot} \cdot M_{NH}^{bot} - Y_3 \cdot R_A^{bot} \cdot M_{Chl}^{bot} \quad (91)$$

□ □ □ □ □  
λoγw διeργασιων

Όπως και η χλωροφύλλη τα περιττωματικά κολοβακτηρίδια του κάτω στρώματος δέχονται μικρότερη ακτινοβολία με αποτέλεσμα να έχουν μικρότερο ρυθμό φθοράς. Οι εξισώσεις για τα κολοβακτηρίδια διαμορφώνονται ως εξής:

$$\frac{dFC_{top}}{dt} = - \left( K_{FC\_0} + K_{FC\_sun} \cdot I_0 \cdot \frac{1 - e^{-K_{top} \cdot H_{top}}}{K_{top} \cdot H_{top}} \right) \cdot FC_{top} \quad (92)$$

□ □ □ □ □  
λoγw διeργασιων

$$\frac{dFC_{bot}}{dt} = - \left( K_{FC\_0} + K_{FC\_sun} \cdot I_0 \cdot \frac{e^{-K_{bot} \cdot H_m} - e^{-K_{bot} \cdot (H_m + H_{bot})}}{K_{bot} \cdot H_{bot}} \right) \cdot FC_{bot} \quad (93)$$

□ □ □ □ □  
λoγw διeργασιων

Τέλος για το ρύπο χρήστη ισχύουν οι εξισώσεις:

$$\frac{dM_X^{top}}{dt} = -K_X \cdot M_X^{top} \quad (94)$$

□ □ □ □ □  
λoγw διeργασιων

$$\frac{dM_X^{bot}}{dt} = -K_X \cdot M_X^{bot} \quad (95)$$

□ □ □ □ □  
λoγw διeργασιων

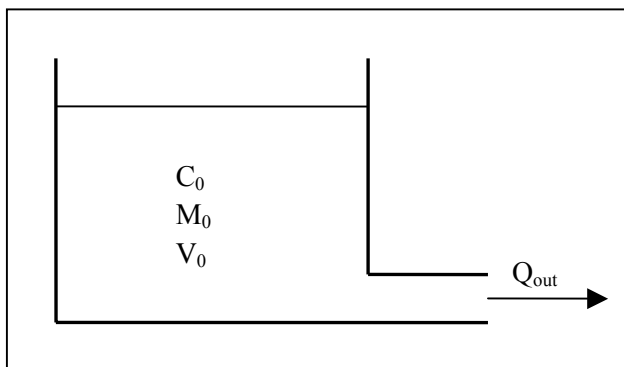
## 7 Παράρτημα

### 7.1 Εξίσωση μάζας vs εξίσωση συγκέντρωσης

Παρόλο που οι εξισώσεις συνέχειας της μάζας και της συγκέντρωσης είναι μαθηματικά ισοδύναμες η χρήση της πρώτης παρουσιάζει ορισμένα πλεονεκτήματα που προέρχονται από τη φύση του αριθμητικού σχήματος ολοκλήρωσης και τη μορφή των εξισώσεων. Στα επόμενα παραδείγματα παρουσιάζονται οι αναλυτικές και αριθμητικές λύσεις που προκύπτουν από τη χρήση των δύο εξισώσεων σε δύο απλοποιημένες εφαρμογές και γίνεται σύγκριση των αποτελεσμάτων.

#### 7.1.1 Εκροή από στοιχείο πλήρους μίξης

Έστω το παράδειγμα ενός στοιχείου πλήρους μίξης (Σχήμα 21) στο οποίο υπάρχει ένας συντηρητικός ρύπος ( $\lambda=0$ ) δεν υπάρχει κάποιο εξωτερικό φορτίο ( $W_X=0$ ) ή κάποια εισροή και το μόνο που υπάρχει είναι μια εκροή  $Q_{out}$  ( $Q_{in}=0$ ). Την αρχική στιγμή  $t=0$  το στοιχείο έχει όγκο  $V_0$ , η συγκέντρωση του ρύπου  $X$  είναι  $C_0$  και επομένως η μάζα του  $M_0 = \frac{C_0}{V_0}$ .



Σχήμα 21: Εκροή από στοιχείο πλήρους μίξης.

#### Λύση με χρήση εξίσωσης συγκέντρωσης

Στη συγκεκριμένη περίπτωση η εξίσωση συνέχειας με τη μορφή συγκεντρώσεων (4) απλοποιείται στην

$$\frac{dC_X}{dt} = 0 \quad (96)$$

ενώ η (2) γράφεται

$$\frac{dV}{dt} = -Q_{out} \quad (97)$$

Έστω η ακόλουθη διαδικασία επίλυσης του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων με ολοκλήρωση κατά Euler.

$$C_X(t + dt) = C_X(t) + \left[ \frac{dC_X}{dt} \right]_t \cdot dt = C_X(t) - 0 \cdot dt = C_X(t) \quad (98)$$

Αντίστοιχα για τον όγκο έχουμε

$$V(t + dt) = V(t) + \left[ \frac{dV}{dt} \right]_t \cdot dt = V(t) - Q_{out} \cdot dt \quad (99)$$

### Λύση με χρήση εξίσωσης μάζας

Στη συγκεκριμένη περίπτωση η εξίσωση συνέχειας με τη μορφή μάζας (1) απλοποιείται στην

$$\frac{dM_X}{dt} = -Q_{out} \cdot \frac{M_X}{V} \quad (100)$$

Ακολουθώντας μια αντίστοιχη διαδικασία ολοκλήρωσης κατά Euler έχουμε

$$\begin{aligned} M_X(t + dt) &= M_X(t) + \left[ \frac{dM_X}{dt} \right]_t \cdot dt = M_X(t) - Q_{out} \cdot \frac{M_X(t)}{V(t)} \cdot dt \Rightarrow \\ M_X(t + dt) &= M_X(t) \cdot \left( 1 - \frac{Q_{out}}{V(t)} \cdot dt \right) \end{aligned} \quad (101)$$

ενώ η λύση της εξίσωσης για τον όγκο παραμένει ίδια με την εξίσωση (108)

$$V(t + dt) = V(t) - Q_{out} \cdot dt = V(t) \cdot \left( 1 - \frac{Q_{out}}{V(t)} \cdot dt \right)$$

Επομένως για τον υπολογισμό της συγκέντρωσης έχουμε

$$C_X(t + dt) = \frac{M_X(t + dt)}{V(t + dt)} = \frac{M_X(t)}{V(t)} = C_X(t) \quad (102)$$

### Αναλυτική λύση

Η αναλυτική λύση του συστήματος των εξισώσεων (96) και (97) είναι

$$C_X(t) = C_0 \quad (103)$$

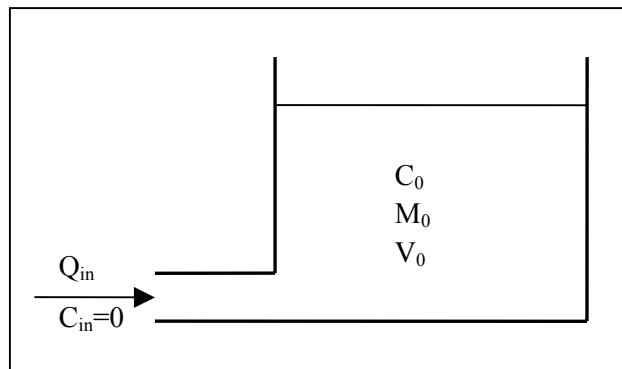
και

$$V(t) = V_0 + Q_{out} \cdot t \quad (104)$$

Όπως φαίνεται από τα παραπάνω η ολοκλήρωση της εξίσωσης συγκέντρωσης και της εξίσωσης μάζας δίνει ταυτόσημα αποτελέσματα με την αναλυτική λύση και επομένως δεν υπάρχει εισαγωγή αριθμητικού σφάλματος.

### 7.1.2 Εισροή σε στοιχείο πλήρους μίξης

Έστω το παράδειγμα ενός στοιχείου πλήρους μίξης (Σχήμα 22) στο οποίο υπάρχει ένας συντηρητικός ρύπος ( $\lambda=0$ ) και όπου δεν παρατηρείται κάποια εκροή ( $Q_{out}=0$ ) ή κάποιο εξωτερικό φορτίο ( $W_X=0$ ) και το μόνο που υπάρχει είναι μια εισροή  $Q_{in}$  καθαρού νερού ( $C_{in}=0$ ). Την αρχική στιγμή  $t=0$  το στοιχείο έχει όγκο  $V_0$ , η συγκέντρωση του ρύπου  $X$  είναι  $C_0$  και η μάζα του  $M_0 = \frac{C_0}{V_0}$ .



Σχήμα 22: Εισροή σε στοιχείο πλήρους μίξης.

#### Λύση με χρήση εξίσωσης συγκέντρωσης

Στη συγκεκριμένη περίπτωση η εξίσωση συνέχειας με τη μορφή συγκεντρώσεων (4) απλοποιείται στην

$$\frac{dC_X}{dt} = -Q_{in} \cdot \frac{C_X}{V} \quad (105)$$

ενώ η (2) γράφεται

$$\frac{dV}{dt} = Q_{in} \quad (106)$$

Ακολουθώντας τη διαδικασία επίλυσης του προηγούμενου παραδείγματος με ολοκλήρωση κατά Euler έχουμε

$$C_X(t+dt) = C_X(t) + \left[ \frac{dC_X}{dt} \right]_t \cdot dt = C_X(t) - Q_{in} \cdot \frac{C_X(t)}{V(t)} \cdot dt \Rightarrow$$

$$C_X(t+dt) = C_X(t) \cdot \left( 1 - \frac{Q_{in}}{V(t)} \cdot dt \right) \quad (107)$$

Αντίστοιχα για τον όγκο έχουμε



$$V(t + dt) = V(t) + \left[ \frac{dV}{dt} \right]_t \cdot dt = V(t) + Q_{in} \cdot dt \quad (108)$$

Λύση με χρήση εξίσωσης μάζας

Στη συγκεκριμένη περίπτωση η εξίσωση συνέχειας με τη μορφή μάζας (1) απλοποιείται στην

$$\frac{dM_x}{dt} = 0 \quad (109)$$

Ακολουθώντας μια αντίστοιχη διαδικασία ολοκλήρωσης κατά Euler έχουμε

$$M_x(t + dt) = M_x(t) + \left[ \frac{dM_x}{dt} \right]_t \cdot dt = M_x(t) + 0 \cdot dt = M_x(t) \quad (110)$$

ενώ η λύση της εξίσωσης για τον όγκο παραμένει ίδια με την εξίσωση (108)

$$V(t + dt) = V(t) + Q_{in} \cdot dt$$

Επομένως για τον υπολογισμό της συγκέντρωσης έχουμε

$$C_x(t + dt) = \frac{M_x(t + dt)}{V(t + dt)} = \frac{M_x(t)}{V(t + dt)} = \frac{C_x(t) \cdot V(t)}{V(t) + Q_{in} \cdot dt} = \frac{C_x(t)}{\left( 1 + \frac{Q_{in}}{V(t)} \cdot dt \right)} \quad (111)$$

Αναλυτική λύση

Η αναλυτική λύση του συστήματος των εξισώσεων (105) και (106) είναι

$$C_x(t) = \frac{C_0}{1 + \frac{Q_{in}}{V_0} \cdot t} \quad (112)$$

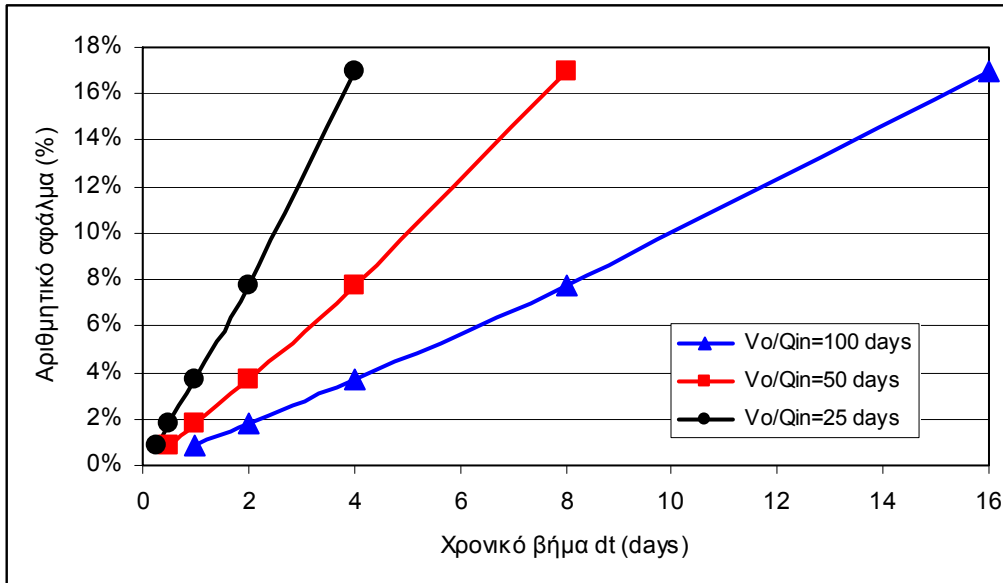
και

$$V(t) = V_0 + Q_{in} \cdot t \quad (113)$$

Όπως βλέπουμε οι εξισώσεις (112) και (111) είναι ταυτόσημες. Επομένως η λύση με ολοκλήρωση της εξίσωσης συνέχειας μάζας κατά Euler οδηγεί στα αποτελέσματα της αναλυτικής λύσης ενώ στην περίπτωση χρήσης της εξίσωσης των συγκεντρώσεων έχουμε εισαγωγή αριθμητικού σφάλματος.

Στο Σχήμα 23 φαίνεται ότι το αριθμητικό σφάλμα της ολοκλήρωσης της εξίσωσης (107) τη χρονική στιγμή όπου η αρχική συγκέντρωση, λόγω αραιώσης, ισούται με το 1/9 της αρχικής, είναι σχεδόν ανάλογο του χρονικού βήματος. Επίσης το σφάλμα εξαρτάται από το λόγο  $\frac{Q_{in}}{V_0}$ , με μεγαλύτερους

λόγους, άρα γρηγορότερους ρυθμούς ανανέωσης του νερού στο στοιχείο, να οδηγούν σε μεγαλύτερο αριθμητικό σφάλμα.



Σχήμα 23: Αριθμητικό σφάλμα συναρτήσει του χρονικού βήματος και του λόγου  $\frac{Q_{in}}{V_0}$

Από τα παραδείγματα 1 και 2 συμπεραίνουμε ότι στην περίπτωση όπου υπάρχουν εισροές σε ένα στοιχείο πλήρους μίξης η ολοκλήρωση της εξίσωσης συνέχειας της μάζας (1) δεν οδηγεί στην εισαγωγή αριθμητικού σφάλματος, σε αντίθεση με την ολοκλήρωση της εξίσωσης συνέχειας συγκεντρώσεων (4), η οποία υποεκτιμά τη συγκέντρωση του ρύπου, εισάγοντας αριθμητικό σφάλμα ανάλογο του χρονικού βήματος της ολοκλήρωσης. Σε περίπτωση ύπαρξης εκροής από το στοιχείο πλήρους μίξης και οι δυο εξισώσεις οδηγούν σε ορθά αποτελέσματα.

## 7.2 Προσαρμογή στοιχείων σε ημιτονοειδή καμπύλη

Σε περίπτωση ύπαρξης μετρήσεων θερμοκρασίας ή ηλιακής ακτινοβολίας επί σειράς ετών μπορεί να βρεθεί και να χρησιμοποιηθεί στο μοντέλο η ημιτονοειδής καμπύλη που προσαρμόζεται καλύτερα στις παρατηρούμενες τιμές. Η εύρεση της καμπύλης γίνεται με τη μέθοδο των ελάχιστων τετραγώνων.

Έστω ότι υπάρχουν διαθέσιμα στοιχεία  $P$  περιόδων της μεταβλητής  $Y$  (π.χ. θερμοκρασίας) με  $N$  μετρήσεις (π.χ. 12 μηνιαίες τιμές) σε κάθε περίοδο (σύνολο  $N \cdot P$  μετρήσεις). Έστω  $T$  η διάρκεια της περιόδου,  $t_0$  η χρονική στιγμή της πρώτης μέτρησης και επομένως η χρονική διάρκεια μεταξύ των μετρήσεων είναι  $\Delta t = \frac{T}{N-1}$ .

Η ημιτονοειδής καμπύλη που προσαρμόζεται καλύτερα στις μετρήσεις της μεταβλητής  $Y$  είναι της μορφής

$$Y = A + B \cdot \cos(\omega \cdot t + C) \quad (114)$$

όπου οι παράμετροι A, B, C και  $\omega$  προσδιορίζονται από τις σχέσεις:

$$A = \frac{\sum_{i=1 \text{ to } N} y_{i,j}}{N \cdot P} \quad (115)$$

$$B = \sqrt{\left[ \frac{2}{N \cdot P} \cdot \sum_{i=1 \text{ to } N} y_{i,j} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{N} \cdot (i-1)\right) \right]^2 + \left[ \frac{2}{N \cdot P} \cdot \sum_{i=1 \text{ to } N} y_{i,j} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{N} \cdot (i-1)\right) \right]^2} \quad (116)$$

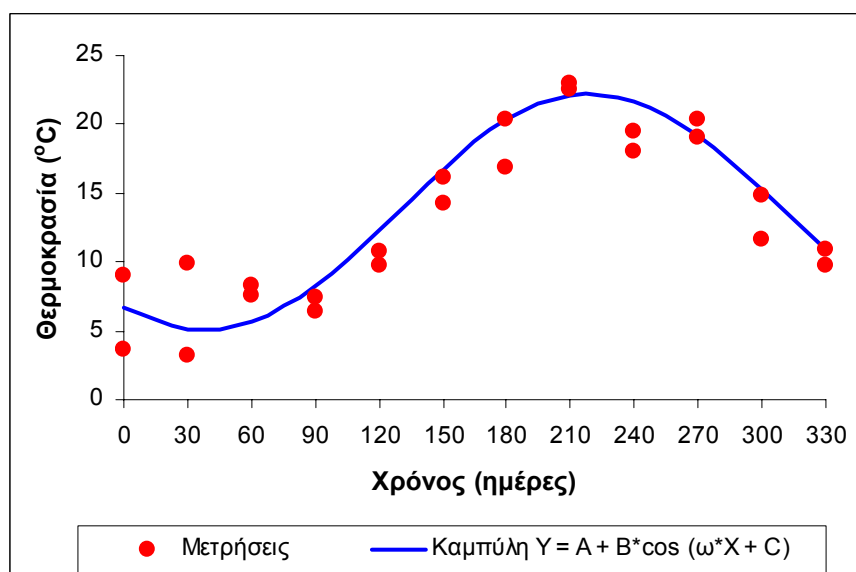
$$C = -\omega \cdot t_0 + \arctan \left[ \frac{\sum_{i=1 \text{ to } N} y_{i,j} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{N} \cdot (i-1)\right)}{\sum_{i=1 \text{ to } N} y_{i,j} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{N} \cdot (i-1)\right)} \right] \quad (117)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (118)$$

όπου

$y_{i,j}$

η i σε σειρά μέτρηση της περιόδου j



Σχήμα 24: Εύρεση ημιτονοειδούς καμπύλης από σειρά μετρήσεων.



## Βιβλιογραφία

---

- Ανδρεαδάκης Α., Αφραταίος Χ., "Μελέτη του Φαινομένου του Ευτροφισμού με Εφαρμογή στη Λίμνη Παμβώτιδα", ΕΜΠ (1986).
- Ανδρεαδάκης Α., Γαβαλάκη Ε., Νουτσόπουλος Κ. 'Μαθηματική Προσομοίωση Ποιοτικών Χαρακτηριστικών Τεχνητής Λίμνης Σχινιά' (2001).
- Ανδρεαδάκης Α., Νουτσόπουλος Κ., Γαβαλάκη Ε., (1998). "Μαθηματική Προσομοίωση Ποιοτικών Χαρακτηριστικών Νοτίου Ευβοϊκού Κόλπου".
- ΥΠΕΧΩΔΕ (2001). Εφαρμογή της Οδηγίας 91/271 της Ευρωπαϊκής Ένωσης στον Ελληνικό χώρο.
- Χριστούλας Δ., Ανδρεαδάκης Α., Αραβαντινός Α., Καββαδάς Μ., Σταθόπουλος Α., Στάμου Α., Χατζημήπιρος Κ., (2000), Περιβαλλοντική Τεχνολογία, ΕΜΠ, Αθήνα.
- Χριστούλας Δ. και Ανδρεαδάκης Α. (1989)."Μελέτη ποιοτικών χαρακτηριστικών του Σαρωνικού Κόλπου" Τελική Έκθεση Ερευν. Προγράμματος ΥΠΕΧΩΔΕ-ΕΜΠ.
- Bierman V.J., and Richardson W.L., "Mathematical Model of Phytoplankton Growth in Saginaw Bay, Lake Huron", Envir.Research Laboratories Grosse He, Michigan, EPA Ecological Series (1976).
- Canale R.P, Hineman D.F., Nachiappan S., "A Biological Production Model for Grand Traverse Bay", MICHU-SG-74-200, Report No 37, Michigan (1974).
- Canale R.P., De Palma L.M. and Vogel A.H., "A Plankton-based Food Web Model for Lake Michigan" in Modeling Biochemical Processes in Aquatic Ecosystems Ed. R.P. Canale (Ann Arbor Science) p.p. 33-74 (1976).
- Chen C.W. and Orlob G.T., "Ecological Simulation of Aquatic Environments. Systems Analysis and Simulation in Ecology" vol.3 Ed. B.C.Patten (N.Y. Academic Press) p.p. 476-588 (1975).
- Di Toro D.M., O'Connor DJ. and Thomann R.V., "A Dynamic Model of the Phytoplankton Population in the Sacramento-San Joaquin Delta", Advances in Chemistry, Nol06, Am.Chem.Soc., Washington D.C., p.p. 131-180 (1971).
- Dugdale R.C. and Wilkerson F.P., "Outfall Diffuser System for Discharge of Effluent from Treatment Works on Psyttalia Island, Athens-Fairfield Impact of Surface Versus Deep Sewage Outfall", (1985).
- Dugdale R.C., "Biological Modeling in Modeling of Marine Systems", Ed. J.C. Nihoul (Elsevier), p.p. 187-206, (1975).
- Gargas E., "A Three-box Eutrophication Model of a Mesotrophic Danish Lake", Water Quality Institute, Horsholm, Denmark ,(1976).
- Hydroscience Inc., "Limnological systems analysis fro great lakes, Phase I: Preliminary model design", G.L.B.C., Ann Arbor, Michigan. DACW-35-71-30030, (1973).
- Joint Research Centre – European Commission (2001), "Criteria for the identification of freshwater subjected to Eutrofication", Luxemburg, 2001
- Jorgensen S.E., "A Eutrophication Model for a Lake", Ecological Modeling 2, p.p. 147-165 (1976).

- Larsen D.P., Mercier H.T. and Malreg K.W., "Modeling Algal Growth Dynamics in Shagawa Lake, Minnesota", Modeling the Eutrophication Process, Eds. E.J. Middlebrook, O.H. Falkenberg and T.E. Maloney (Ann Arbor Science), p.p. 15-33 (1974).
- Limno-Tech, Inc., "A Mathematical Framework for Water Quality Models in Saginaw River and Bay", Ann Arbor, Michigan, (1977).
- Lung W.S., "Modeling of Phosphorus Sediment-Water Interactions in White Lake", Michigan, Ph.D.Diss., Univ. of Michigan, Ann Arbor, Michigan (1975).
- Noutsopoulos C., E. Gavalaki and A. Andreadakis 'Evaluation of the impact from the discharge of treated sewage to the South East Saronicos Gulf through Water Quality Modeling' Water Science & Technology, 39,8,pp. 63-70 (1998).
- Nyholm N., "A Simulation Model for Phytoplankton Growth and Nutrient Cycling in Eutrophic Shallow Lakes", Ecological Modeling, Vol.4, p.p. 279-310 (1973).
- O'Connor D.J., Thomann R.V. and Di Toro D.M., "Dynamic Water Quality, Forecasting and Management", U.S. EPA, Washington D.C., Report EPA 660/3-73-009 (1978).
- O'Connor D.J., Thomann R.V. and Di Toro D.M., "Ecological Models", Systems Approach to Water Management, Ed. V.Biswas (N.Y. McGraw-Hill), p.p. 299-333 (1976).
- OECD, Organisation for Economic Cooperation and Development (1982), "Eutrophication of water, monitoring, assessment and control", Paris, 150p.
- Orlob G.T., "Mathematical Modeling of Water Quality: Streams, Lakes and Reservoirs", HAS A, J.Wiley and Sons (1983).
- Poole H.H. and Atkins W.G.R., "Photoelectric Measurements of Submarine Illumination throughout the Year", J.Mar.Biol.Ass., OK, 16, p.p. 270-308 (1929).
- Thomann R.V., Di Toro D.M. and O'Connor D.J., "Preliminary Model of the Potomac Estuary Phytoplankton", Proc.of the ASCE, Journal of Envir.Eng.Dir. 100 (EE3), p.p. 699-715 (1974).
- Thomann R.V., Di Toro D.M., Wingfield R.P. and O'Connor D.J., "Mathematical Modeling of Phytoplankton in Lake Ontario", EPA report 660/3-75-005 (1975).
- Valiela I., "Marine ecological processes", Springer-Verlag, NY, Berlin, Heidelberg, Tokio (1984).